【土木学会論文集　第389号／Ⅳ-8　1988年1月】

確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金

OPTIMAL ROAD PRICING UNDER STOCHASTIC USER EQUILIBRIUM

赤松　隆*・桑原雅夫**
By Takashi AKAMATSU and Masao KUWAHARA

This paper discusses the optimal road pricing, which minimizes the total travel time, under Stochastic User Equilibrium (SUE) in the general transportation network. We analyse the structure of the problem formulated as a bilevel programming, using the conception of duality. As the result, we learn that the system optimum flow pattern can be attained in an arbitrary network by setting an appropriate toll pattern and the general solution has a form extending the conventional marginal cost pricing to the stochastic user behavior. Moreover, the uniqueness of the optimum link toll is proved in the case of logit-based SUE.

Keywords : road pricing, network assignment, stochastic user equilibrium

1. はじめに

交通施設・交通ネットワークを効率的に利用し混雑緩和を図るための方策を与える理論の1つに，交通経済学および交通ネットワーク均衡理論における混雑料金理論がある．これは，「交通ネットワークシステムを有効に使用するためには，次のような料金制度；『利用者はシステム最適状態での限界費用と平均費用の差に相当する費用を混雑料金として支払わなければならない』；を導入すべきである．そうすれば，利用者の自由な経路選択行動の結果がシステム全体の最適化状態と一致する」というものである．これは，価格理論における「限界費用原理」をネットワーク均衡理論に応用したものである．しかしながら，この限界費用原理は，利用者の行動・料金の設定条件・費用関数などについて，現実を非常に簡略化した理想的な状況に基づいたものである．

近年，この仮想的な状況設定を，より現実に近いものにする，すなわち，①費用関数に関する仮定をより実際的にする，②交通流に関する仮定をより実際的にする，③料金の設定に関するさまざまな現実的な制約を取り入れる，などの場合について，研究がいくつかなされている．①については，OD需要が費用に関して弾性的な場合や，リンクコストに相互関係がある―リンクコスト関数がそのリンクの交通量だけの関数ではなく他のリンクの交通量にも依存する―場合にも先に述べた限界費用原理が成立する[1),2)]ことが確かめられている．②については，種類の異なった交通流―たとえばバスとトラックと乗用車―が同一リンク上に流れる場合には限界費用原理が成立しない[3),4)]ことが確かめられている．③は，経済学でいうところの「次善の問題」である．この場合，制約がさまざまであり，一般的な形で示すことが困難であるため，交通ネットワークでの研究は，ケーススタディー的なもの[5)]にとどまっている．

一方，個人行動についての仮定に関しては，限界費用原理は，決定論的な均衡理論に基づいたものである．最近では，利用者の選択行動における，種々な要因による不確定性を考慮した確率的均衡理論が研究されているにもかかわらず，これに基づいた最適混雑料金に関する研究は見当たらない．

本論文では，この確率的な利用者行動に基づいた最適混雑料金について理論的に考察する．しかし，一口に「確率的利用者行動」条件下での「最適」混雑料金といって

* 学生会員　工修　東京大学工学部土木工学科
(〒113　文京区本郷7-3-1)
** 正会員　Ph. D.　東京大学生産技術研究所助教授
(同上)

も，その対象範囲はきわめてあいまいであり，また，非常に多岐にわたる．そこで，本論文では，研究の対象とする「確率的利用者行動」および「最適」の範囲を次のように限定する．

（i）「確率的利用者行動」の結果生じる交通フローパターンは「確率的利用者均衡状態」として表現されると仮定する．「確率的利用者均衡状態」については，後で正確な定義を行うが，わかりやすいことばでいえば，『交通量に応じてその所要時間の変化するネットワークにおいて，すべての利用者が，自分が経路を変更することにより自分の認知する所要時間を改善することは，もはやできないような状態』[6]である．

（ii）「最適」の基準は，従来の理論との比較がしやすく，また，従来，交通ネットワーク配分においてシステム最適（System Optimum：以下 SO とよぶ）配分としてよく知られている総走行時間の最小化とする．したがって，短期的視点での最適化問題が対象であり，長期的視点での最適化——たとえば，将来，新たな施設を建設・整備するために歳入を最大化すること——に関する問題や，負担の公平性に関する問題などは考察の対象外である．すなわち，交通料金の機能として考えられる建設費の償還機能や財源調達機能などはここでは取り上げない．

2.　最適化問題としての定式化

本論文で考察する最適料金問題の設定状況をまとめると，以下のようになる．

① 計画者は利用者に対して各リンクごとに“料金”を課することができる．

② 利用者は各自の認知する一般化費用を最小化するように経路選択を行う．

③ 利用者の認知する一般化費用は，所要時間と“料金”の和[注1)]である．

④ 利用者の認知する一般化費用は，不完全な情報による誤差項を含んでいるため確率的に変動する．

⑤ リンク所要時間はリンク交通量に対して単調増加で凸な関数で表わされる．

⑥ 総需要（分布交通量）は固定されている．

以上の状況の下で総所要時間を最小化するような料金設定方法について以下，定式化する．

まず，基本となる変数名および変数間の関係の定義を明確にしておく．リンク交通量，リンク費用をおのおの，

$$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a,\ \cdots),\quad \boldsymbol{c}={}^t(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_a,\ \cdots)$$

ここで，各ベクトルの要素の添字はリンク番号を表わす

と書くことにし，OD ペア rs（起点 r，終点 s）の経路交通量および経路費用をおのおの，

$$\boldsymbol{f}_{rs}={}^t(f_1^{rs},\ \cdots,\ f_k^{rs},\ \cdots),\quad \boldsymbol{c}_{rs}={}^t(c_1^{rs},\ \cdots,\ c_k^{rs},\ \cdots)$$

ここで，各ベクトルの要素の上付き添字は OD ペア番号を，下付き添字はその OD ペアでの経路番号を表わす

と書くことにする．このとき，経路についての交通量 $\boldsymbol{f}$ とリンクについての交通量 $\boldsymbol{x}$ の間には次の関係があり，

$$x_a=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}\qquad(1)$$

ここで，

$$\delta_{ak}^{rs}=\begin{cases}1：リンク\ a\ が\ \mathrm{OD}\ ペア\ rs\ の第\ k\ 番目経路上にある．\\ 0：その他\end{cases}$$

経路についての一般化費用 $\boldsymbol{c}_{rs}$ とリンクについての一般化費用 $\boldsymbol{c}$ には次の関係がある．

$$c_k^{rs}=\sum_a c_a\delta_{ak}^{rs}\qquad(2)$$

次に，利用者行動およびその結果としての交通フローパターンを表現するモデルを定式化する．まず，上記の仮定②から，起点を r，終点を s とする OD ペアにおいて第 k 番目の経路が選択される確率 P_k^{rs} は，

$$P_k^{rs}=\mathrm{Prob}(C_k^{rs}\leqq C_l^{rs},\quad l\neq k)\qquad(3)$$

ここで，C_k^{rs} は第 k 経路の認知一般化費用である．仮定④より認知一般化費用 C_k^{rs} は実際の一般化費用 c_k^{rs} と誤差項の和で表わされるような確率変数であるとする．すなわち，

$$C_k^{rs}=c_k^{rs}+\xi_k^{rs}\qquad(4)$$

ここで，ξ は確率変数で，たとえば，これが互いに独立で同一の平均と分散をもったガンベル分布に従う場合は，いわゆるロジットモデルとなる．

仮定⑤については，本研究ではリンク相互の干渉はない場合を考える．すなわち，

$$c_a=c_a(x_a)\qquad(5)$$

OD ペア rs の第 k 経路の交通量 f_k^{rs} は，選択確率 P_k^{rs} と OD ペア rs の全交通量 q_{rs} によって，

$$f_k^{rs}=q_{rs}P_k^{rs}\qquad(6)$$

と表わされる．

以上の式（1）～（6）を同時に満たすネットワーク配分モデルは，決定論的な利用者均衡（User Equilibrium：以下 UE とよぶ）配分と確率的配分を整合的に統合するモデルとして Daganzo, Sheffi[6]によって提案されたモデルで，確率的利用者均衡（Stochastic User Equilibrium：以下 SUE とよぶ）配分とよばれている．

この SUE 配分は以下の制約条件なし最大化問題と等価で，唯一の解（リンクコストパターン）$\boldsymbol{c}$ をもつことが Daganzo[7]によって示されている．

注1）本研究では，“料金”は，ある単位の変換により所要時間と同一次元のものとみなし得ると仮定する．以下の議論で用いる“料金”は，すべてこの意味である．

$$\max_{c}.\ Z=\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}-\sum_{a}\int_0^{c_a}c_a^{-1}(\nu)d\nu \cdots\cdots(7)$$

ここで，$c_a^{-1}(\nu)$ は，リンクコスト関数の逆関数である．また，S_{rs} はODペアごとの最小一般化費用の期待値を表わす関数である．すなわち，

$$S_{rs}=S_{rs}[\boldsymbol{c}_{rs}]$$
$$=E[\min_k\{C_k^{rs}\}]$$

この期待最小一般化費用関数 S には種々の興味深い性質[8),9)]があるが，本論文で考える問題では，特に次の性質が重要である．

$$\partial S_{rs}/\partial c_k^{rs}=P_k^{rs} \cdots\cdots(8)$$

この最適化問題（式（7））は，簡単な変数変換によりリンクフローを未知数とする次の最適化問題として表現できる．

$$\max_{x}.\ Z=\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}-\sum_{a}x_a c_a(x_a)+\sum_{a}\int_0^{x_a}c_a(\omega)d\omega \cdots\cdots(9)$$

さて，本研究では，各リンクに適当な混雑料金 $\boldsymbol{d}$ を付加することによって，その結果生じるSUEフローパターン $\boldsymbol{x}$ の総走行時間を最小化することを考える．ここで，リンク a の一般化費用 $c_a(x_a)$ を，リンク所要時間 $t_a(x_a)$ と運営者がリンクごとに課す料金 d_a との和から成る（仮定①③）．

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{t}+\boldsymbol{d} \cdots\cdots(10)$$

ここに，

$$\boldsymbol{c}={}^t(c_1,\ \cdots,\ c_a,\ \cdots)$$
$$\boldsymbol{t}={}^t(t_1,\ \cdots,\ t_a,\ \cdots),\quad \boldsymbol{d}={}^t(d_1,\ \cdots,\ d_a,\ \cdots)$$

とすると，最適な混雑料金パターン $\boldsymbol{d}$ は，以下の二段階最適化問題(Bilevel Programming：以下BPとよぶ)を解くことにより得られることがわかる．

$$\min_{d}.\ Z_p=\sum_{a}x_a t_a(x_a) \cdots\cdots(11)$$

subject to

$$\max_{x}.\ Z_s=\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}(\boldsymbol{c})-\sum_{a}x_a c_a(x_a)+\sum_{a}\int_0^{x_a}c_a(\omega)d\omega \cdots\cdots(12)$$

この問題は一般的にいうと，「プレイヤー1（p_1）はプレイヤー2（p_2）の目的関数制約条件に関するすべての情報をもっている．一方，p_2 は，p_1 に関する情報として，p_1 が p_2 に示す戦略しかもっておらず，その戦略に対して自己の目的関数を最大化する行動をとる．このような状況で，（主導権を握っている）p_1 の最適戦略を求める」[10)]という問題であり，ゲーム理論ではStackelberg問題とよばれている．本研究の場合には，運営者（p_1）は，利用者集団（p_2）の経路選択行動が式（12）で表わされることを把握したうえで，混雑料金 $\boldsymbol{d}$ による最適戦略を求めるということになる．

Stackelberg問題は，各レベルの目的関数および制約条件が凸であれば，Inner-Outerアルゴリズムとよばれる方法[11)]や，ペナルティー法によりグローバルミニマムな解を求めることができる．特に，目的関数・制約条件が線形であれば，かなり効率的に解くことができ[12)]，交通計画の分野では，利用者均衡条件下での最適交通ネットワーク形成問題を解くために用いられた例も報告されている[13),14)]．しかし一般的なStackelberg問題のグローバルミニマムな解をみつけるアルゴリズムは残念ながら，まだ存在しない[15)]．したがって，上記のBPが凸であるかどうかを，まず調べなければならない．そのためには Z_p の $\boldsymbol{d}$ に関するヘシアンと Z_s の $\boldsymbol{x}$ に関するヘシアンがともに正定値かどうかを調べればよい．もし，そうであれば，たとえ効率的ではないにせよ，一般的な解法のアルゴリズムを用いて解くことができ，グローバルミニマムな解が求められることになる．

そこで，この問題のヘシアンを，具体的に調べてみると，Z_s のヘシアンは正定値であるが，Z_p のヘシアンについては，残念ながら，必ずしも，正定値にはならない．したがって，この問題に，特有の構造・特性を見出して，それを有効に用いてグローバルミニマムな解を探すことを考えなければならない．

3. 最適性条件

2.で述べたように，BPは，Z_p のヘシアンが正定値となるための条件がなければ，グローバルミニマムな解を求めることは困難である．そこで，まず，この条件を求めてやればよいということが考えられるが，これを具体的な式の計算により，直接求めることは，ほとんど不可能である．

ここで，少々見方を変え，最適化が達成された状態を想定し，議論を進めてみよう．BPの親問題の目的関数 Z_p の下限値がSOリンクフローパターン $\boldsymbol{x}^*$ での総走行時間であることは明らかである．したがって，もし適当な料金を課すことによってSUEリンクフローパターンを $\boldsymbol{x}^*$ に一致させることができるなら，その料金体系 $\boldsymbol{d}$ がBPのグローバルミニマムな解である．そこで，以下では，一般化費用についてのSUEと所要時間についてのSOが一致するための必要十分条件を共役・双対性理論を用いて導くことを考える．

一般的に，SUEは，式（7）に示した最適化問題と双対な関係にある次のような最適化問題として表現することができる[16),17),21),22)]．

$$\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}^{**}(\boldsymbol{c}_{rs}^{**})=\min.\left\{\sum_{a}\int_0^{x_a}c_a(\omega)d\omega-\sum_{rs}q_{rs}S_{rs}^{*}(\boldsymbol{P}_{rs})\right\} \cdots\cdots(13)$$

subject to（1），（2），（6）

ここで，S_{rs}^{*} は S_{rs} の共役関数，S_{rs}^{**} は S_{rs}^{*} の共役関

数，$\boldsymbol{P}_{rs}$ は各経路の選択確率を要素としてもつベクトル．

この最適化問題は，構造力学において変位を未知数とするか応力を未知数とするかにより表裏の関係にある2通りの表現ができることにたとえれば，直感的に理解しやすいかもしれない．実際，所要時間を変位に，選択率を応力にたとえれば，S はひずみエネルギーに対応し，S^* は補ひずみエネルギーに対応しているものと考えることができ，さらに，式（8）はカステリアノの第一定理に対応したものと考えることができる．

さて，ここで，次の関係式

$$\sum_{rs} q_{rs} S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs}) = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(\omega)d\omega - \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(\omega)d\omega \quad \cdots(14)$$

ここで $\hat{t}_a$ は次式で定義されるリンク限界所要時間

$$\hat{t}_a = t_a + x_a \frac{dt_a}{dx_a} \quad \cdots(15)$$

を条件に付加して最適化問題を解けば，SUE フローは SO フローと一致する．なぜなら，式（13）は次のように変形でき，通常の SO 問題の目的関数と一致するからである．

$$\sum_{rs} q_{rs} S^{**}_{rs}(\boldsymbol{c}^{**}) = \min_x . \sum_a \int_0^{x_a} \hat{t}_a(\omega)d\omega \quad \cdots(16)$$

$$= \min_x . \sum_a x_a t_a(x_a) \quad \cdots(17)$$

一方，SUE が達成された状態では，任意の OD ペアについて，経路選択確率 $\boldsymbol{P}_{rs}$ および経路一般化費用 $\boldsymbol{c}_{rs}$ の関係式として次式が成立している．これは，式（9）に示した S の性質と共役関数の定義より求められたものである[17]．

$$S_{rs} = \boldsymbol{P}_{rs}\boldsymbol{c}_{rs} - S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs}) \quad {}^\forall r, s \quad \cdots(18)$$

式（18）は，次式のように変形できるから

$$\sum_k P_k^{rs} S_{rs} = \boldsymbol{P}_{rs}\boldsymbol{c}_{rs} - S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs}) \quad {}^\forall r, s \quad \cdots(19)$$

この式の両辺を P_k^{rs} で偏微分することにより次式が得られる．

$$S_{rs} = c_k^{rs} - \partial S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs})/\partial P_k^{rs} \quad {}^\forall r, s, k \quad \cdots(20)$$

一般化費用についての SUE と所要時間についての SO が一致している状態を考えると，先に示した条件式（14）が成立していなければならないが，この条件は，式（14）を偏微分することにより得られる次式と等価である．

$$\partial S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs})/\partial P_k^{rs} = c_k^{rs\circ} - \hat{t}_k^{rs\circ} \quad \cdots(21)$$

ここに $\hat{t}_k^{rs}$ は，次式で定義される限界経路所要時間．

$$\hat{t}_k^{rs} = \sum_a \hat{t}_a \delta_{ak}^{rs} \quad {}^\forall k, r, s$$

上付き添字 ∘ は，SO 状態に対応した変数であることを示す．

SO 状態では，各 OD ペアについて，使用されている経路の限界経路所要時間は等しい，すなわち，

$$\hat{t}_k^{rs\circ} = \hat{t}_{rs}^\circ \quad {}^\forall k, r, s$$

であるから，式（21）は次のように表わせる．

$$\partial S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs})/\partial P_k^{rs} = c_k^{rs\circ} - \hat{t}_{rs}^\circ \quad \cdots(22)$$

よって，一般化費用についての SUE と所要時間についての SO が一致している状態では，式（20）に式（22）を代入することにより，次式が成立していることがわかる．

$$S_{rs}(\boldsymbol{t}_{rs}^\circ + \boldsymbol{e}_{rs}) = \hat{t}_{rs}^\circ \quad {}^\forall r, s \quad \cdots(23)$$

ここに $\boldsymbol{t}_{rs}$，$\boldsymbol{e}_{rs}$ は，それぞれ，OD ペア rs について次式で定義される経路所要時間，経路料金ベクトル．

$$\boldsymbol{t}_{rs} = {}^t(t_1^{rs}, \cdots, t_k^{rs}, \cdots), \quad \boldsymbol{e}_{rs} = {}^t(e_1^{rs}, \cdots, e_k^{rs}, \cdots)$$

$$t_k^{rs} = \sum_a t_a \delta_{ak}^{rs}, \quad e_k^{rs} = \sum_a d_a \delta_{ak}^{rs}$$

この式の左辺は，SO フローに対応した所要時間のもとでの期待最小（経路）一般化費用であり，右辺は SO フローに対応した限界（経路）所要時間である．この両者の値が等しいという条件は，利用者の行動が決定論的な均衡状態（UE）である場合に混雑料金を導入することによってフローを SO 状態と一致させるための条件と非常によく対応している．UE が達成された状態では，使用される経路の一般化費用はすべての経路のなかで最小のものとなっているので，SO と一致させるための条件は，その最小経路一般化費用が SO 状態での限界経路所要時間と等しくなること，すなわち，

$$\min_k \{t_k^{rs\circ} + e_k^{rs}\} = \hat{t}_{rs}^\circ \quad {}^\forall r, s \quad \cdots(24)$$

である．この左辺を期待最小費用におきなおしたものが，われわれが求めた上記の条件式（23）である．期待最小費用は，決定論的最小経路費用を確率的な場合にまで拡張したものであり，式（23）は，UE の場合の条件式（24）を確率的な場合に拡張した条件式であると考えられる．

4. 最適経路料金

この節では，前節での考察をもとに，最適経路料金をロジットベース SUE を例として実際に導く．

SO と SUE が一致した状態では式（21）が成立しているが，これを料金と所要時間に分けて書くと，

$$\partial S^*_{rs}(\boldsymbol{t}_{rs}^\circ + \boldsymbol{e}_{rs})/\partial P_k^{rs} = t_k^{rs\circ} + e_k^{rs} - \hat{t}_{rs}^\circ \quad {}^\forall r, s, k \quad \cdots(25)$$

したがって，経路料金 e は一般的に，次のように表わせる．

$$e_k^{rs} = t_k^{rs\circ} - \hat{t}_k^{rs\circ} + \partial S^*_{rs}(\boldsymbol{P}_{rs}^\circ)/\partial P_k^{rs} \quad {}^\forall r, s, k \quad \cdots(26)$$

この式中の $\boldsymbol{P}_{rs}^\circ$，$\hat{t}_k^{rs\circ}$，$t_k^{rs\circ}$，$S^*_{rs}(P_k^{rs\circ})$ は SO 状態における経路交通量，経路所要時間からすべて知ることができる既知変数であり，経路料金 e_k^{rs} が未知変数である．一般には，この共役関数 S° を $\boldsymbol{P}$ の関数として陽に表わすことができないため，最適経路料金を明示的に表現することはできないが，ロジットモデルに限れば，経路料

金を明示的に表現できる．以下では，これを示す．

ロジットモデルの場合，最適経路料金を求める方法としては，①選択確率式；

$$P_k^{rs}=\exp(-\theta c_k^{rs})/\sum_m \exp(-\theta c_m^{rs}) \quad \forall r,s,k \quad \cdots\cdots(27)$$

と最適条件式（23）を組み合わせて求める方法，②S^*を求め，それを式（26）に代入して求める方法のどちらでも可能であるが，ここでは，後者により求めることにする．

ロジットモデルでは，期待最小費用関数は，

$$S_{rs}(c_{rs})=-\frac{1}{\theta}\ln\sum_k \exp(-\theta c_k^{rs}) \quad \forall r,s \cdots\cdots(28)$$

ここに，θ は認知費用 C の確率的変動の大きさを表わすパラメーター

であるから，その共役関数 S_{rs}^* は次式のようになる．

$$S_{rs}^*(P_{rs})=-\frac{1}{\theta}\sum_k P_k^{rs}\ln P_k^{rs} \quad \forall r,s \cdots\cdots(29)$$

これを，式（26）に代入すれば，以下のような最適経路料金の式を得ることができる．

$$e_k^{rs}=\hat{t}_k^{rs_0}-t_k^{rs_0}+\frac{1}{\theta}\{\ln(1/P_k^{rs_0})-1\} \quad \forall k,r,s \quad \cdots\cdots(30)$$

この式において，第1，2項は決定論的な利用者均衡（UE）の場合の混雑料金と同じ限界所要時間項であり，$1/\theta$ でくくられた第3項は確率的選択によって生じる付加項である．これを解釈してみると，SOフローにおいて使用される確率の低い経路――つまり，SOフローを達成するために，あまり使われて欲しくない経路――には付加項の値が大きくなり，高い料金が課せられることになる．これは直感的にもうなづける結果といえる．また式（30）は，$\theta\to\infty$にする――これは認知費用の確率的変動のばらつきの大きさを0にすることと同じであり，利用者行動が決定論的な利用者均衡に従うとすることになる――と，限界所要時間項のみが残り，従来の混雑料金理論（限界費用原理）の一般化式になっていることがわかる．

5. 最適リンク料金

前節で求められた最適経路料金の式（30）において，経路選択確率 $\boldsymbol{P}$ の値はランダム効用モデルの性質により0とはならないので，式（30）は理論上は有限の値であるが，実際には，使われる確率が0に近い経路では，その経路の最適料金は無限大に近づいてしまう．また，SO状態はリンクフローパターンについては唯一に決まるが，経路フローパターン $\boldsymbol{P}^o$ については唯一ではない．これらのことを考えあわせると，最適経路料金 $\boldsymbol{e}^o$ と整合的な最適リンク料金 $\boldsymbol{d}^o$ を設定することが可能かどうか，また，それは唯一に決めることができるかどうかという疑問が生じる．そこで，この節では，最適リンク料金 $\boldsymbol{d}^o$ の存在と唯一性について考察する．

考察の手順として，まず，リンク交通量 $\boldsymbol{x}$ と経路交通量 $\boldsymbol{f}$ の関係（R_1），経路料金 $\boldsymbol{e}$ とリンク料金 $\boldsymbol{d}$ の関係（R_2）を，それぞれ独立に考える．次に，最適経路料金 $\boldsymbol{e}^o$ とSO経路交通量 $\boldsymbol{f}^o$ に成立している関係式（式（27））によって，R_1 と R_2 を組み合わせ，最終的に，$\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{x}$ の関係を導くことにする．また，以下では，議論の展開をわかりやすくするためにODペアの区別をせずに経路を通し番号にし，その全経路数を K とし，全リンク数を L，ODノードを除いた全ノード（フロー保存則の成立しているノード）の個数を N と表わす．ただし，$K\geqq L\geqq N$（実際的なネットワークでは，普通は，この条件は満たされている）として議論する．SUEモデルとしては，認知一般化費用の確率的変動項（誤差項）の分布は経路ごとに独立であると仮定した場合（たとえば，ロジットモデル）について考察する．

まず，リンク交通量 $\boldsymbol{x}$ が与えられたときに，この $\boldsymbol{x}$ によって経路交通量 $\boldsymbol{f}$ を表わすことを，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{f}$ との間に成立している次の関係式をもとに考えてみよう．

$$\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{f} \cdots\cdots(31)$$

ここに，Δ は δ_{ak} を a 行 k 列要素とする $L\times K$ 行列

Incidence Matrix Δ は，δ_{ak} の定義と各ノードでリンク交通量保存則が成立していることを考えれば，明らかに階数が $L-N$ の行列であるから，適当な $L\times L$ 行列 P, $K\times K$ 行列 Q により，次のような行列に変形できる．

$$A\equiv P\Delta Q=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L-N \\ N \end{array} \\ \scriptstyle L-N \quad K-(L-N) \end{array} \cdots\cdots(32)$$

ここに，E_r は $(L-N)\times(L-N)$ の単位行列

式（31）の両辺に左から P を掛けて次の式を得る．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=A\tilde{\boldsymbol{f}} \cdots\cdots(33)$$

ここに，

$$\tilde{\boldsymbol{x}}\equiv P\boldsymbol{x} \cdots\cdots(34)$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}\equiv Q^{-1}\boldsymbol{f} \cdots\cdots(35)$$

式（33），（34）より $\tilde{\boldsymbol{f}}$ の要素のうち $L-N$ 個は $(x_1, \cdots, x_{L-N})$ により決まり，残りの $K-(L-N)$ 個は $\boldsymbol{x}$ によらない任意の定数となることがわかる．そして，式（35）より，

$$\boldsymbol{f}=Q\tilde{\boldsymbol{f}} \cdots\cdots(36)$$

であるから，Q の性質を考慮すれば，$\boldsymbol{f}$ の要素のうち $L-N$ 個は $(x_1, \cdots, x_{L-N})$ により決まり，残りの $K-(L-N)$ 個は $\boldsymbol{x}$ によらない任意の変数 λ となることがわかる．

$$f=\begin{bmatrix} f_1(x,\lambda) \\ \vdots \\ f_{L-N}(x,\lambda) \\ \hdashline \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{K-(L-N)} \end{bmatrix} \cdots\cdots(37)$$

一方，経路料金 $\boldsymbol{e}$ とリンク料金 $\boldsymbol{d}$ との間には次の関係式が成立している．

$$\boldsymbol{e}={}^t\Delta\boldsymbol{d} \cdots\cdots(38)$$

式（38）の両辺に左から ${}^tQ$ を掛けて次の式を得る．

$$\tilde{e}={}^tA\tilde{\boldsymbol{d}} \cdots\cdots(39)$$

ここに，

$$\tilde{e}\equiv{}^tQ\boldsymbol{e} \cdots\cdots(40)$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}}\equiv({}^tP)^{-1}\boldsymbol{d} \cdots\cdots(41)$$

式（39），（40）より $\tilde{\boldsymbol{d}}$ の要素のうち $L-N$ 個は（e_1, $\cdots$, e_{L-N}）により決まり，N 個は $\boldsymbol{e}$ によらない任意の変数となることがわかる．そして，式（41）より，

$$\boldsymbol{d}=P\tilde{\boldsymbol{d}} \cdots\cdots(42)$$

であるから，$\boldsymbol{d}$ の要素のうち $L-N$ 個は（e_1, $\cdots$, e_{L-N}）により決まり，N 個は $\boldsymbol{e}$ によらない任意の定数 μ となる．

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_1(e_1,\cdots,e_{L-N},\mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(e_1,\cdots,e_{L-N},\mu) \\ \hdashline \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \cdots\cdots(43)$$

ただし，$\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{e}$ の関係に矛盾が起こらないためには，式（39）のうちの次のような $K-(L-N)$ 個の恒等式

$$\tilde{e}_k=0 \qquad (k=L-N+1,\cdots,K) \cdots\cdots(44)$$

に対応して，$\boldsymbol{e}$ の要素内で，次の関係式が成立していなければならない．

$$\sum_{j=1}^{K} Q_{kj}e_j=0 \qquad (k=L-N+1,\cdots,K) \cdots\cdots(45)$$

最適経路料金 $\boldsymbol{e}^\circ$ と SO 経路交通量 $\boldsymbol{f}^\circ$ との間には式（27）で与えられる関係があるから，認知費用の誤差項の分布が経路ごとに独立であると仮定した場合には，$\boldsymbol{f}^\circ$ から $\boldsymbol{e}^\circ$ への写像関係は，各経路ごとに独立した写像関係がある．

$$e_k=\Psi_k[f_k(x,\lambda)]$$

したがって最適経路料金 $\boldsymbol{e}^\circ$ は，一般的に，次のように書ける．

$$\boldsymbol{e}^\circ=\begin{bmatrix} \Psi_1[f_1(x,\lambda)] \\ \vdots \\ \Psi_{L-N}[f_{L-N}(x,\lambda)] \\ \hdashline \Psi_{L-N+1}[\lambda_1] \\ \vdots \\ \Psi_K[\lambda_{K-(L-N)}] \end{bmatrix} \cdots\cdots(46)$$

式（43）と式（46）から，最適リンク料金 $\boldsymbol{d}^\circ$ の N 個の要素は $\boldsymbol{x}^\circ$ に依存しない任意の定数 μ となり，残りの $L-N$ 個の要素は $\boldsymbol{x}^\circ$, λ, μ の関数となる．

$$\boldsymbol{d}^\circ=\begin{bmatrix} d_1(x^\circ,\lambda,\mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(x^\circ,\lambda,\mu) \\ \hdashline \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \cdots\cdots(47)$$

また，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ の間に式（27）で表わされる関係がある場合には，Ψ が $\boldsymbol{f}$ から $\boldsymbol{e}$ への一対一写像であることと式（45）とから，λ_1, $\cdots$, $\lambda_{K-(L-N)}$ は任意の値でよい変数ではなく，$\boldsymbol{x}^\circ$ に対して一意的に決まる変数となる．

結局，最適リンク料金 $\boldsymbol{d}^\circ$ は，以下に示すように N 個の要素は $\boldsymbol{x}^\circ$ に依存しない任意の定数 μ となり，残りの $L-N$ 個の要素は SO リンク交通量 $\boldsymbol{x}^\circ$ と μ に対して一意的に決まることになる．

$$\boldsymbol{d}^\circ=\begin{bmatrix} d_1(x^\circ,\mu) \\ \vdots \\ d_{L-N}(x^\circ,\mu) \\ \hdashline \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \cdots\cdots(48)$$

以上の結果をまとめてみよう．L 個の要素をもつ SO 状態のリンクフローベクトル $\boldsymbol{x}^\circ$ が与えられたとき，まず，K 個の要素をもつ経路フローベクトル $\boldsymbol{f}^\circ$ は式（37）より決定される．この式中には，$K-(L-N)$ 個の任意変数 λ_1, $\cdots$, $\lambda_{K-(L-N)}$ が含まれているが，整合的なリンク料金が存在するための条件式（45）より決定できる．すなわち，ロジットモデルを用いた場合には，K 個の経路フローは一意的に決定される．経路フローが決まれば，同時に式（30）より，K 個の要素をもつ経路料金ベクトル $\boldsymbol{e}$ が求められる．経路料金ベクトルからリンク料金ベクトル $\boldsymbol{d}$ を求めるには，$L-N$ 個の独立な両者の関係式（47）より，$\boldsymbol{d}$ の中の N 個の要素 μ を決定してやれば残りの要素が一意的に決まることになるのである．本研究の問題設定上からは，ベクトル μ は，全く任意に決められるものであり，$\boldsymbol{d}$ は N 次元の自由度をもっているといえる．この N 個の要素は，種々な実用上の制約条件によって決められる性質のものであろう．たとえば，リンクごとに料金を設定するのではなく，ゾーンごとに料金の設定をしたいという場合に応用することができる．すなわち，ゾーン料金制は，各ゾーン内でのリンク料金間にいくつかの関係式があるという条件が加わった最適リンク料金設定問題と考えることができるから，その条件式が N 個までであるようなゾーン分割がなされていれば，SO リンクフローパターン $\boldsymbol{x}^\circ$ を

実現することが可能であることがわかる．

6. 簡単なネットワークへの理論の適用

この節では，簡単なネットワークの例を考え，前節で得られた一般的ネットワークに対する最適料金の一般解を具体的な計算により確かめる．

Fig. 1 に示すような，OD ペアが 1 つで，経路数：$K=6$，リンク数：$L=5$，OD ペアを除くノード数：$N=1$ のネットワークを考えてみよう．

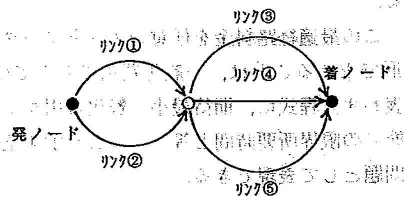

Fig. 1 Example Network.

このネットワークの Incidence Matrix Δ は，

$$\Delta=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

経路 1：①→③
経路 2：①→④
経路 3：①→⑤
経路 4：②→③
経路 5：②→④
経路 6：②→⑤

この行列は，適当な基本変形操作のみで，次のような行列に変形でき，その階数は $L-N=4$ である．

$$A=P\Delta Q=\left[\begin{array}{cccc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} L-N\\ \} N\end{array}$$

ここに，P は行に関する基本変形を表わす 5×5 行列，Q は列に関する基本変形を表わす 6×6 行列

以下では，P, Q の例として，次のような行列を考える．

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\-1&-1&1&1&1\end{bmatrix}\quad Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&-1&-1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

この P, Q を用いれば，前節での議論により，経路交通量 $\boldsymbol{f}$ はリンク交通量 $\boldsymbol{x}$ を用いて以下のように表わすことができる．

$$\begin{aligned}f_1&=x_1-x_4-x_5+(\lambda_1+\lambda_2)\\f_2&=x_4-\lambda_1\\f_3&=x_5-\lambda_2\\f_4&=x_2-(\lambda_1+\lambda_2)\\f_5&=\lambda_1\\f_6&=\lambda_2\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(49)$$

同様に，リンク料金 $\boldsymbol{d}$ は経路料金 $\boldsymbol{e}$ を用いて次のように表わすことができる．

$$\begin{aligned}d_1&=e_1-\mu\\d_2&=e_4-\mu\\d_3&=\mu\\d_4&=-e_1+e_2+\mu\\d_5&=-e_1+e_3+\mu\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(50)$$

最適経路料金は，ロジットベース SUE を仮定した場合，前節で得られた結果から，次の式で与えられる．

$$e_k=\hat{t}_k-t_k+(1/\theta)\ln(q/f_k)\cdots\cdots(51)\qquad k=1,\ \cdots,\ 6$$

ここに，q は OD 交通量である．これを，リンク料金に分解し，次のように表わすことにすると，

$$d_a=x_a(d\bar{t}_a/dx_a)+(1/\theta)\alpha_a\cdots\cdots(52)\qquad a=1,\ \cdots,\ 5$$

最適リンク料金 $\boldsymbol{d}$ の確率的付加項 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_5)$ は，式 (49)～(52) によって次のようになる．

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\ln q-\ln\{x_1-x_4-x_5+(\lambda_1+\lambda_2)\}-\mu\\\alpha_2&=\ln q-\ln\{x_2+(\lambda_1+\lambda_2)\}-\mu\\\alpha_3&=\mu\\\alpha_4&=\ln\{x_1-x_4-x_5+(\lambda_1+\lambda_2)\}-\ln(x_4-\lambda_1)+\mu\\\alpha_5&=\ln\{x_1-x_4-x_5+(\lambda_1+\lambda_2)\}-\ln(x_5-\lambda_2)+\mu\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(53)$$

一方，リンク料金が存在するためには，前節の式 (45) に対応して，経路料金は次の関係式を満たさなければならない．

$$\begin{cases}e_1-e_2-e_4+e_5=0\\e_1-e_3-e_4+e_6=0\end{cases}\qquad\cdots\cdots(54)$$

これに，式 (49)，(51) を代入し，(λ_1,λ_2) について解くと，

$$\lambda_1=\frac{x_2x_4}{x_1+x_2},\quad\lambda_2=\frac{x_2x_5}{x_1+x_2}\cdots\cdots(55)$$

となり，(λ_1,λ_2) は，$\boldsymbol{x}$ により決められる．

結局，式 (52)，(53)，(55) に SO 状態でのリンクフロー，限界所要時間の値を代入してやれば SUE に対する最適料金が求められることになる．

次に，ここまでで求められた最適料金の式を具体的な数値計算により確認してみよう．まず，OD 交通量 q は，ある適当な単位で計って 1 単位であるとする．すなわち，

$$q=x_1+x_2=x_3+x_4+x_5=1$$

また，各リンクの所要時間は，次式で表わされるとし，

$$t_i=a_ix_i^4+b_i$$

各リンクでのパラメーター a, b の値は Table 1（左側）のとおりであるとする．

この条件のもとで，SO 状態を計算すると Table 1（右側）のようになり，その総走行時間は 1.793 となる．

Table 1 Link cost function parameters and system optimum assignment.

リンク番号	パラメータ ai	bi	システム最適状態 交通量	所要時間	限界時間
1	5.0	0.6	0.4950	0.900	2.101
2	4.0	0.8	0.5050	1.060	2.101
3	8.0	0.5	0.3647	0.641	1.207
4	7.0	0.7	0.3470	0.801	1.207
5	6.0	1.0	0.2883	1.041	1.207

ここで得られた，SO 状態でのフロー，限界所要時間，所要時間を式 (52)，(53)，(55) に代入し，UE，SUE それぞれに対する最適リンク料金を計算したものが Table 2 である．ただし，SUE に対するリンク 3 の料金 μ は任意の値でよく，ここでは $\mu=1.0$ としてある．また，SUE モデルとしては，ロジットモデルを用い，パラメーター θ の値は 5.0 とした．

この料金を付加せずに，UE 状態，SUE 状態を計算すると Table 3 のようになり，総走行時間は SO 状態のときよりも大きな値となっている．

次に，Table 2 に示した料金を各リンクに付加し，その一般化費用での UE，SUE 状態をそれぞれ計算すると，ともに，フローパターンが SO 状態と一致し，総走行時間（=1.793）が最小化されることが確かめられる．これは，μ の値を変えても同様であり，たとえば $\mu=0.0$ として計算した最適リンク料金を付加した場合にも

Table 2 Optimal link toll.

リンク番号 a	UEに対する最適料金 $x_a \dfrac{dt_a}{dx_a}$	確率的付加項 $\dfrac{1}{\theta}\alpha_a$	SUEに対する最適料金 d_a
1	1.201	-0.658	0.543
2	1.041	-0.662	0.379
3	0.566	1.000	1.566
4	0.406	1.010	1.416
5	0.166	1.047	1.213

Table 3 UE assignment/SUE assignment.

リンク番号	利用者均衡 交通量	所要時間	確率的利用者均衡 交通量	所要時間
1	0.5302	0.995	0.5257	0.982
2	0.4698	0.995	0.4743	1.002
3	0.5000	1.000	0.4460	0.817
4	0.4550	1.000	0.3813	0.848
5	0.0450	1.000	0.1727	1.005
総時間	1．995		1．853	

フローパターンは SO 状態と一致し，総走行時間は最小化される．

7. 結　　論

本研究で得られた結果をまとめると，以下のとおりである．

（1） 確率的利用者均衡条件下においても適当な経路料金を設定することにより，任意のネットワークにおいて通常のシステム最適フローパターンに一致させることができる．

（2） この最適経路料金を任意のネットワークに適用可能な形で求めることは，一般化費用のもとでの SUE 状態を表わす方程式に，期待最小一般化費用がシステム最適状態での限界所要時間と等しいことを示す条件を付加した問題として表現できる．

（3） この最適料金は，ロジットベース SUE では，従来の決定論的な理論に基づく限界費用原理を包括する一般化式（式 (30)）により表現することができる．これは，限界所要時間に関する項と期待最小費用関数の共役関数を用いた確率的な項との和の形である．

（4） ロジットベース SUE では，ノード数のリンクに任意の料金を設定すれば，残りのリンクの最適リンク料金は唯一に決まる．

8. 今後の課題

本研究では，一般的な交通ネットワークにおける混雑料金制を確率的な利用者均衡理論に基づいて考察した．今後の理論的な課題としては，次のようなものが挙げられる．

① 利用者の行動が確率的で，かつ，OD 需要が費用に関して弾力的変化をする場合の最適料金問題．

② 利用者の行動が確率的で，かつ，リンク間の相互干渉がある場合の最適料金問題．

③ 利用者の行動が確率的で，かつ，種類の異なった複数の交通流が流れている場合の最適料金問題．

④ 制度面での不完全性を考慮した「次善の問題」に関する一般理論の研究．

また，理論を実際に適用するうえでの種々の問題についての検討も，本研究では考察範囲の外のこととしたが，今後の重要な課題である．たとえば，料金の自動徴収の可能性については，香港で実用化されたエレクトロニックロードプライシングシステム[18),19)]をみても明らかなように技術的には可能であるが，リンクごとに料金を課した場合に，利用者がどの程度認知するか，また，リンク料金制システムとゾーン料金制システムとの得失等のソフト面については，まだ未知の要素が多く，その方面についての研究も一考の価値があるであろう．

参 考 文 献

1) Gartner, G. H. : Optimal Traffic Assignment with Elastic Demands : A Review Part 1. Analysis Flamework, Transptn. Sci. 14, No. 2, pp. 174～191, 1980.

2) Smith, M. J. : The Marginal Cost Taxation of a Transportation Network, Transptn. Res. 13 B, pp. 237～242, 1979.

3) Netter, M. : Equilibrium and Maginal Cost Pricing on a Road Network with Several Traffic Flow Types, Proc. of the 5 th Int. Symp. on the theory of traffic flow and transportation, pp. 155～163, 1971.

4) Dafermos, S. C. : Toll Patterns for Multi-class-User Transportation Network, Trans. Sci. 7, pp. 211～223, 1973.

5) Borins, S. F. : The Effect of Non-Optimal Pricing and Investment Policies for Transportation Facilities, Transptn. Res. 16 B, No. 1, pp. 17～29, 1982.

6) Sheffi, Y. and Daganzo, C. F. : On Stochastic Models of Traffic Assignment, Transptn. Sci. 11, pp. 253～274, 1977.

7) Daganzo, C. F. : Unconstrained Extremal Formulation of Some Transportation Equilibrium Problems, Transptn. Sci. 16, No. 3, pp. 332～360, 1982.

8) Williams, H. C. W. L. : On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit, Environment and Planning A 9, pp. 285～344, 1977.

9) Daganzo, C. F. : Multinomial Probit : The theory and its application to demand forcasting, Academic Press, New York, 1979.

10) 志水清孝：Stackelberg 計画法（2レベル計画法），多目的と競争の理論，共立出版，pp. 210～228，1979.

11) Fisk, C. S. : Optimal Signal Controls on Congested Networks, Proc. of the 9 th Int. Symp. on Transp. and Traffic Theory, pp. 197～216, 1984.

12) Bard, J. F. : An Efficient Point Algorithm for a Linear Two-Stage Optimization Problem, Operations Res. 31, pp. 670～684, 1983.

13) Leblanc, L. J. and Boyce, D. E. : A Bilevel Programming Algorithm for Exact Solution of the Network Design Problem with User Optimal Flows, Transptn. Res. 20 B, No. 3, pp. 259～265, 1986.

14) 朝倉康夫：利用者均衡条件により制約された最適ネットワーク形成問題の解法，土木計画学研究講演集，No. 9，pp. 417～423，1986.

15) Bard, J. F. : An Algorithm for Solving the General Bilevel Programming Problem, Mathematics of Operations Res. 8, No. 2, pp. 260～272, 1983.

16) Fisk, C. : Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment Methodology, Transptn. Res. 14 B, pp. 243～255, 1980.

17) 宮城俊彦・小川俊之：共役性理論を基礎とした交通配分モデルについて，土木計画学研究講演集，No. 7，pp. 301～308，1985.

18) 太田勝敏：香港のエレクトロニック・ロードプライシング・システム，交通工学，Vol. 21，No. 2，pp. 26～29，1986.

19) Dawson, J. A. L. and Brown, F. N. : Electronic Road Pricing in Hong-Kong, Traffic Engineering and Control, Nov. 1985.

20) 田村担之編：大規模システム――モデリング・制御・意志決定，昭晃堂，1986.

21) 宮城俊彦：交通均衡モデル：理論と計算，土木計画学研究・論文集，No. 2，pp. 13～28，1985.

22) 宮城俊彦・加藤　晃：ランダム効用理論を基礎とした交通統合モデル，土木計画学研究・論文集，No. 1，pp. 99～106，1984.

23) Beckmann, M. J and Kapur, K. : Duality and Transportation Analysis, Transptn. Res. 6, pp. 225～236, 1971.

24) Fukushima, M. : On the Dual Approach to the Traffic Assignment Problem, Transptn. Res. 18 B, pp. 235～245, 1983.

25) 今野　浩・山下　浩：非線形計画法，日科技連出版，pp. 79～106，1978.

（1987. 6. 18・受付）