

# 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説

桑原雅夫

本稿は、渋滞対策として注目されている時間平滑化に関する基礎理論、すなわち道路交通における出発時刻選択に関するこれまでの理論的な成果を解説するものである。まず、明確な時間的な制約のある通勤交通を対象に 1960 年代後半から始められた単一ボトルネックにおける研究をレビューする。さらに、単一ボトルネック分析が、複数ボトルネックネットワークにおける分析、費用関数に個人差がある場合の分析、ランダム効用理論の適用等へと発展していった経緯についても簡単に紹介する。

キーワード TDM、時間平滑化、出発時刻選択、ボトルネック、待ち行列

## 1. はじめに

本稿は、道路交通における出発時刻選択に関する研究のこれまでの理論的な成果を解説するものである。社会問題である交通渋滞対策として、現存する道路インフラを効率的に利用する施策が望まれており、その 1 つとして集中する交通需要を時間的に平滑化する TDM 施策が重要であると認識されている。例えば、フレックスタイム制やロードプライシングの効果、導入可能性などが盛んに議論されつつある。需要をこの様に平滑化することはトリップの出発時刻を変化させようとするもので、道路交通における出発時刻選択に関する研究は 1960 年代後半から始められており、今後の研究のためにはこれまでの蓄積を理解しておくことが必要である。この様な背景から、本解説では出発時刻選択に関する理論的な研究をレビューして紹介する。

出発時刻選択に関する研究は、明確な時間的な制約のある通勤交通を対象に 1960 年代後半から Vickrey (1969)、Henderson (1974) などの経済学者によって始められた。旅行費用として、混雑による費用と勤務開始時刻と実際の到着時刻のズレ

による費用(スケジュール費用)を考慮しながら、通勤者の出発時刻を決定するという分析で、彼らはこの出発時刻選択問題を通して時間的に変動する有料料金制度について分析を行っている。交通分野では、これに類似した研究として 1980 年代はじめから、単一のボトルネックにおける待ち時間による費用とスケジュール費用を考慮した決定論的待行列理論を用いた分析が、Hurdle (1974, 1981)、Hendrickson et al. (1981a, 1981b, 1984)、Fargier (1981)、Smith (1981)、Daganzo (1984) 等によって行われ、費用関数による解の特性、解の存在・唯一性などの理論的基礎が固められていった。その後、この単一ボトルネックにおける分析は、複数ボトルネックネットワークにおける分析 (Kuwahara et al. (1987), Arnott et al. (1993))、費用関数に個人差がある場合への拡張 (Newell (1985))、ランダム効用理論の適用 (De Palma et al. (1983), Ben Akiva et al. (1984, 1986), Mahmassani et al. (1986)) 等へと発展していった。

本稿では、単一ボトルネックにおける基礎理論を中心に解説し、その後上記のモデル拡張について簡単に解説する。

## 2. 単一ボトルネックにおける出発時刻選択

### 2.1. 問題の概要

最も単純なネットワーク形状として、図1で示されるように勤務地に通じる1本の道路があり、その道路上にボトルネックが1ヶ所存在しているネットワークを考える。考慮する全ての利用者は、このボトルネックを通過して勤務地に通勤していると仮定する。この単一ボトルネックにおいて、図2のような3種類の累積分布を定義することができる。

$A(t)$  = 時刻  $t$  迄にボトルネックに流入したトリップ数

$D(t)$  = 時刻  $t$  迄にボトルネックを流出したトリップ数

$W(t)$  = 時刻  $t$  迄に勤務地への希望到着時刻を持つトリップ数 (所与)



図1. 単一ボトルネックを持つネットワーク

Cumulative Trips

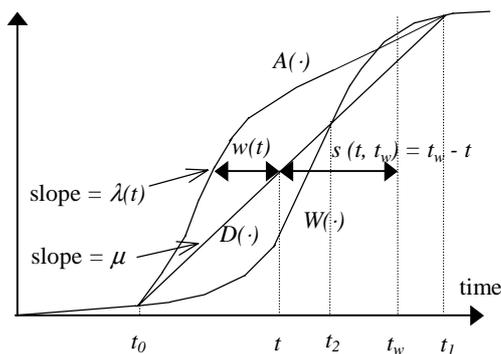


図2. 単一ボトルネックでの累積分布

$D(t)$ はボトルネックのサービス容量によって決

まる関数であって、ボトルネックに待ち行列が存在する場合は、固定のサービス容量  $\mu$  (所与) を傾きを持つ直線であり、存在しない場合は  $A(t)$  と一致する。また、希望到着分布  $W(t)$  は与えられているものとする。

各利用者の旅行費用を次のように定義する。

$$\begin{aligned} TC\{t, t_w, x\} &= f_m\{m(x)\} + f_w\{w(t)\} + f_s\{s(t, t_w)\} \\ &= f_m\{m(x)\} + p\{t, t_w\} \end{aligned} \quad (1)$$

$t$  = ボトルネックからの流出時刻

$t_w$  = 希望到着時刻

$x = (x_1, x_2)$  = 利用者の住居位置 ( $x_1$ ) と勤務地位置 ( $x_2$ ) を表す位置ベクトル

$TC(t, t_w, x)$  = 位置ベクトル  $x$  と希望到着時刻  $t_w$  を持つ通勤者が、時刻  $t$  にボトルネックを流出した場合の旅行費用

$m(x)$  = 住居位置  $x_1$  と勤務地位置  $x_2$  間のフリーフロー移動時間 (静的)

$w(t)$  = 時刻  $t$  にボトルネックを流出した場合のボトルネックでの待ち時間

$s(t, t_w)$  = 希望到着時刻  $t_w$  を持つ利用者が時刻  $t$  にボトルネックを流出した場合のスケジュールディレイ =  $t_w - t$

$f_m\{m\}$  = 移動時間を費用に変換する関数

$f_w\{w\}$  = ボトルネックでの待ち時間を費用に変換する関数

$f_s\{s\}$  = スケジュールディレイを費用に変換する関数

$p\{t, t_w\}$  = 動的費用 =  $f_w\{w(t)\} + f_s\{s(t, t_w)\}$

希望到着時刻  $t_w$  をもつ利用者考えた場合、旅行費用  $TC\{t, t_w, x\}$  は静的な移動時間によるもの  $f_m\{m(x)\}$ 、ボトルネックでの待ち時間によるもの  $f_w\{w(t)\}$ 、スケジュールディレイ (利用者の目的地への希望到着時刻と実際の到着時刻との時間差) によるもの  $f_s\{s(t, t_w)\}$  の3つの部分から構成されている。まず移動時間  $m(x)$  であるが、ボトルネ

ック以外では全く遅れが生じないという仮定より、 $m(x)$ は住居から勤務地までの距離と静的な旅行速度によって決まるのでベクトル  $x$  のみの関数として表すことができる。従って、利用者は出発時刻をいつに決めても一定の移動時間を費やさなければならないため、この移動時間はトリップの出発時刻の選択には全く影響を及ぼさず、単一ボトルネック問題の場合には旅行費用  $TC(t, t_w, x)$  のうちの動的費用  $p(t, t_w)$  のみを考慮すればよい。静的な移動費用  $f_m(m(x))$  は、複数のボトルネックが存在して経路選択がある場合に必要な項である。

時刻  $t$  にボトルネックを流出した利用者のボトルネックでの待ち時間  $w(t)$  は、待ち行列を物理的な長さを持たない Point Queue と考え、待ち行列システムに FIFO (First In First Out) を仮定すれば、図 1 のように流出時刻のみの関数として表現できる：

$$w(t) = t - A^{-1}(D(t)) \quad (2)$$

スケジュールディレイは、移動時間が静的であるという仮定より、図 1 のように  $s(t, t_w) = t_w - t$  と表すことができる。つまり、希望到着時刻  $t_w$  を実際の勤務開始時刻からボトルネックと勤務地間の移動時間を差し引いた時刻というように考えるわけである。 $s(t, t_w)$  は正または負の値を取ることができ、 $s(t, t_w)$  が負であるということは、勤務開始時刻よりも遅れて勤務地に到着したことを示している。

この出発時刻選択問題は、希望到着時刻の分布  $W(t)$  とボトルネックのサービス容量 ( $D(t)$  の傾き  $\mu$ ) が与えられた時にボトルネックへの累積流入量  $A(t)$  を決定する問題と定義できる。なぜなら  $A(t)$  が決まれば FIFO サービスを行っているボトルネックへの到着時刻さらに住居からの出発時刻も静的な移動時間を用いて決められるからである。また別の解釈をすれば、住居からの出発時刻を決める代わりに、ボトルネックからの流出時刻を決める問題ともとらえることができる。これは FIFO サービスであるボトルネックでは流出時刻が決まれば流入時刻が決まり、流入時刻から静的な移動時間を引けば住居からの出発時刻も決まるからで

ある。単一ボトルネック問題では、分析の容易さのため、住居からの出発時刻に代わってボトルネックからの流出時刻  $t$  を決定する問題としてとらえて以下解説を行う。

## 2.2. 時間的均衡条件

利用者は自分の旅行費用が最小になるようにボトルネックからの流出時刻  $t$  を選択するという仮定にもとづけば、最適な流出時刻  $t$  は次の条件を満足する。

$$\frac{\partial TC(t, t_w, x)}{\partial t} = \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

これに式(1)を代入して変形すれば、次のようになる。

$$\frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t} = f_w' \{w(t)\} \cdot \frac{dw(t)}{dt} - f_s' \{s(t, t_w)\} = 0 \quad (4)$$

$$\therefore \frac{dw(t)}{dt} = \frac{f_s' \{s(t, t_w)\}}{f_w' \{w(t)\}}, \quad (5)$$

$$\text{ここに } f_w' \{w\} = \frac{df_w \{w\}}{dw}, \quad f_s' \{s\} = \frac{df_s \{s\}}{ds}$$

この結果は  $f_s(s)$  が  $s$  について連続微分可能であれば問題ないが、スケジュール費用関数によってはそうでない場合がある。典型的な例として図 3 のように  $f_s(s)$  を設定した場合には、 $s=0$  の時に微分値が不連続になる。この場合、 $s$  が 0 のプラス側（マイナス側）の近傍にある場合には、 $\partial p / \partial t$  は負（正）でなければならないので、

$$\frac{f_s' \{0_-\}}{f_w' \{w(t)\}} \leq \frac{dw(t)}{dt} \leq \frac{f_s' \{0_+\}}{f_w' \{w(t)\}} \quad (6)$$

が条件となる。

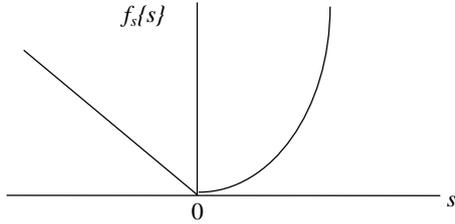


図3 スケジュール費用関数の例

式(5)は、ボトルネックでの待ち時間  $w(t)$  に関する微分方程式であり、これを解けば希望到着時刻  $t_w$  を持つ利用者にとっての時間的均衡条件を満足する  $w(t)$  は、次のようにスケジュールディレイ  $s(t, t_w)$  の関数として表すことができる。

$$w(t) = f_w^{-1} \left[ \int_{t_0}^t f'_s \{s(x, t_w)\} dx \right]. \quad (7)$$

ここに、 $t_0$  = 待ち行列発生時刻、  
 $w(t_0) = 0$

また、待ち行列が存在する時間においては、 $A(t)$  の微分値である流入レートを  $\lambda(t)$  とおけば、 $w'(t) = 1 - \mu / \lambda(t)$  の関係があるので、式(5)より流入レート  $\lambda(t)$  は次のように書くことができる。

$$\lambda(t) = \mu [1 - w'(t)]^{-1} = \mu \left[ 1 - \frac{f'_s \{s(t, t_w)\}}{f'_w \{w(t)\}} \right]^{-1} \quad (8)$$

$\lambda(t)$  = 時刻  $t - w(t)$  における流入レート (注：時刻  $t$  はボトルネック流出時刻であり、図1の様に  $\lambda(t)$  は時刻  $t$  にボトルネックを流出する利用者の流入レートを表わす。)

以上の結果から、もしもスケジュールディレイ  $s(t, t_w)$  がすべての時刻  $t$  について評価できたとすれば、式(7)より  $w(t)$  もすべての時刻  $t$  について決まるので、式(8)より流入レート  $\lambda(t)$  とその積分値である累積流入量  $A(t)$  も決定できることになる。ここで注意しなければならないことは、流入レート

は常に非負で無ければならないので、式(8)より、関数  $f_w(w)$  と  $f_s(s)$  は

$$f'_w \{w(t)\} \geq f'_s \{s(t, t_w)\}, \quad \forall t \quad (9)$$

を常に満たすような関係にある必要がある。

### 2.3 First In First Work 原則

前節の、時間的均衡条件によれば、スケジュールディレイ  $s(t, t_w)$  がすべての流出時刻  $t$  について評価できれば、 $w(t)$ 、 $A(t)$ 、 $p(t, t_w)$  などの主要変数が決定できることがわかった。このスケジュールディレイを決めるための重要な原則が First In First Work 原則で、これは、希望到着時刻の早い順にボトルネックを流出するという原則である。このFIFW原則はスケジュールコスト関数  $f_s(s)$  が  $s$  について凸であれば成立することが、次のような方法で Daganzo (1984) によって証明されている。

今2人の通勤者  $i$  と  $k$  を考え、彼らの勤務開始時刻を  $t_{wi}$  と  $t_{wk}$  とし、実際のボトルネックからの流出時刻を  $t_i$  と  $t_k$  とし、それらは次のように FIFW を満たさない関係にあるものとする：

$$t_{wi} > t_{wk} \quad \text{および} \quad t_i < t_k. \quad \text{各通勤者は、自分の費用を最小にするように流出時刻を選択するのであるから、次の関係を満たさなければならない：}$$

通勤者  $i$  :  
 $f_w \{w(t_i)\} + f_s \{t_{wi} - t_i\} \leq f_w \{w(t_k)\} + f_s \{t_{wi} - t_k\}$  ,  
 通勤者  $k$  :  
 $f_w \{w(t_k)\} + f_s \{t_{wk} - t_k\} \leq f_w \{w(t_i)\} + f_s \{t_{wk} - t_i\}$  .

この2つの条件を足し合わせると、  
 $f_s \{t_{wk} - t_i\} - f_s \{t_{wk} - t_k\} \geq f_s \{t_{wi} - t_i\} - f_s \{t_{wi} - t_k\}$   
 となるが、これを書き換えると次のようになる。

$$f_s \{z_2 + \delta\} - f_s \{z_2\} \geq f_s \{z_1 + \delta\} - f_s \{z_1\}, \quad (10)$$

ここに、 $z_2 = t_{wk} - t_k < z_1 = t_{wi} - t_k$ 、 $\delta = t_k - t_i > 0$ 。しかしながら、この条件はもしも  $f_s(s)$  が  $s$  について厳密に凸であれば、満たし得ない条件であるので厳密に凸の場合は FIFW が成立することの証明ができた。

FIFW が成り立つ場合には、 $D(t)=W(t_w)$ の関係が成り立つので、希望到着時刻とボトルネックからの流出時刻  $t$  は次のように関係づけられる。

$$t_w(t) = W^{-1}(D(t)), \text{ あるいは } t(t_w) = D^{-1}(W(t_w)) \quad (11)$$

すなわち、FIFW のもとでは、所与である  $W(t)$  に適切な待ち行列開始時刻  $t_0$  から傾き  $\mu$  をもつ  $D(t)$  を重ね合わせれば、スケジュールディレイは  $D(t)$  と  $W(t)$  の間の水平距離としてすべての流出時刻  $t$  について評価できることになる。したがって、 $s(t, t_w(t))$ 、 $p(t, t_w(t))$  も次のように流出時刻  $t$  あるいは希望到着時刻  $t_w$  のみの関数として表せることになる。

$$s(t) = s(t, t_w(t)), \text{ あるいは } s(t_w) = s(t(t_w), t_w) \quad (12)$$

$$p(t) = p(t, t_w(t)), \text{ あるいは } p(t_w) = p(t(t_w), t_w) \quad (13)$$

FIFW は、 $f_s\{s\}$  が厳密に凸であれば希望到着時刻  $t_w$  を持つ利用者は、式(11)を満足する流出時刻にときに  $p(t, t_w)$  が唯一の最小値をとることを意味している。一方、 $f_s\{s\}$  が  $s$  について線形のように厳密に凸でない場合には、式(10)の等号が成立するので、FIFW を満足しない希望到着時刻と流出時刻の関係もあることになる。つまり、各個人の費用  $p(t, t_w)$  を最小にするような流出時刻は1つに定まらないが、FIFW を満足する流出時刻も解の1つである。この意味で、線形関数の場合も含めて、 $f_s\{s\}$  が  $s$  について凸の場合には FIFW が成立するものとして解析することができる。

## 2.4. 単一ボトルネック問題の例

### (1) 希望到着時刻が一定の場合

単純なケースとして、すべての通勤者が同じ希望到着時刻  $t_w$  を持つ場合を考える。まず、図4(a)のように  $W(t)$  を時刻  $t_w$  に鉛直な直線として描き、次に適当な待ち行列開始時刻  $t_0$  から累積流出量  $D(t)$  を傾き  $\mu$  の直線として書くことができる。

はじめに、スケジュール費用関数  $f_s(s)$  と待ち行列費用  $f_w(w)$  が次のような線形関数の場合を考えよう。

$$f_s\{s\} = \begin{cases} c_1 s, & s(t) \geq 0, \\ -c_2 s, & s(t) < 0, \end{cases} \quad c_1 > 0, c_2 > 0, \quad (14)$$

$$f_w\{w\} = b w, \quad b \geq c_1 > 0. \quad (15)$$

ちなみに、Vickrey (1969), Henderson (1974), Hurdle (1974, 1981), Hendrickson et.al. (1981a, 1981b, 1984), Fargier (1981) 等の初期の研究では、いずれもこのような線形の費用関数を用いていた。

式(4)より

$$\frac{df_w\{w(t)\}}{dt} = f_s'\{s(t)\} = \begin{cases} c_1, & s(t) \geq 0, \\ -c_2, & s(t) < 0, \end{cases}$$

なので、待ち行列費用  $f_w(w)$  はスケジュール費用  $f_s(s)$  を相殺するように線形に増減する。 $f_w(w)$  も線形なので、式(8)を用いてボトルネックへの流入レートを求めれば、

$$\lambda(t) = \mu \left[ 1 - \frac{f_s'\{s(t)\}}{f_w'\{w(t)\}} \right]^{-1} = \begin{cases} \mu(1 - \frac{c_1}{b})^{-1}, & s(t) \geq 0, \\ \mu(1 + \frac{c_2}{b})^{-1}, & s(t) < 0. \end{cases} \quad (16)$$

のようになり、 $A(t)$  も2本の直線で表現できることが確認できる。また、希望到着時刻  $t_w$  を持つ者（この場合は全ての利用者）の待ち時間費用とスケジュール費用の和である  $p(t, t_w)$  は、図4(b)のように流出時刻によらず  $[t_0, t_1]$  の範囲で一定となる。

次に、スケジュール費用関数に線形ではなく以下のような非線形凸関数を考えよう：

$$\begin{cases} f'_s\{s\} \geq 0, & s(t) \geq 0, \\ f'_s\{s\} < 0, & s(t) < 0. \end{cases} \quad (17)$$

$$f''_s\{s\} = \frac{d^2 f_s\{s\}}{ds^2} > 0. \quad (18)$$

この場合には、図5のような累積図と費用の変化となる。この場合にも同様に希望到着時刻が利用

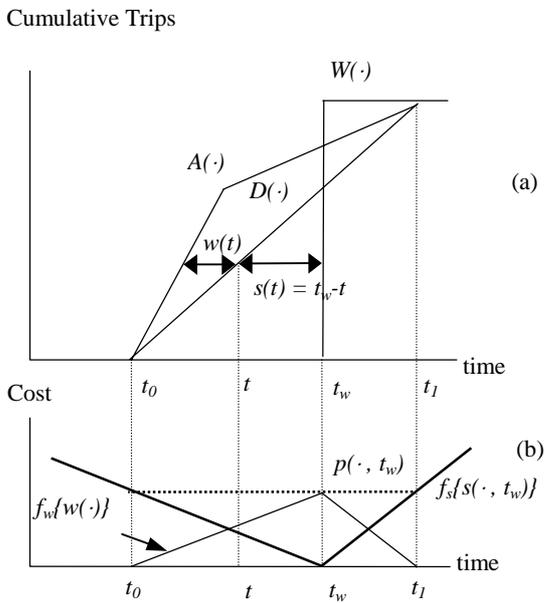


図4 希望到着時刻が一定、線形スケジュール費用関数の場合の累積図

に凸なスケジュール費用関数を用いても、 $p(t, t_w)$ は $[t_0, t_1]$ の範囲で一定となる特殊ケースである。

待ち行列開始時刻  $t_0$  の決め方であるが、待ち行者全員等しく基本的に利用者には区別がないため、 $f_w(w)$ は $f_s(s)$ を相殺するように変化するので、厳密列が終わる時刻  $t_1$  において、 $A(t_1) = D(t_1) = W(t_1)$  となるのが条件となる。すなわち、以下の条件を満たすように  $t_0$  を決める必要がある。

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) dt = \mu(t_1 - t_0) = W(t_1) - W(t_0)$$

(19)

Cumulative Trips

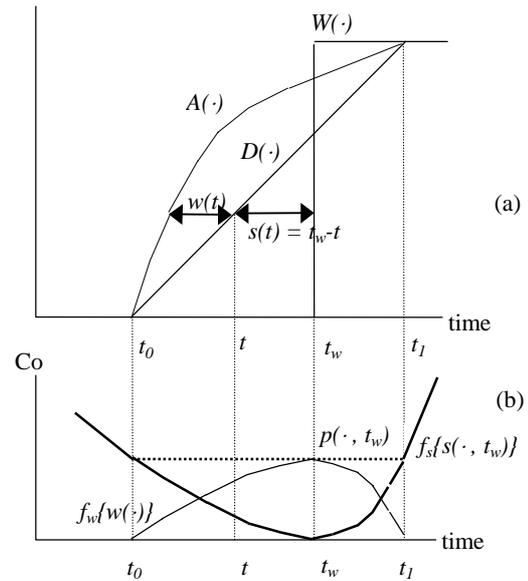


図5 希望到着時刻が一定、非線形凸なスケジュール費用関数の場合の累積図

## (2) 希望到着時刻が分布する場合

希望到着時刻が利用者によって様々な値をとり、 $W(t)$ が分布する場合を考える。まず、式(14)、(15)のように  $f_w(w)$ と  $f_s(s)$ には線形関数を用いて分析する。適当な待ち行列開始時刻  $t_0$  から  $D(t)$ を  $W(t)$ に重ね合わせると、すべての時刻  $t$  についてスケジュール遅延が評価できる。従って、ボトルネックへの流入レート  $\lambda(t)$ は同様に式(8)より式(16)と同様に与えられる。 $f_s(s)$ が線形であるために、 $\lambda(t)$ は  $s(t)$ の正負のみによって決まり、図6(a)のように  $A(t)$ は図4と同じ傾きを2本の直線で与えられる。すなわち、 $A(t)$ は希望到着時刻の分布が例えば破線の  $W'(t)$ のように変わっても変化しな

いという性質がある。

図 6 (b)は希望到着時刻  $t_w$  を持つ利用者の費用がボトルネック流出時刻  $t$  によってどの様に変化するのかを表している。 $t_0 < t < t_w$  の範囲では、線

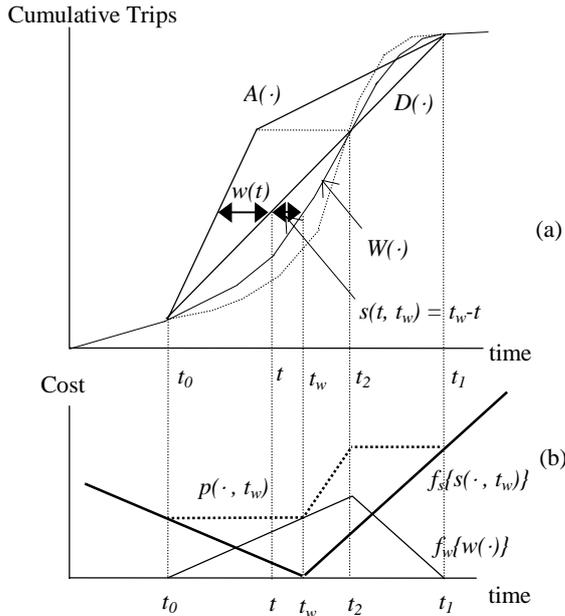


図 6 希望到着時刻が分布し、線形スケジュール費用関数の場合の累積図

形に増加するスケジュール費用は待ち時間費用に完全に相殺されるため、 $p(t, t_w)$  は一定値をとる。しかし、 $t_w < t < t_2$  では、スケジュール費用も待ち時間費用も増加するため、 $p(t, t_w)$  は急激に増加に転じる。最後に、 $t_2 < t < t_1$  においては、再びスケジュール費用と待ち時間費用が打ち消しあうために  $p(t, t_w)$  は一定となる。このように、希望到着時刻  $t_w$  をもつ利用者にとっては、流出時刻を  $t_0 < t < t_w$  の範囲のどこにとっても費用の最小値は同じである。第 2 . 3 節の FIFW の説明で述べたように、線形のスケジュール費用関数の場合には、このように FIFW を満たさない解も存在する。しかしながら、 $A(t)$  の形状は次節の唯一性の証明で述べるように唯一に決めることができる。

ここで注意しなければならないのは、この  $p(t, t_w)$  の変化は  $t_w$  をある値に固定した利用者にとっての

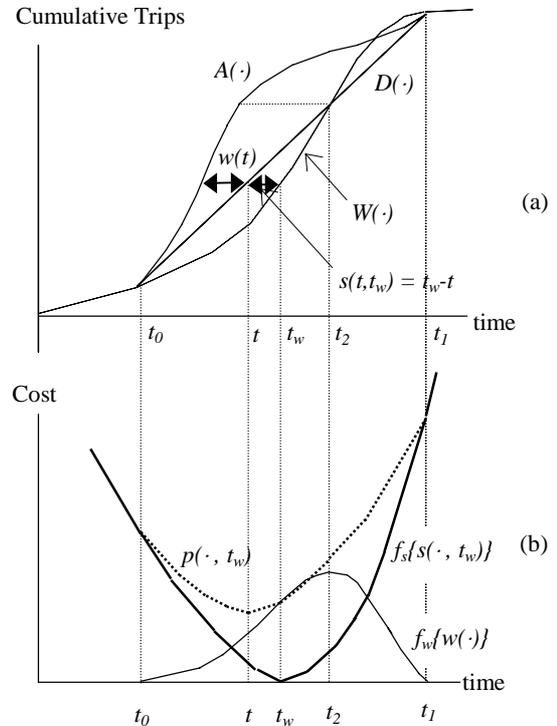


図 7 希望到着時刻が分布し、非線形凸なスケジュール費用関数の場合の累積図

費用変化であり、FIFW を満たす流入パターン  $A(t)$  上の各利用者の費用  $p(t) = p(t, t_w(t))$  の変化とは異なることである。 $p(t)$  の変化は、時間的均衡条件から次のように表すことができる。まず、ボトルネックからの流出時刻に着目して変化量を見れば、時間的均衡条件を考慮して次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, t_w(t))}{dt} &= \frac{\partial p(t, t_w(t))}{\partial t} + \frac{\partial p(t, t_w(t))}{\partial t_w} \cdot \frac{dt_w(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial p(t, t_w(t))}{\partial t_w} \cdot \frac{dt_w(t)}{dt} = f_s' \{s(t, t_w(t))\} \cdot \frac{dt_w(t)}{dt} \end{aligned} \quad (20)$$

一方、希望到着時刻  $t_w$  に着目して変化量を書けば、

$$\begin{aligned} \frac{dp(t(t_w), t_w)}{dt_w} &= \frac{\partial \lambda(t(t_w), t_w)}{\partial t_w} + \frac{\partial \lambda(t(t_w), t_w)}{\partial t} \cdot \frac{dt(t_w)}{dt_w} \\ &= \frac{\partial \lambda(t(t_w), t_w)}{\partial t_w} = \frac{\partial f_s\{s(t(t_w), t_w)\}}{\partial t_w} = f_s'\{s(t(t_w), t_w)\} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。従って、いま扱っているような典型的な例であるスケジュールディレイが正の場合（勤務開始時刻より以前に流出する場合）に  $f_s'\{s\} \geq 0$ 、スケジュールディレイが負の場合（勤務開始時刻より後に流出する場合）に  $f_s'\{s\} < 0$  となる関数  $f_s\{s\}$  ならば、次のようである。

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &\geq 0, \quad \text{if } t_w(t) - t \geq 0, \\ \frac{dp(t)}{dt} &< 0, \quad \text{if } t_w(t) - t < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

次に、厳密に凸なスケジュール費用関数の場合であるが、 $W(t)$  と  $D(t)$  の水平距離によって決まるスケジュールディレイ  $s(t)$  を用いて式(6)より  $\lambda(t)$  が同様に求められ、 $A(t)$  が図7のように決められる。図7(b)は希望到着時刻  $t_w$  を持つ利用者の費用  $p(t, t_w)$  を表しているが、この費用の変化でスケジュール費用関数が線形の場合と大きく異なることは、 $p(t, t_w)$  が最小になる流出時刻がFIFW原則を満たすように唯一に決まることである。まず、 $D(t)$  と  $W(t)$  より  $s(t)$  が求められ、式(4)より  $f_w\{w(t)\}$  が  $s(t) \geq 0$  で増加、 $s(t) < 0$  で減少するように決められる。さらに、希望到着時刻  $t_w$  の利用者のスケジュール費用  $f_s\{s(t, t_w)\}$  を描けば、図7(b)の太線ようになる。2.3節のFIFWの議論で明らかのように、その個人にとっての  $p(t, t_w) = f_w\{w(t)\} + f_s\{s(t, t_w)\}$  はFIFWを満たす流出時刻  $t = D^{-1}(W(t_w))$  で最小値を取る。

なお、この場合も均衡状態における各利用者の動的費用  $p(t)$  の変化は、式(22)のとおり希望到着時刻以前に到着する者については増加し、送れる者については減少するという変化をする。

### (3) 単一ボトルネック問題に帰着する各種ネットワーク

全ての通勤者が1本の道路上の単一のボトルネ

ックを必ず1回通過するという特殊な状況のもとで議論が進められてきたが、この単一ボトルネック問題はほかのネットワークにも応用可能である。

図8のように複数のボトルネック  $j, j=1, 2, \dots, J$  が存在し、利用者はどのボトルネックを通過するのか選択できる場合であっても、ボトルネック選択によって旅行時間費用  $f_m\{m\}$  に差がない場合は単一ボトルネック問題と考えることができる。この場合には、各ボトルネックの容量  $\mu_j$  を集約した容量  $\mu = \sum_j \mu_j$  を持つ単一ボトルネックにおいて、同様の解析をし、求められた流入レート  $\lambda(t)$  を  $\mu_j$  の比率で配分すれば各ボトルネック別の流入レート  $\lambda_j(t)$  が求められる。

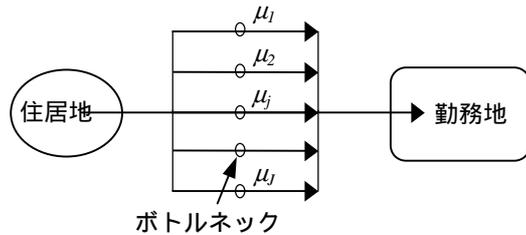


図8 集中する複数ボトルネックが存在するネットワーク

図9のような交通需要、ボトルネック容量、ネットワーク形状が対称な場合も単一ボトルネック問題に帰着する。明らかに、いずれのボトルネックの累積曲線も同じ形状をとるため、利用者は旅行時間費用が最短のボトルネックを選択する。よって、各ボトルネックにアクセスする領域はあら

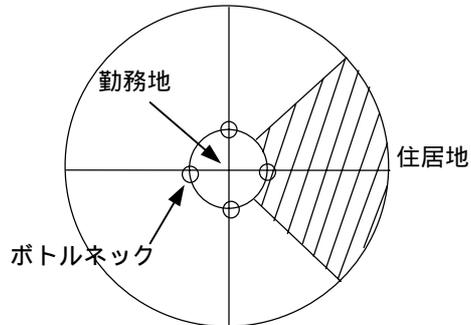


図9 交通需要、ボトルネック容量、形状が対称なネットワーク

はじめ決められた例えば図9の斜線のように固定され、その領域の交通需要に対して対応する単一ボトルネック問題を解けばよい。

### 2.5. 解の存在性と唯一性の条件

本節では、Smith(1981)、Daganzo(1984)、Kuwahara(1985)らによって証明されている、時間的均衡条件を満たす解の存在と唯一性について解説する。すなわち、 $A(t)$ 、 $D(t)$ 、 $W(t)$ の3種類の累積曲線が、待ち行列開始時刻  $t_0$  と終了時刻  $t_1$  で1点で交わるような解の存在と唯一性を証明する。

図10のように希望到着時刻分布がシングルピークを持つように与えられたとすると、傾き  $\mu$  の  $D(t)$  の  $W(t)$  への上側、下側の接線を描くことにより、待ち行列開始時刻  $t_0$  の可能範囲として、 $[t_b, t_E]$  が求められる。また、本節の証明に際して、次のような変数を待ち行列開始時刻  $t_0$  の関数として定義する：

- $p(t|t_0) = p(t)$ , 待ち行列開始時刻が  $t_0$  である場合の流出時刻  $t$  における  $p(t)$
- $s(t|t_0) = s(t)$ , 待ち行列開始時刻が  $t_0$  である場合の流出時刻  $t$  における  $s(t)$
- $t_1(t_0) = t_1$ , 待ち行列開始時刻が  $t_0$  である場合の流出時刻  $t$  における  $t_1$
- $t_2(t_0) = t_2$ , 待ち行列開始時刻が  $t_0$  である場合の流出時刻  $t$  における  $t_2$

式(21)より、

$$p(t_1(t_0)|t_0) = \int_{t_0}^{t_1(t_0)} f'_s \{s(t|t_0)\} dt$$

であるが、この積分を次のように2つの区間に分割することができる。

$$p(t_1(t_0)|t_0) = \int_{t_0}^{t_2(t_0)} f'_s \{s(t|t_0)\} dt + \int_{t_2(t_0)}^{t_1(t_0)} f'_s \{s(t|t_0)\} dt.$$

希望到着時刻分布  $W(t)$  はその傾きにシングルピークを持つ単調増加関数であるので、待ち行列開始時刻  $t_0$  を  $\Delta t_0$  だけシフトさせた場合には、次のような関係が成立する。

$$\begin{aligned} t_0 &< t_0 + \Delta t_0, \\ t_2(t_0) &> t_2(t_0 + \Delta t_0), \\ t_1(t_0) &< t_1(t_0 + \Delta t_0), \\ s(t|t_0) &> s(t|t_0 + \Delta t_0). \end{aligned}$$

また、 $f'_s(s)$  が  $s$  について凸関数であるなら、 $f'_s \{s(t|t_0)\} \geq f'_s \{s(t|t_0 + \Delta t_0)\}$  なので、

$$\begin{aligned} &p(t_1(t_0 + \Delta t_0)|t_0 + \Delta t_0) - p(t_1(t_0)|t_0) \\ &= \int_{t_0 + \Delta t_0}^{t_2(t_0 + \Delta t_0)} f'_s \{s(t|t_0 + \Delta t_0)\} dt - \int_{t_0}^{t_2(t_0)} f'_s \{s(t|t_0)\} dt \\ &\quad + \int_{t_2(t_0 + \Delta t_0)}^{t_1(t_0 + \Delta t_0)} f'_s \{s(t|t_0 + \Delta t_0)\} dt - \int_{t_2(t_0)}^{t_1(t_0)} f'_s \{s(t|t_0)\} dt < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

第1項の方が第2項よりも小さいので、最初の1, 2項の和は負であり、同様に第3, 4項の和も負である。したがって、 $p(t_1|t_0)$  は  $t_0$  に関して単調減少である。

同様に、 $t_0$  が  $t_1$  あるいは  $t_E$  と等しい場合には次が成立する：

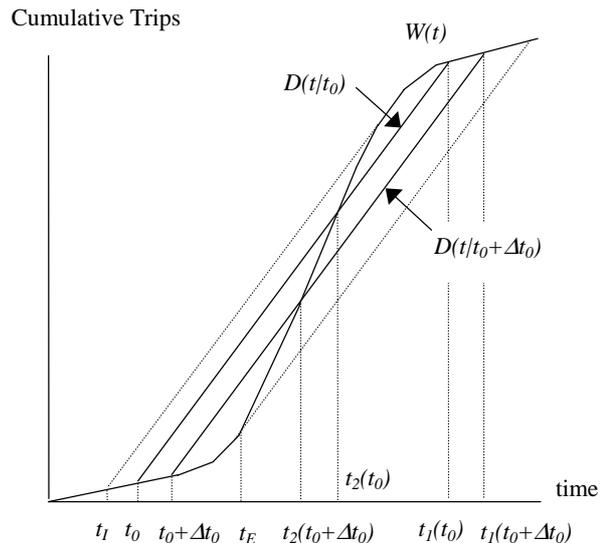


図10 待ち行列開始時刻のシフトによるスケジュールディレイの変化

$$p(t_1(t_I)|t_I) = \int_{t_I}^{t_2(t_I)} f'_s\{s(t|t_I)\}dt > 0 \quad (24)$$

$$p(t_1(t_E)|t_E) = \int_{t_E}^{t_2(t_E)} f'_s\{s(t|t_E)\}dt < 0$$

(25)

よって、 $p(t_I|t_0)=0$ となる $t_0$ は唯一 $[t_I, t_E]$ の範囲に存在することがいえる。以上より、もしも $f_s\{s\}$ が $s$ について凸関数であるなら、時間的均衡条件を満たす累積曲線 $A(t)$ 、 $D(t)$ は唯一に存在することがわかる。ここで留意すべきは、 $f_s\{s\}$ が線形の場合には累積曲線 $A(t)$ 、 $D(t)$ は唯一に求められるが、FIFWの証明で述べたように利用者の流出時刻 $t$ は唯一に求められないことである。すなわち利用者のボトルネックへの流入・流出の順番は唯一に決まらないが、 $A(t)$ と $D(t)$ の形状は唯一に決まることである。

### 3. 単一ボトルネック分析の拡張

#### (1) Many-to-One のODパターンへの拡張(経路選択の追加)

これまでの研究においては、利用者は通過するボトルネックを選択する余地がない状況での分析であった。1984年以後、前述の出発時刻選択問題に関する研究を、複数存在するボトルネックを持つネットワークに発展させようとする研究が、Kuwahara and Newell (1987)によって進められた。複数のボトルネック $j, j=1, 2, \dots, J$ において、それぞれの累積到着分布 $A_j(t)$ を求めようとするものであり、利用者の選択肢としては出発時刻の他にどのボトルネックを通過するのかという経路選択肢が追加された。

対象とするネットワークは、図11のように放射幹線道路と環状道路によって構成され、面的に広がる周辺住居地から1点に集中する勤務地に向

かう Many-to-One のODパターンを持つものである。利用者が勤務地にアクセスするためには、必ず1回いずれかのボトルネックを通過しなければならず、ボトルネックに係わる待ち時間費用とスケジュール費用、そして移動時間費用を勘案しながらボトルネック選択を行う問題である。

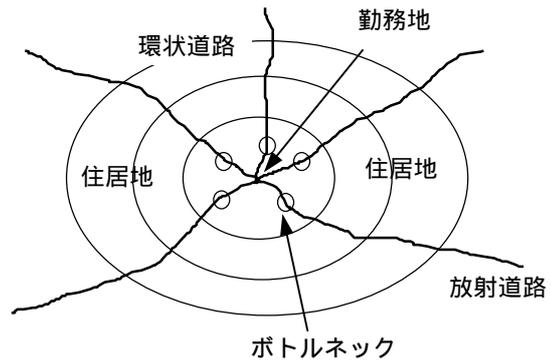


図11 複数ボトルネックが存在するネットワーク

単一ボトルネック分析と同じように、住居位置と希望到着時刻は対象とする利用者全部について所与であると仮定すれば、対象需要は図12のような3次元の空間に表すことができる。つまり、3次元空間内の点は2次元平面上の住居位置と縦軸の希望到着時刻を持つ利用者を表す。ここで、仮に3次元空間を利用者がアクセスするボトルネック別に分割することができたとすれば、分割空間ごとの希望到着時刻を集計することによって、

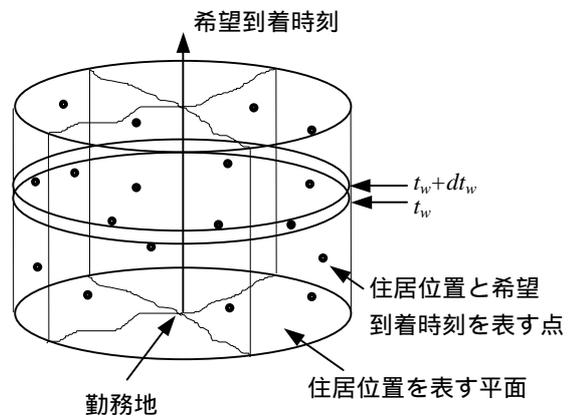


図12 3次元空間に表現された利用者の住居位置と希望到着時刻

対応するボトルネック  $j$  に関する希望到着時刻分布  $W_j(t)$  が与えられるので、各々の分割空間ごとの問題は単一のボトルネック分析に帰着させることができる。

いま、全てのボトルネック  $j$  について希望到着時刻  $t_w$  の利用者について、累積流入量  $A_j(\cdot)$ 、累積流出量  $D_j(\cdot)$ 、希望到着時刻分布  $W_j(\cdot)$  が図 1 3 の実線のように決められているとしよう。この 3 本の累積曲線によって、各ボトルネックについて希望到着時刻が  $t_w$  から  $t_w+dt_w$  までの利用者の待ち時間とスケジュールディレイを希望到着時刻  $t_w$  をリファレンスタイムにして、図中の  $w_j(t_w)$  と  $s_j(t_w)$  のように求めることができる。(単一ボトルネック問題では、リファレンスタイムをボトルネックからの流出時刻  $t$  としていたが、複数ボトルネック問題では希望到着時刻  $t_w$  をリファレンスタイムにした方が扱いやすい。) 評価された  $w_j(t_w)$  と  $s_j(t_w)$  および住居から勤務地までの静的な移動時間から、利用者はどのボトルネックにアクセスするのがよいかを決めることができる。言い換えれば、図 1 2 の 3 次元空間において時刻  $t_w$  から  $t_w+dt_w$  に含まれる点 (利用者) をアクセスするボトルネック別に分割することができ、この分割以降は、それぞ

Cumulative Trips

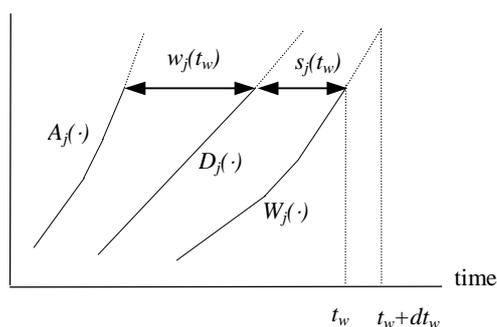


図 1 3 複数ボトルネック問題における累積曲線の延長

れの分割された領域内における単一ボトルネック分析を適用すればよい。すなわち、分割された空間に含まれる希望到着時刻が  $t_w$  から  $t_w+dt_w$  の範囲の分布から  $W_j(\cdot)$  を破線のように時刻  $t_w+dt_w$  まで延長できる。累積流出曲線  $D_j(\cdot)$  は所与のボトルネック容量  $\mu_j$  を傾きに持つ線として延長できるので、時刻  $t_w+dt_w$  の利用者のスケジュールディレイが評価できる。さらに、式(7)あるいは(8)より、 $A_j(\cdot)$  も延長することができる。この様にして、3次元空間を逐次分割しながら、3本の累積曲線を順次延長していくことができる。

## (2) 2つの連続するボトルネック問題

図 1 4 のように、2つの連続するボトルネック (Tandem Bottleneck) において、住居地 2 に住む利用者 (利用者 2) は両方のボトルネックを、また住居地 1 に住む利用者 (利用者 1) は下流側のボトルネックだけを通過して勤務地に向かうことができる場合の出発時刻選択問題は、Kawahara(1990)や Arnott et. al.(1993) らによって解析されている。

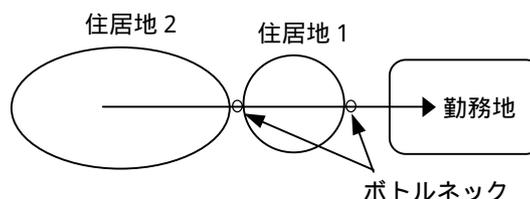


図 1 4 2つの連続するボトルネックを持つネットワーク

この問題では、利用者 1、2 は固定されておりボトルネックの選択は含まれないので、単一ボトルネック問題の時間的均衡条件を適用して解くことができるが、注意が必要な点は、FIFW 原則は、各利用者層の中でしか適用できないことである。この点は FIFW 原則の証明に立ち戻れば明らかな

ことである。従って、累積曲線を求めるためには、各利用者層別に時間的均衡条件を適用しながら、さらに下流側ボトルネックにおける待ち時間は利用者層に関わりなく同じ時刻に流入した利用者は等しい待ち時間を費やすという FIFO サービスを満たすように均衡解を求めることになる。

この分析で興味深いのは、住居地 2 の利用者の希望到着時刻分布の傾きが上流側のボトルネック容量を常に超えない場合、すなわち住居地 2 の利用者が全員希望到着時刻に到着するように行動しても上流側ボトルネック容量よりも低いレートの場合である。この場合、下流側ボトルネックに待ち行列が全く発生しない場合には、明らかに上流側ボトルネックにも待ち行列は発生しないが、下流側ボトルネックに待ち行列が発生する場合には、時間的な均衡条件を達成するために、住居地 2 の利用者は出発時刻を早めなければならない、上流側のボトルネックにも待ち行列ができてしまうことである。さらに、住居地 2 の利用者にとっては、下流側ボトルネックへの流入レートは上流側ボトルネック容量に押さえられてしまうので、下流側ボトルネックにおけるサービスはこれら利用者にとって不利に働く結果となることである。

### (3) 旅行費用関数に個人差がある場合への拡張

これまでの研究では、旅行費用関数  $f_m(m)$ ,  $f_w(w)$ ,  $f_s(s)$  は全ての利用者に共通の関数形であったが、Newell は単一ボトルネックにおいて、これに個人差がある場合にも、時間的均衡条件を満たす解が求められることを示している。特に、式(14)、(15)にある線形の費用関数について、スケジュールディレイと待ち時間の費用係数  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $b$  が利用者の中でどの様に分布しているのかを所与とした場合の累積曲線の求め方を提案している。

### (4) ランダム効用理論に基づいた出発時刻選択

De Palma et al. (1983)、Ben Akiva et al. (1984, 1986)らは、単一ボトルネック問題をランダム効用理論に基づいたロジットモデルによって確率的に

解いている。式(14)、(15)のような線形の  $f_w(w)$ ,  $f_s(s)$  を仮定して、誤差項  $\varepsilon$  にワイブル分布を仮定した次のような効用関数、 $U(t, t_w) = p(t, t_w) + \varepsilon$ , を用いてロジットモデルを導入している。

解法としては、時間軸を適当な小区間に分割し出発時刻を時間軸の各区間の選択という離散的な選択問題として扱っている。まず、対象とする通勤者の出発時刻の初期値を適当に仮定 ( $A(t)$  の初期値を仮定) し、それによって発生する待ち時間  $w(t)$  とスケジュールディレイ  $s(t, t_w)$  より  $U(t, t_w)$  を再評価しながらロジットモデルによって出発時刻を決定する、といった繰り返し計算である。

Mahmassani et al.(1986)も類似した確率的な研究を発表しているが、Ben Akiva らと異なるのは、旅行費用はボトルネックにおける待ち時間に着目しているというよりも、ボトルネック上流の道路区間の混雑による遅れ時間を交通密度と速度の関係式 (Green-shield タイプ) を用いて表現している点である。

### (5) 需要の時間平滑化施策に関する考察

道路交通需要を時間的に平滑化して渋滞を緩和しようとする施策として、時差出勤、フレックスタイム制、ロードプライシングなどが議論されている。本節では、これらの施策と出発時刻選択問題との関わりについて簡単に論じる。渋滞軽減のためには、時間的均衡条件を満足しつつ、待ち時間  $w(t)$  を最小化するような施策をとる必要があり、時間的均衡条件から得られる式(7)を用いて考察する。

$$w(t) = f_w^{-1} \left[ \int_{t_0}^t f_s' \{s(x)\} dx \right]. \quad (7)$$

第 1 に、スケジュールディレイ  $s(t)$  自体をゼロに持っていくことができたとすれば、式(7)より  $w(t)$  もゼロに近づく。これは利用者の希望到着時刻を制御して  $W(t)$  をできるだけ  $D(t)$  に近づけようとするものであり、通勤交通を考えた場合の施策としては時差出勤などの施策に相当すると思われる

る。

第2に、スケジュールディレイ  $s(t)$  はゼロにならなくても、スケジュール費用を非常にフラットな関数にして勾配  $f'_s\{s(t)\}$  を小さくしてあげても、 $w(t)$  はゼロに近づく。フレックスタイム制のように出勤時刻を固定にしない施策などがこれに当たるのかもしれない。

第3に、均衡状態における各利用者の待ち時間費用をそっくり課金で徴収することができたのなら、均衡状態を保ちながら待ち行列を無くせることになる。これはよく言われていることであって、時間的にダイナミックなロードプライシングである。

最後に公平性についてであるが、仮定のようにスケジュール費用関数が凸であれば、式(22)で示したようにスケジュールディレイが正の場合（希望到着時刻より前に到着する場合）には動的費用  $p(t)$  は増加し、逆の場合には減少することになる。すなわち、均衡状態でスケジュールディレイがゼロの利用者が一番多くの動的費用を負担することになる。これは興味深い結果で、丁度希望する時刻に到着できた利用者の動的費用が、他人の行動によって一番高くなってしまおうということである。これを是正するための方法は、全員の希望到着時刻を同じにすることが考えられるが、これは  $w(t)$  をゼロにもっていく施策と相対する。一方、上記の  $s(t)$  あるいは  $f'_s\{s(t)\}$  をゼロに近づけようとする施策を導入すれば、待ち時間  $w(t)$  がゼロに近づけだけでなく、動的費用  $p(t)$  の変化も小さくすることができ、公平性の観点からも望ましいと言えるだろう。

以上は、利用者の行動をいくつかの仮定をもうけて簡略化した本モデル上の考察であり、実際の利用者行動を完全に記述しているものではないことは当然であるが、ある施策をとった場合に渋滞がどちらの方向に変化するのかを定性的に理解するためには有意義である。

#### 4. まとめ

本稿は、道路の単一ボトルネックにおける出発

時刻選択に関する研究をレビューし、これまでの理論的な成果をわかりやすく解説したものである。主な点をまとめると、

- (1) 通勤交通のような明確な到着時刻制約のあるトリップを対象とし、利用者の旅行費用は自由旅行速度で走行した場合の移動時間の費用（静的）、ボトルネックにおける待ち時間による費用、スケジュールディレイ（希望到着時刻（所与）と実際の到着時刻の時間差）による費用から構成される。
- (2) 利用者は、自分の旅行費用を最小にできるように出発時刻を選択するという仮定から、時間的均衡条件が導出される。
- (3) スケジュールディレイ ( $s$ ) を費用に変換するスケジュール費用関数 ( $f_s\{s\}$ ) が、 $s$  について凸であれば、希望到着時刻の早い順番にボトルネックを通過するという FIFW (First In First Work) 原則が成立する。
- (4) ボトルネックにおける需要の流入レートは非負の値をとらなければならない、そのためには待ち行列費用関数  $f_w\{w\}$  とスケジュール費用関数  $f_s\{s\}$  の間には  $f'_w\{w(t)\} \geq f'_s\{s(t)\}$  の関係が常に成立しなければならない。すなわち、ある単位時間をボトルネックでの待ち時間として費やすよりも、スケジュールディレイとして使う方が費用が安いことが必要である。
- (5) スケジュール費用関数 ( $f_s\{s\}$ ) がスケジュールディレイ ( $s$ ) について凸であれば、均衡条件を満たす累積曲線  $A(t)$ 、 $D(t)$  は唯一に存在する。注意事項として、 $f_s\{s\}$  が厳密に凸であれば、累積曲線  $A(t)$ 、 $D(t)$  も、さらに利用者の出発時刻も唯一に決められるが、厳密に凸でなく例えば  $f_s\{s\}$  が線形の場合には、 $A(t)$  と  $D(t)$  は唯一に求まるものの、各利用者の出発時刻は一つに定まらない。

また、単一ボトルネックの研究が、複数ボトルネックネットワークにおける分析、費用関数に個人差がある場合の分析、ランダム効用理論の適用等へと発展していった経緯についても簡単に紹介した。

本解説で取り上げたモデルは、利用者の出発時刻選択行動を仮定をもうけて簡略化したものであり、現実の施策にそのまま結びつくものではないが、時間平滑化に関する各種施策が交通渋滞をどのような方向に変化させるのかを理解するという意味では、価値があると思われる。今後の関連する研究の一助になれば幸いである。

#### REFERENCES

1. Arnott R., De Palma A., and Lindsey R. (1993) Properties of Dynamic Traffic Equilibrium Involving Bottlenecks, Including a Paradox and Metering, *Transportation Science* Vol.27, No.2, pp.148-160.
2. Ben Akiva M., Cyna M., and De Palma A. (1984) Dynamic Model of Peak Period Congestion, *Transp. Res.* Vol.18B, No.4/5, pp.339-335.
3. Ben Akiva M., De Palma A., and Kanaroglou P. (1986) Dynamic Model of Peak Period Traffic Congestion with Elastic Arrival Rates, *Transp. Sci.*, Vol.20, No.2.
4. Daganzo C.F. (1984) The Uniqueness of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley*.
5. DePalma A., M.Ben-Akiva, C.Lefevre, and N.Litinas (1983) Stochastic Equilibrium Model of Peak Period Traffic Congestion, *Transportation Science*, Vol.17, No.4.
6. Fargier P.H. (1981) Effects of the Choice of Departure Time on Road Traffic Congestion, *Proceedings of the Eighth International Symposium on Transportation and traffic Theory*, Toronto, Canada.
7. Henderson J.V. (1974) Road Congestion: A Reconsideration of Pricing Theory, *Journal of Urban Economics* 1.
8. Hendrickson C., and Kocur G. (1981) Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, *Transportation Science*, Vol.15, No.1.
9. Hendrickson C., Nagin D., and Plank E. (1981) Characteristics of Travel Time and Dynamic User Equilibrium for Travel-to-Work, *Proceedings of the Eighth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Toronto, Canada.
10. Hendrickson C., and Plank E. (1984) The Flexibility of Departure Times for Work Trips, *Transportation Research*, Vol.18A, No.1.
11. Hurdle V.F. (1974) The Effect of Queueing on Traffic Assignment in a Simple Road Network, *Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Sydney.
12. Hurdle V.F. (1981) Equilibrium Flows on Urban Freeways, *Transportation Science*, Vol.15.
13. Kuwahara M. (1985) A Time-Dependent Network Analysis for Highway Commute Traffic in a Single Core City, *Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley*, Dissertation Series, UCB-ITS-DS-85-2.
14. Kuwahara M., and Newell G.F. (1987) Queue Evolution on Freeways Leading to a Single Core City during the Morning Peak, *Proc. of the 10th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp.21-40, Boston.
15. Kuwahara M. (1990) Equilibrium Queueing Patterns at a Two-Tandem Bottleneck during the Morning Peak, *Transp. Sci.* Vol.24, No.3, pp.217-229.
16. Mahmassani H.S. and Chang G.L. (1986) Experiments with Departure Time Choice Dynamics of Urban Commuters, *Transp. Res.*, Vol.20B, No.4.
17. Newell G.F. (1985) The Morning Commute for Non-Identical Travelers, *Transp. Sci.* Vol.21, No.2, pp.74-88.
18. Smith M.J. (1981) The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *International*

Symposium on Frontiers in Transportation  
Equilibrium and Supply Models, Montreal.

19. Vickrey W.S. (1969) Congestion Theory and  
Transportation Investment, American Economic  
Review 59.

## 英文概要

### Review on Departure Time Choice Theory for Highway Traffic

This paper summarizes theory on departure time choices for highway traffic in order to understand the basic theory for demand control measures to alleviate traffic congestion. First, the single bottleneck analyses since late 1960s are reviewed focusing on commute trips which have clear time constraints. Then, the extension such as to the multi-bottleneck analysis, to incorporation of non-identical travelers, and to inclusion of the random utility theory are also introduced.