

ネットワーク交通流の動的な解析—待ち行列モデルの応用*
Dynamic Analyses on Network Traffic Flow – Applications of Queueing Models

桑原雅夫**

By Masao KUWAHARA**

1. はじめに

交通ネットワーク解析に関しては、旅行時間や渋滞長の時間的な変化を記述しようとする試み、いわゆる動学化が最近の大きな流れとなっている。そのためにはネットワーク上に車両が滞留する現象である“渋滞”を時間的にダイナミックに記述できる手法が必要となる。この有力な手段が、待ち行列理論に基づいた累積交通量図（任意地点をある時刻までに通過した交通量の累積を表す図）である。ネットワーク上の任意の2地点で累積交通量図が書ければ、FIFO (First In First Out) などのサービス基準に基づいて2地点間の旅行時間や存在台数の時間変化を評価することができる。

これまでも累積交通量図は、交通量配分以外にもさまざまな動的な交通流解析に用いられてきたが、ほとんどが物理的な長さを持たない Point Queue を用いた解析であった。Point Queue を仮定した解析は、待ち行列システム（例えば道路のボトルネック）へ流入する累積交通量図とシステムのサービス容量（ボトルネック容量）のみによって、動的な交通状態を記述することができるという長所がある。すなわち、ボトルネックでの遅れ時間や滞留台数は、ボトルネック上流区間の幾何構造に起因した交通特性とは独立に評価することができるというロバストな手法である。

ところが、実際の渋滞列は時間経過とともに上流に延伸して、例えば上流のオンランプを一部閉塞す

るような複雑な現象をもたらす。このような現象は長さを持たない Point Queue では当然表現することができず、現実と同じように物理的な長さを持つ Physical Queue の取り扱いが必要になる場合も少なくない。

本論文では、Point Queue および Physical Queue を用いた累積交通量図を活用した動的なネットワーク解析について述べる。まず、車両走行軌跡を表すタイムスペースダイアグラムと累積交通量図との関係を明らかにし、Point Queue および Physical Queue を用いた場合の累積交通量図の求め方を説明する。次に、それに基づいて DUO（動的利用者最適配分）、DUE（動的利用者均衡配分）、DSO（動的システム最適配分）という3種類の配分理論（経路選択のみ扱ったもの）について述べる。最後に、経路選択とともに動的解析で重要である出発時刻選択について、これまでの理論的な研究成果をレビュー解説する。

2. 累積交通量図における交通状態の評価

(1) タイムスペースダイアグラムと累積交通量図の関係

道路を走る車両の走行軌跡を表すために、タイムスペースダイアグラムが使われる。これは、横軸に時間(t)、縦軸に距離(x)、をとり、そこに車両の位置を連続的に示すものである。ある道路区間（リンク）の先頭に容量上のボトルネックがある場合の典型的な車両の軌跡（Physical Queue）を表すと図1の上図のようであろう。一方、車両 a と b について長さを持たない Point Queue の走行軌跡を書けば、図の太線のようなになる。長さを持たないので、各車両はリンクの下流端まで自由走行速度 v で走行し、そこで自分の順番が来るまで待ってから下流リンクへ流出していく。

* キーワーズ：動的配分、待ち行列、ショックウェーブ、累積交通量

** 正員、Ph.D.、東京大学生産技術研究所第5部
(東京都港区六本木 7-22-1
TEL03-3402-6231、FAX03-3401-6286)

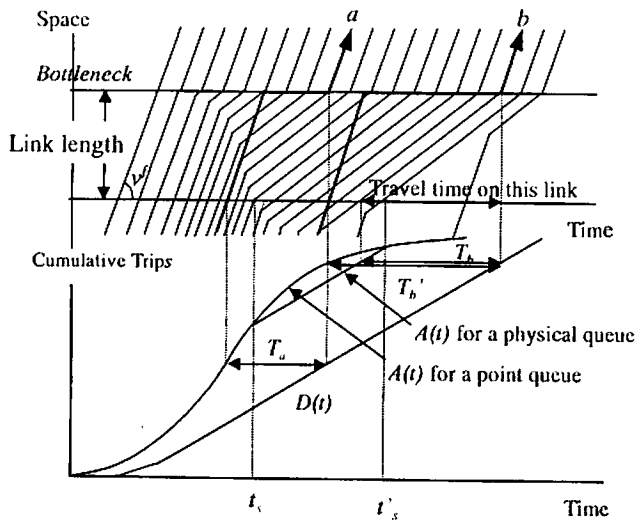


図-1 車両走行軌跡と累積図の関係

次に、タイムスペースダイアグラムの車両走行軌跡を3次元的に書いてみよう。すなわち、2次元平面に交通量の累積台数の軸を追加して、1本1本の軌跡を鉛直方向に積み重ねていったのが図2である³⁾。滞留現象を表現する手段として、決定論的な待ち行列理論に基づいた累積図があるが、このように3次元的に走行軌跡を表すことによって、タイムスペースダイアグラムと累積図の関係を明確にすることができる。すなわち、任意の位置において、この3次元図を距離軸に垂直にカットすれば、そこでのPhysical Queueの累積図が描ける。もちろんPoint Queueの走行軌跡を3次元的に表して同様にカットすれば、Point Queueの累積図が得られる。特に、リンク入り口と出口の位置のカットによって、下記に定義するような2種類の累積交通量が求められる。

$$A(t) = \text{リンクに時刻 } t \text{ 迄に流入した台数} \quad (1)$$

$$D(t) = \text{リンクを時刻 } t \text{ 迄に流出した台数} \quad (2)$$

これをタイムスペースダイアグラムと併せて書いたものが図1の下図である。

この場合、車両aのこのリンクでの旅行時間は T_a であり、FIFOのもとでは流入時刻における $A(t)$ と $D(t)$ の水平距離で表されており、Point Queue、Physical Queueに関わらず同じ値をとる。一方、車両bの当該リンクにおける旅行時間は、Physical Queueの場合には T_b であるが、Point Queueの場合には、 T_b' と

いうように違いが生じる。 $T_b' - T_b$ はリンクに入る前の遅れ分である。いずれにせよ、Point Queue、Physical Queueそれぞれの累積図を書いて、 $A(t)$ と $D(t)$ の水平距離をとれば、それぞれの場合についての旅行時間が求められる。このように旅行時間はリンク入り口と出口の累積図 $A(t)$ と $D(t)$ のみによって決定され、当該区間の走行軌跡には影響されないため、累積図を用いた旅行時間の評価はロバストで扱いやすいメリットがある。

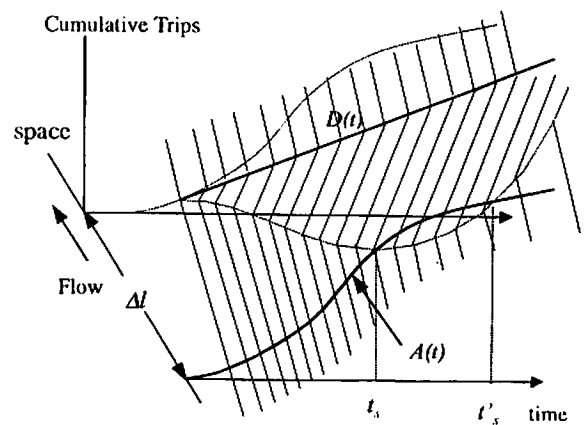


図-2 3次元的に表した車両走行軌跡

話が前後したが、車両bの場合、実際の当該リンクにおける旅行時間は T_b であり、Physical Queueによる累積図でないと正しく評価できない。走行軌跡から明らかのように、ボトルネックからの減速波(Shock Wave)が上流に伝播するため、時刻 t_i から t'_s までは、Point Queueのレートではリンクに流入することができないためである。従って、正しく各リンク上の旅行時間を評価するためには、Physical Queueを用いなければならない。そのためにはShock Waveの伝播を考慮する必要がある。

Shock Waveが上流リンクに到達している時刻 t_i から t'_s までは、上流リンクの流出レート(=当該リンクの流入レート)がボトルネック容量まで低下しており、Point Queueでは固定値と仮定できた(上流リンクの)流出レートが、Physical QueueではShock Waveの伝播にあわせて変化することになる。

(2) Physical Queue の考慮が必要な場面

動的なネットワーク解析における Physical Queue の考慮が要求される典型的な場面をいくつか紹介する。図 3 (a) は、待ち行列が高速オンランプの上流にまで延伸している場合である。この時、オンランプから流入する交通は待ち行列の最後尾ではなく中間に入り込むことができ、待ち行列がさらに伸びたとしてもボトルネックまでの旅行時間は変わらない。一方、高速本線を走ってきた車両はオンランプから横入りされるため、旅行時間はその分一層増大してしまう。Point Queue の場合には、待ち行列に長さがないので、オンランプからの車両も本線車両も全て待ち行列の最後尾につくので、上記のような実現象は再現できない。

(b) は、これに経路選択が付加された場合である。オンランプから流入する交通の旅行時間は待ち行列がオンランプまで延伸してしまっただけではいくら延びても変わらない。よって、その時の高速利用の旅行時間が一般街路よりも依然として短ければ、常に高速道路を利用し続け、高速道路の混雑が Point Queue の結果以上に激化する。(c) は (b) を複数のオンランプに拡張させたもので、同様の理由で高速道路に需要が全て回るために発生するいわゆる Grid Lock¹⁴⁾ である。

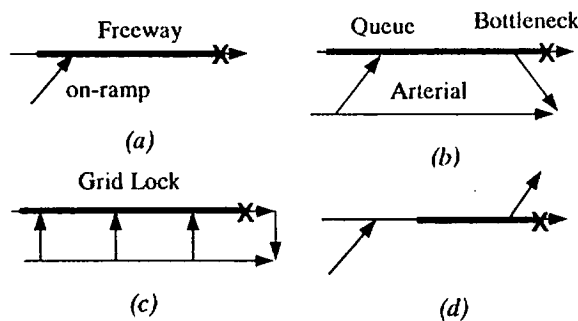


図-3 Physical Queue の適用場面

(d) は本線上に待ち行列が存在するために、オンランプから流入してオフランプから流出する交通にも遅れが生じる場合である。ボトルネックを通過しない交通にも遅れが生じるこのような現象も Point Queue では表現できない。効率的なネットワークの利用を考えた場合、例えばランプ流入制御によって待ち行列がオフランプ以上に延伸しないように制御

することで、ボトルネックに関係ない交通の遅れを減少させることができるであろう。このように待ち行列をどこに生成させるのか、あるいはどこには延伸させてはいけないのかという議論に対しては、Physical Queue の考慮が要求される。

(3) Kinematic Wave 理論と Physical Queue における累積交通量図

前節で述べたように 3 次元タイムスペース図をカットすることによって、どの位置における累積図でも描けるのであるが、もう少し簡単に任意の位置における Physical Queue の累積図を書くことを Kinematic Wave 理論に基づいて考えよう。まず、下記の変数を定義する。

- $F(x,t)$ = 時刻 t までにリンクの下流端から x だけ上流位置を通過する累積交通量
- $f(x,t)$ = 時刻 t におけるリンクの下流端から x だけ上流位置の交通流率
- $k(x,t)$ = 時刻 t におけるリンクの下流端から x だけ上流位置の交通密度

ただし位置 x は、リンク下流端から上流に向かう方向（車両の進行方向とは逆）を正に取るものとする。定義より明らかに以下の関係が求められる：

$$f(x,t) = \partial F(x,t) / \partial t \quad (3)$$

$$k(x,t) = \partial F(x,t) / \partial x \quad (4)$$

また、前節までの変数 $A(t)$ 、 $D(t)$ 等と上記変数の関係は、リンク下流端を $x=0$ 、上流端を $x=\Delta l$ とすれば、次の通りである：

$$F(\Delta l, t) = A(t), \quad F(0, t) = D(t).$$

また、リンク上のいかなる位置 x 、時刻 t においても、交通流率 $f(x,t)$ - 密度 $k(x,t)$ 関係は図 4(a) の様に与えられているとする。この曲線の傾きは Wave Speed であり、これを $v(x,t)$ と書く。

ここで、 $-dx/dt = \partial f / \partial k$ となる Backward Wave の軌跡（特性曲線）に沿って $dF(x,t) / dx$ を考えると、

$$\begin{aligned}
 dF(x,t) / dx &= \partial F(x,t) / \partial x + \partial F(x,t) / \partial t \cdot dt/dx & (5-a) \\
 &= k(x,t) \cdot f(x,t) \cdot \partial k / \partial f \\
 &= k(x,t) \cdot f(x,t) / v(x,t)
 \end{aligned}$$

となる。これを図4(a)に示せば、Wave Speedの接線と密度軸の交点に当たる。Lighthill and Whitham³⁰⁾とRichards³⁵⁾のKinematic Wave理論によれば、示したように、Backward Wave (特性曲線) 上では交通流率 $f(x,t)$ は変化しないので、 $k(x,t)$ も $v(x,t)$ も一定値をとる(付録1参照)。従って、Backward Waveに沿った $dF(x,t) / dx$ はこのリンク上では位置に関わらず一定値をとる。また、特殊なケースとして図4(b)のような三角形で表される交通流率 $f(x,t)$ - 密度 $k(x,t)$ 関係の場合には、渋滞領域では $v(x,t) = v'$ なので、

$$dF(x,t) / dx = k^{max} \quad (5-b)$$

というように常に一定値をとる³³⁾。

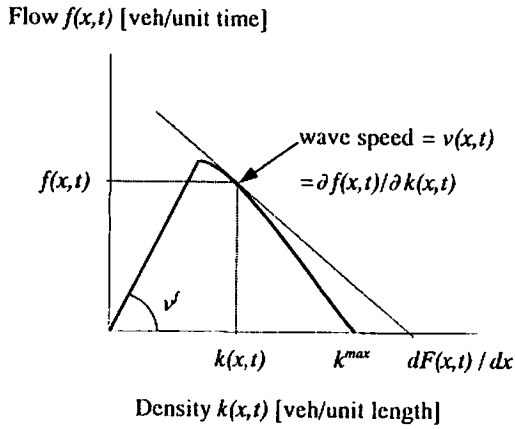


図-4(a) リンクの交通流率-密度関係

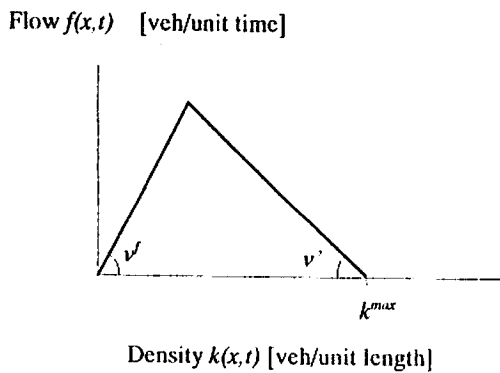


図-4(b) 線形近似した交通流率-密度関係

この結果に従えば、リンク下流端で時刻 t に観測された流率 $f(0,t)$ はBackward Wave上では変化せずに上流に伝播するので、 $f(0,t)$ を時間方向に $-\Delta t / v(x,t)$ 、累積台数方向に $\{dF(x,t) / dx\} \cdot \Delta t$ だけシフトさせればよい。図5に、図1の走行軌跡に対応させた累積図を示す。特に、 $D(t)$ をこれらの量だけシフトさせた線 $(D'(t))$ があるが、この $D'(t)$ と $A(t)$ との交点がForward WaveとBackward WaveのぶつかりあうShock Waveである。Shock Wave理論より、 $A(t)$ と $D'(t)$ の小さい方がリンク上流端のPhysical Queueの累積台数となる^{30), 35)}。また図6にも立体的にForward WaveとBackward Waveを示す。

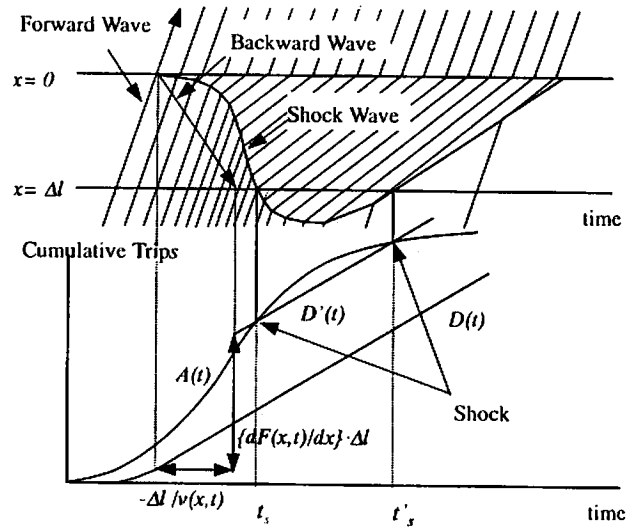


図-5 Kinematic Wave 理論に基づいた Physical Queue の累積図

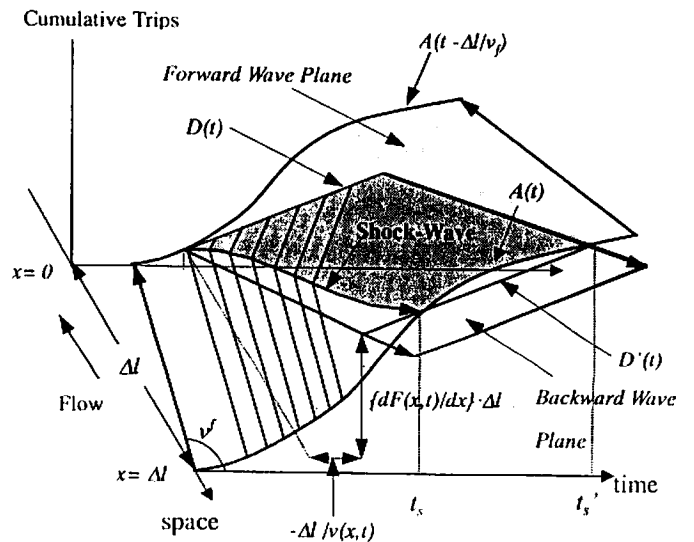


図-6 3次元的に表した車両走行軌跡とウェーブ

図5では、 $D(t)$ の傾きは待ち行列がある間は一定値をとっているが、たとえ傾きが変化しても、その傾き(= $f(0, t)$)に合わせて同様シフト量を求めて $D'(t)$ の傾きを定めることができる。

以上のように Forward Wave に Backward Wave を重ね合わせることで、リンク上流端までに待ち行列が延伸して上流リンクからの需要を受け入れられない状況を累積図上で評価することができる。これは言い換えれば、上流リンクの流出容量が待ち行列の延伸によって低下することを意味しており、後述するように Physical Queue ではリンク容量を待ち行列延伸状況に合わせて修正することが必要になる。

3. 動的交通量配分

前節における累積交通量図を用いた旅行時間の評価を利用しながら、動的な交通量配分の基本理論についてまとめる。

(1) 制約条件

ネットワークはリンクとノードから構成され、ノード i から j に向かう有向リンクをリンク (i, j) と書く。動的な交通量解析においては、必ず満たさなければならない制約条件がいくつか存在する。第1の制約条件は、ノード i における保存則で、同じ目的地 d を持つ交通に着目して次の様に書ける。(なお、目的地別ではなく、出発地別の変数を用いても交通量保存則は記述できる。)

$$-\sum_k D_{ki}^d(t) + \sum_j A_{ij}^d(t) - Q_{id}(t) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad i \neq d. \quad (6)$$

ここに、

$A_{ij}^d(t)$ = 時刻 t 迄にリンク (i, j) に流入した目的地 d を持つ累積台数

$D_{ij}^d(t)$ = 時刻 t 迄にリンク (i, j) から流出した目的地 d を持つ累積台数

$Q_{od}(t)$ = 時刻 t 迄に起点ノード o を出発して終点ノード d に向かう累積台数 (所与)

第2の制約条件は FIFO サービスに関する条件であ

る。リンクの FIFO とは、リンクから流出する順番は流入した順番に等しいということであり、時刻 t にリンク (i, j) に流入した車のリンク旅行時間 $T_{ij}(t)$ を介在させて以下のように書ける。

$$A_{ij}^d(t) = D_{ij}^d(t + T_{ij}(t)), \quad \forall d, \quad (7)$$

式(7)の両辺を時刻 t で微分することによって FIFO 条件は次の様に表すこともできる。

$$\mu_{ij}^d(t + T_{ij}(t)) = \mu_{ij}^d(t) \cdot \frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\lambda_{ij}^d(t)} \quad \forall d. \quad (8)$$

ただし、 $\lambda_{ij}^d(t) = dA_{ij}^d(t)/dt$, $\mu_{ij}^d(t) = dD_{ij}^d(t)/dt$,

$$\lambda_{ij}(t) = dA_{ij}(t)/dt, \quad \mu_{ij}(t) = dD_{ij}(t)/dt.$$

以上の様に、FIFO サービスを通して、リンク旅行時間がリンク流入・流出率と関連づけられること、また目的地別のリンク流出率が他の目的地を持つ交通にも依存した形になることが留意点である。

(2) リンク容量とリンク旅行時間の評価

FIFO サービスリンクにおける流出レート $\mu_{ij}(t)$ は次のように書ける。

$$\mu_{ij}(t) = \begin{cases} \mu_{ij}^*(t), & A_{ij}(t - \Delta t_{ij} / v_{ij}^f) > D_{ij}(t) \quad \text{or} \\ & \lambda_{ij}(t - \Delta t_{ij} / v_{ij}^f) > \mu_{ij}^*(t) \\ \lambda_{ij}(t - \Delta t_{ij} / v_{ij}^f), & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

ここに、 $\mu_{ij}^*(t)$ = リンク (i, j) の容量

この意味は、もしもリンク (i, j) に待ち行列がなければ、リンク旅行時間は自由走行速度 v_{ij}^f における時間 $\Delta t_{ij} / v_{ij}^f$ に等しく、流出レートは $\Delta t_{ij} / v_{ij}^f$ 前の流入レート $\lambda_{ij}(t - \Delta t_{ij} / v_{ij}^f)$ に等しい。ところが、もしもリンク旅行時間が $\Delta t_{ij} / v_{ij}^f$ よりも大きい場合、流入レート $\lambda_{ij}(t - \Delta t_{ij} / v_{ij}^f)$ がリンク容量 $\mu_{ij}^*(t)$ を越えたならば、流出レートはリンク容量に押しえられることを表している。

Point Queue の場合には、待ち行列の延伸がないのでリンク容量 $\mu_{ij}^*(t)$ は一定値をとると仮定できる。

ところが、Physical Queue の場合には第2章で述べ

たように、下流側リンクの待ち行列の状況によっては、図5の t_s から t' のように変化させる必要が生じる。リンク容量値は一般には、現在以前の交通状況によって決められるので、

$$\mu_{ij}^*(t) = \mu_{ij}^*(\lambda(t')) \mid t' \leq t, \quad (10)$$

where $\lambda(t) = (\lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \dots, \lambda_{ij}(t), \dots)$ '.

と書くことができる。容量値 $\mu_{ij}^*(\lambda(t')) \mid t' \leq t$ の明示的な関数形は道路幾何構造と交通条件によって適切に定義すればよい。

(3) 配分原理と定式化

本節では、利用者最適配分 (DUO)、利用者均衡配分 (DUE)、システム最適配分 (DSO) という3種類の配分原理に基づいた動的交通量配分を概説する。

a) DUO

DUO はリアクティブ動的配分とも呼ばれ、利用者は現時点における瞬間の目的地までの最短旅行時間経路を選択すると仮定している。 $\pi_{id}(t)$ を時刻 t におけるノード i から目的地 d までの現時点瞬間の最短旅行時間と定義すると、DUO は次のように表現できる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_{id}(t) - \pi_{jd}(t) = T_{ij}(t), & \text{時刻 } t \text{ にノード } i \text{ にいて目的地} \\ & \text{ } d \text{ を持つ利用者がリンク } (i,j) \\ & \text{ を利用する場合,} \\ \pi_{id}(t) - \pi_{jd}(t) \leq T_{ij}(t), & \text{その他の場合.} \end{array} \right. \quad (11)$$

この条件は、もしも時刻 t にノード i にいて目的地 d を持つ利用者がリンク (i,j) を利用する場合には、リンク (i,j) はノード i から目的地 d までの最短経路上にあることを示している。

DUO は、現在時刻までの状況に反応して経路選択を行うものであるので、絶対時刻ごとに問題を分解できることがわかっている^{2,29)}。従って、離散化された微少時間単位ごとに、対象時間帯の最初から逐次に旅行時間に基づいて経路選択を行い、選択された経路に

交通量をネットワークにロードし累積図を更新する、そして再び累積図から旅行時間を評価して経路選択を行うというプロセスを繰り返せばよい。

桑原、赤松²⁹⁾は、DUO が絶対時刻で分解することに着目して Physical Queue の組み込みに成功している。仮に現在時刻 t まで $A_{ij}(t)$ と $D_{ij}(t)$ が決定できていた場合には、Backward Wave がリンク上流端に到達したことを表す $D'_{ij}(t)$ は、将来時刻 $t - \Delta t_{ij} / v_{ij}(x, t)$ までわかっていることになる。従って、現時点 t において、リンク (i,j) に流入しようとしている交通が実際にリンクに入れるのかどうかの判断ができるためである。

b) DUE

DUOに対し、利用者均衡配分DUEの均衡条件は以下のように表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi'_{id}(t) - \pi'_{jd}(t + T_{ij}(t)) = T_{ij}(t), & \text{時刻 } t \text{ にノード } i \text{ にいて目} \\ & \text{的 } d \text{ を持つ利用者がリ} \\ & \text{ンク } (i,j) \text{ を利用する場合,} \\ \pi'_{id}(t) - \pi'_{jd}(t + T_{ij}(t)) \leq T_{ij}(t), & \text{その他の場合.} \end{array} \right. \quad (12)$$

ここで、 $\pi'_{id}(t)$ は時刻 t におけるノード i から目的地 d までの実際に利用者が経験する最短旅行時間である。この条件は(11)に類似してはいるが、ノード j から d までの旅行時間は現在時刻 t におけるものではなく、リンク (i,j) を通ってノード j に到達する時刻 $t + T_{ij}(t)$ における最短旅行時間を用いている点が異なる。さらに、利用者はノード i に居る時点において、将来の実際に経験する最短旅行時間 $\pi'_{id}(t)$ を予測しなければならないので、DUO に比べて分析が難しい。一般ネットワークにおける Many-to-Many の OD 交通量を持つ場合については、Point Queue を扱った場合でも未だに効率的な解法がないのが現状である。

しかしながら、Point Queue における Many-to-One あるいは One-to-Many の OD 交通の場合には、起点出発時刻あるいは終点到着時刻によって、問題が分解できることが Kuwahara and Akamatsu²⁷⁾、赤松、桑原¹⁾ によって明らかにされている。均衡状態では、任意のリンクへの到着順序は唯一の起点からの出発時刻 (終点への到着時刻) と同じ順番が保たれ

ていなければならないという性質がある。従って、任意のリンク (i, j) への到着時刻 t は、起点からの出発時刻（終点への到着時刻） s と関係づけることが出来る。一方、いま時刻 s に起点を出発（終点へ到着）した車が、リンク (i, j) に時刻 $t_i(s)$ に到着したとしよう。FIFO のもとでは、この車両のリンク旅行時間は、累積曲線 $A_{ij}(t)$ のうち時刻 $t_i(s)$ 以前のものに依存し、 $t_i(s)$ 以降とは独立に決めることが出来る。以上より、この車の旅行時間は、時刻 s より前に起点を出発（終点へ到着）した車の経路選択のみに依存することが結論づけられる。従って、この問題は、時刻 s によって分解でき、対象時間帯の始めから、起点からの出発時刻（終点への到着時刻） s の順を追って逐次、計算を進めることが出来る。

Physical Queue の考慮については、Many-to-One あるいは One-to-Many の OD 交通の場合であってもまだ論文としてまとめられてはいないが、十分可能であろう。時刻を離散化して、起点からの出発時刻（終点への到着時刻）が $s \sim s+ds$ の交通を配分する場合、リンク (i, j) では $A_{ij}(t)$ はリンク流入時刻 $t_i(s)$ まで、 $D_{ij}(t)$ は流出時刻 $t_i(s)+T_{ij}(t_i(s))$ まで評価されていると考えてよい（図 7 参照）。よって、Backward Wave が発生している場合には $D'_{ij}(t)$ はさらに $-\Delta t_{ij}/v_{ij}(x, t)$ だけ将来までわかっているはずである。従って、 $s \sim s+ds$ の交通を配分する時点でも、時刻 $t_i(s)$ にリンク (i, j) に流入しようとする交通が待ち行列の延伸によって流入することができないかどうかを判断することができる。このため、問題を時刻 s によって分解しながら、Physical Queue を組み込むことができよう。

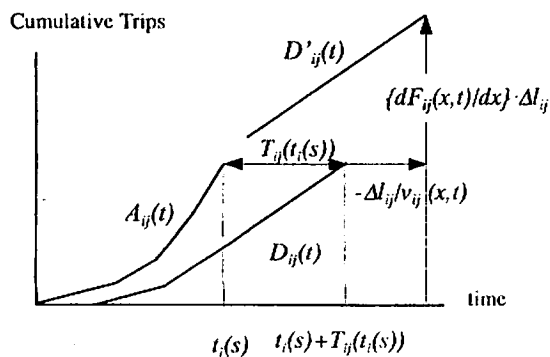


図-7 DUE 配分(1起点多終点 OD)における Physical Queue の取り扱い

c) DSO

ネットワーク全体の総旅行時間（あるいは総費用）を最小にする配分原理であるので、時間軸を Δt で離散化した場合には、次のように目的関数を定義できる。

$$\sum_{ij} \sum_r T_{ij}(t) \cdot \lambda_{ij}(t) \Delta t = \sum_r \sum_t T_r(t) \cdot \lambda_r(t) \Delta t \quad (13)$$

ここで、左辺はリンク変数で総旅行時間を表した場合で、右辺は経路変数で表した場合である。 $T_r(t)$ 、 $\lambda_r(t)$ は、それぞれ時刻 t に経路 r に入った交通の旅行時間と流入レートである。DSO は最小化問題として定式化されるので、解を求めるには最適化理論の各種手法の適用が考えられるが、制約条件である FIFO 条件(8)は未知数 $\lambda_{ij}(t)$ 、 $\lambda_r(t)$ について厳密に凸でないため、解の唯一性は一般には保証されない。ただし、Many-to-One あるいは One-to-Many の OD の場合では、DSO が LP として定式ができることが Daganzo¹⁴⁾、Ziliaskopoulos³⁹⁾ によって示されており、この場合には凸計画問題となる。

また、次に述べるように目的関数の未知数に関する微分値（限界費用）の評価もあまり容易ではない。ここで、1つのリンクについて、流入交通量が時刻 t に 1 単位変化した場合にそのリンクの総旅行時間がどのように変化するかを考えてみると、

$$\begin{aligned} MC_{ij}(t) &= \frac{\partial \sum_u T_{ij}(u) \lambda_{ij}(u) \Delta t}{\partial \lambda_{ij}(t) \Delta t} \\ &= T_{ij}(t) + \sum_{u>t} \frac{\partial T_{ij}(u)}{\partial \lambda_{ij}(t) \Delta t} \lambda_{ij}(u) \Delta t \\ &= t_{ij}^E - t + T_{ij}^f \end{aligned} \quad (14)$$

となり、これをリンクの限界費用 $MC_{ij}(t)$ と定義する。上式は、静的な解析における限界費用と違って、ある時刻 t の流入交通量の変化は、それ以後待ち行列が終了する時刻 t_{ij}^E までにリンクに流入した車両の旅行時間にも影響を与えることを示している（図 8 参照）。すなわち、時刻 t 以降は一様に累積交通量が需要 1 単位分だけ変化するため、

$$\begin{aligned}
MC_{ij}(t) &= \text{リンク}(i,j)\text{の総旅行時間の変化} \\
&= \text{時刻 } t \text{ 後の流入車両の総遅れ時間の変化}(t^{E_{ij}} - t) \\
&+ \text{需要1単位の自由走行時間}(T'_{ij}) \\
&= t^{E_{ij}} - t + T'_{ij}
\end{aligned}$$

と書ける。

一方、目的関数である総旅行時間を経路交通量で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
MC_r(t) &= \frac{\partial \sum_k \sum_u T_k(u) \lambda_k(u) \Delta t}{\partial \lambda_r(t) \Delta t} \\
&= T_r(t) + \sum_{u>r} \sum_k \frac{\partial T_k(u)}{\partial \lambda_r(t) \Delta t} \lambda_k(u) \Delta t \quad (15)
\end{aligned}$$

と書け、これを経路の限界費用と定義する。総旅行時間を最小にするためには、すべての OD ペアについて、使われている経路の限界費用 $MC_r(t)$ を均衡させるように需要を調節すべきことは明らかである。

そこで、経路の限界費用 $MC_r(t)$ をどのように評価できるのかについて考察する。一般ネットワークを考えた場合には経路変数よりもリンク変数を用いた方が解析しやすいので、経路の限界費用 $MC_r(t)$ をリンクの限界費用 $MC_{ij}(t)$ によって表現できることが好ましい。静的な解析の場合には、リンクの限界費用を経路に沿って足し合わせれば経路の限界費用が求められるが、動的な解析では単純な足し合わせでは求められない。その第1の理由は、起点を時刻 t に経路 r に沿って出発した交通がリンク流入する時刻は、リンクによって異なるからである。また第2の理由として、 $MC_r(t)$ はその経路上のリンクの $MC_{ij}(t)$ を時間差を考慮して足し合わせたとしても評価できないことがあげられる。図8のように2本のリンク (i,j) 、 (j,k) から構成される経路でみると、経路交通量を1単位減少させた場合でも、各リンクの交通量は1単位ずつは減少しない。下流リンク (j,k) へは上流リンク (i,j) から交通量が依然として供給されるからである。(ただし、待ち行列の終了時刻は多少早くなる。) この図の場合、起点を時刻 t に出発した流入交通量が1単位変化した場合の経路の限界費用は $MC_r(t) = (t^{E_{jk}} - T'_{ij}) - t + (T'_{ij} + T'_{jk}) = t^{E_{jk}} - t +$

T'_{jk} であるのに対し、 $MC_{ij}(t) = t^{E_{ij}} - t + T'_{ij}$ 、 $MC_{jk}(t) = t^{E_{jk}} - t' + T'_{jk}$ なので、 $MC_r(t) \neq MC_{ij}(t) + MC_{jk}(t)$ である。ここに、 $t' = A_{jk}^{-1}(A_{ij}(t))$ である。

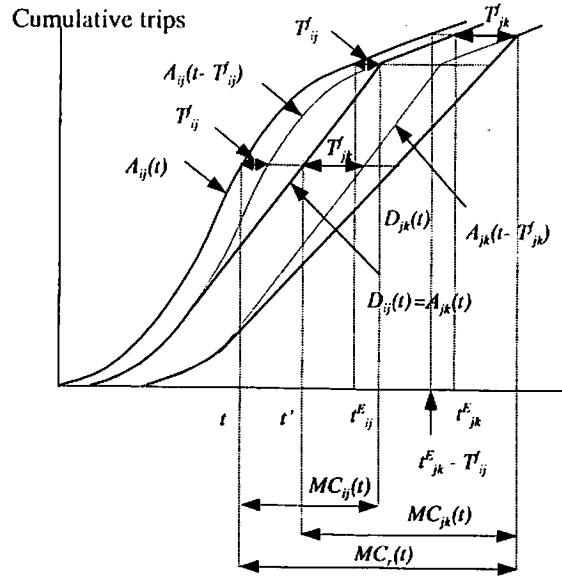


図-8 リンクと経路の限界費用

このように経路の限界費用は、リンクの限界費用の単純な足し合わせで求めることはできない。ところが、上記の例でもわかるとおり、経路上にいくつか存在する待ち行列単位に分解（≒待ち行列が1つだけ発生する区間ごとに分解）して考えることができる。すなわち、ある1つの待ち行列について、時刻 t に待ち行列に流入した需要を1単位変化させた場合の（その待ち行列における）総旅行時間の変化は、リンクの場合と同様に時刻 t 後の総遅れ時間の変化 + 需要1単位の自由走行時間に分けて考えることができる。さらに、前者の総遅れ時間の変化は、“遅れを被る最後の車両の待ち行列への流入時刻 $- t$ ” と表すことができる。図8の場合は、 $(t^{E_{jk}} - T'_{ij}) - t$ がこれに当たる。

従って、このように経路上の待ち行列ごとに総遅れ時間の変化分を評価して、それに経路の自由走行時間を加えれば、経路の限界費用を計算することができる。リンク単位にまで分解してしまうと、単純な足し合わせはできないものの、待ち行列単位に分解して経路の限界費用を評価することは可能であろう。

(4) 例題

DSO が DUE とどのように異なるのかを簡単な例題で紹介する。高速道路利用と一般街路利用の2つの経路がある1 OD の平行ネットワークである。簡単なケースを設定した方がわかりやすいので、高速道路には終点の直前にボトルネック（容量 μ ）があるが、一般街路は十分な容量があるため待ち行列はできないものとする。一方、高速道路を利用した場合の自由走行時間は T_f で、一般街路利用の場合の自由走行時間 T_a よりも小さいとする。

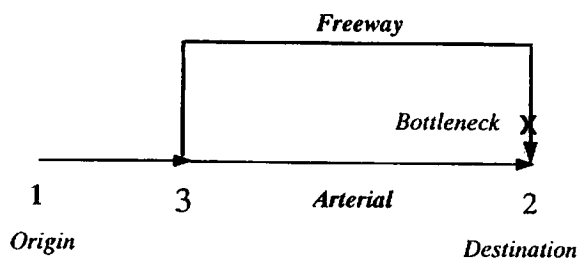


図-9 高速と街路の平行ネットワーク

a) DUE

DUE において Point Queue を扱った場合には、均衡解は図10のようになる（図中のサフィックス f と a は高速道路と一般街路を表す）。 $A(t)$ はノード3を通過する全体の需要量を表しているが、最初は全員が高速道路を利用する。時刻 t_1 になると高速道路に待ち行列が発生し始め、やがて時刻 t_3 には一般街路の旅行時間と等しい旅行時間がかかるようになる。一般街路の旅行時間は T_a で固定値をとるので、時刻 t_3 から t_4 までは、高速道路の旅行時間を T_a と等しくするように両方の経路に需要が配分される。時刻 t_4 になると、全体の需要が高速道路の容量を下回るため、再びすべての需要が高速道路を利用する。よって、時刻 t_4 以降は全体の需要 $A(t)$ と高速道路の累積量 $A_f(t)$ は同じ傾きを持つ。

次に Physical Queue の場合を考えよう。時刻 t_1 からボトルネックで待ち行列が発生するので、高速道路上に Backward Wave が発生する。第2章で述べたように、 $D_f(t)$ をシフトさせて、Backward Wave が高速道路入り口（ノード3）に到達したときの累積 $D_f'(t)$ を描くことができる。

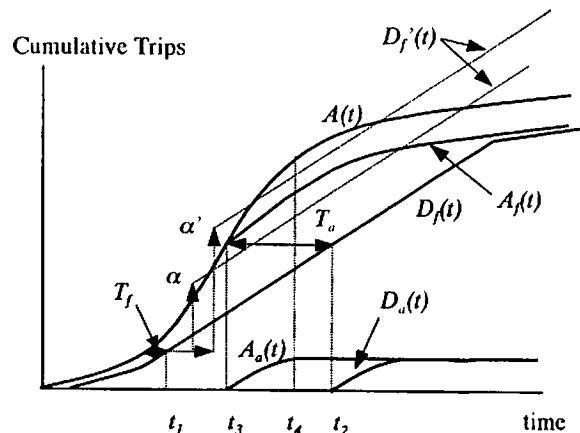


図-10 DUE の均衡解

このようにシフトさせた結果が、もしも図中の α' であったなら、 $A_f(t)$ よりも $D_f'(t)$ が上に位置するので、Physical Queue の場合も Point Queue の累積図と変わりはない。すなわち、ノード3にまで Shock Wave が到達する以前に高速道路の旅行時間が T_a と等しくなるため、Shock Wave はノード3にまで到達しない。

しかし、 α に位置した場合には、Shock Wave がノード3に到達（高速道路が待ち行列で占有された状態）しても高速道路の旅行時間は依然として T_a より短い状態にある。よって、この後もすべての利用者は高速道路を利用し続ける。待ち行列はノード3を越えてリンク(1,3)を上流にも向かって延伸する。起点からノード3までの旅行時間は経路によらず同じであるために、すべての利用者が常に高速道路を選択する状態が最後まで継続するので、DUE の結果とは大きく異なる交通状態が現れる。

b) DSO

DSO の場合には、前節で述べたように両方の経路の限界費用が均衡するように配分すればよい。Point Queue の場合の1つの答えを図11に示す。時刻 t_1 までは、両経路ともに容量以下の状態なので、限界費用は自由走行時間に等しい。 $T_f < T_a$ なので、時刻 t_1 までは全ての需要が高速道路を利用する。時刻 t_1 になると、全体需要のレートが高速道路の容量 μ に等しくなる。もしも高速道路に時刻 t_2 まで待ち

行列を作ると、高速道路の限界費用は、 $t_2 - t_1 + T_f$ となるが、一方高速道路に容量 μ よりも小さい需要しか配分しないと、高速の限界費用は $T_f (< T_a)$ のままである。従って、高速道路を丁度容量一杯に保つことが最適となり、高速道路の限界費用は時刻 t_1 から待ち行列の終了する時刻 t_2 まで、傾き-1で線形に減少し続ける。 $t_1 \sim t_3$ の間は、高速の限界費用が一般街路よりも大きいので、容量以上に高速道路を利用するのは好ましくない。そのため、容量以上の需要は一般街路を利用する。しかし、 $t_3 \sim t_2$ の間は、高速の限界費用が一般街路の限界費用 T_a よりも小さくなるので、より多くの需要を高速に配分すべきであり、すべての需要を高速に配分するのが最適となる。 $t_3 \sim t_2$ の間に、もしも高速道路の容量を超える全体需要がある場合には、図11のように高速道路上に待ち行列が発生する。

この問題では一般街路には待ち行列ができない設定であったが、街路にも待ち行列が発生しうる場合には多少異なった配分戦略となる。これらについては、別の機会に紹介したい。

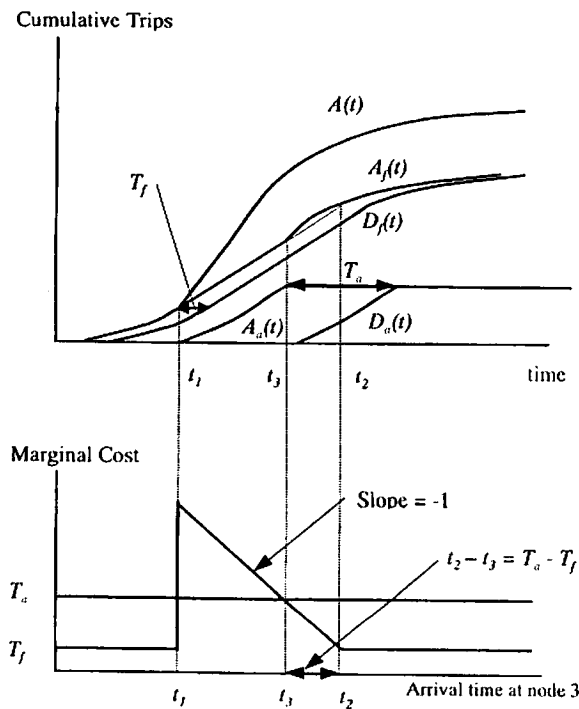


図-11 DSOの最適解

DSOの基本方針はここに見られるように、自由走行時間の短い経路（この場合は高速道路）に、ちょうど容量に等しい需要を配分することである。この基本方針はかなり一般性があり、2本だけでなくより多くの経路が起終点間にある場合でも、自由走行時間の短い経路から順番に容量一杯まで需要を配分していくことがDSOの戦略である²³⁾。

DSOのように直接交通需要そのものを制御するのであれば、Point QueueであってもPhysical Queueであっても制御方針はほとんど変わらないであろう。この例の場合、高速道路に待ち行列が多少発生する時間帯があるが、Physical Queueの場合でもこの待ち行列がノード3に達しない限り、全く同じ制御でDSOは達成される。

4. 出発時刻の選択

ここまでは、すべて空間的な経路選択に関する動的な解析について述べてきた。動的な解析では時間軸が追加されるため、利用者の選択肢としてトリップの出発時刻も含めて考えることが自然であろう。出発時刻選択に関する研究は、勤務開始時刻という明確な時間的な制約のある通勤交通を対象に1960年代後半からVickrey³⁷⁾、Henderson¹⁷⁾などの経済学者によって混雑料金制の分析の一環として始められた。旅行費用として、混雑による費用と勤務開始時刻と実際の到着時刻のズレによる費用（スケジュール費用）を考慮しながら、通勤者の出発時刻を決定するという問題である。交通分野では、1970年代から単一のボトルネックにおける決定論的な待ち行列理論を用いた分析が、Hurdle^{21,22)}、Hendrickson et al.^{18,19,20)}、Fargier¹⁶⁾、Smith³⁶⁾、Daganzo¹³⁾等によって行われ、費用関数による解の特性、解の存在・唯一性などの理論的基礎が固められていった。その後、この単一ボトルネックにおける分析は、複数ボトルネックネットワークにおける分析、費用関数に個人差がある場合への拡張、ランダム効用理論の適用等へと発展していった。

(1) 単一ボトルネックにおける分析

a) 問題の概要

住居と勤務地を結ぶ1本の道路があり、その道路上にボトルネックが1ヶ所存在しているネットワークを考える。全ての利用者は、固定のサービス容量 μ (所与) を持つボトルネックを通過して勤務地に通勤する。各利用者は、勤務地への希望到着時刻 t_w (勤務開始時刻) を持つ。ここで、勤務地への希望到着時刻の分布 $W(t)$ を次のように定義する。

$W(t_w)$ = 時刻 t_w 迄に勤務地への希望到着時刻を持つトリップ数 (所与)

希望到着時刻 t_w を実際の勤務開始時刻からボトルネックと勤務地間の静的な自由走行での移動時間を差し引いた時刻と考えれば、 t_w は、ボトルネックからの希望流出時刻と考えることができる。

出発時刻選択問題は、この希望到着時刻の分布 $W(t)$ とボトルネックのサービス容量が与えられた時に、ボトルネックへの累積流入量 $A(t)$ を決定する問題である。ただし、

$A(t)$ = 時刻 t 迄にボトルネックに流入したトリップ数

$D(t)$ = 時刻 t 迄にボトルネックを流出したトリップ数

希望到着時刻 t_w を持つ通勤者が、時刻 t にボトルネックを流出した場合の旅行費用 $p(t, t_w)$ を次のように定義する。

$$p(t, t_w) = f_w\{w(t)\} + f_s\{s(t, t_w)\} \quad (16)$$

$w(t)$ = 時刻 t にボトルネックを流出した場合のボトルネックでの待ち時間

$s(t, t_w)$ = 希望到着時刻 t_w を持つ利用者が時刻 t にボトルネックを流出した場合のスケジュールディレイ = $t_w - t$

$f_w\{w\}$ = ボトルネックでの待ち時間 w を費用に変換する関数

$f_s\{s\}$ = スケジュールディレイ s を費用に変換する関数

Cumulative Trips

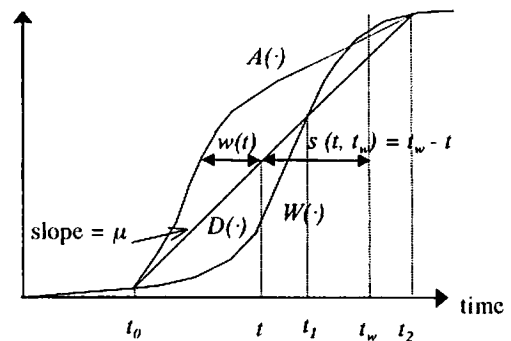


図-12 単一ボトルネックでの累積分布

希望到着時刻 t_w をもつ利用者を見た場合、旅行費用 $p(t, t_w)$ は、ボトルネックでの待ち時間によるもの $f_w\{w(t)\}$ 、スケジュールディレイによるもの $f_s\{s(t, t_w)\}$ のから構成されている。静的な自由走行での移動時間は出発時刻の選択に関わらず各利用者にとっては固定値なので、考慮する必要はない。

時刻 t にボトルネックを流出した利用者のボトルネックでの待ち時間 $w(t)$ は、待ち行列を物理的な長さを持たない Point Queue と考え、待ち行列システムに FIFO を仮定すれば、図 12 のように流出時刻のみの関数として表現できる：

$$w(t) = t - A^{-1}(D(t)) \quad (17)$$

また、スケジュールディレイは、移動時間が静的であるという仮定より、図 12 のように $s(t, t_w) = t_w - t$ と表すことができる。

各利用者は自分の希望到着時刻 t_w を持っており、各自の旅行費用 $p(t, t_w)$ を最小にするように、ボトルネックからの流出時刻 t を選択するものとする。すなわち、均衡状態とは各利用者が現在の流出時刻よりも旅行費用を小さくする時刻を見つけれない状態を言う。

b) First In First Work 原則

まず、本問題を解くに当たっての重要な性質である First In First Work 原則について説明する。FIFW 原則とは、希望到着時刻の早い順にボトルネックに流入するという原則である。待ち行列内では FIFO

が成立するので、FIFW 原則は、希望到着時刻の早い順にボトルネックを流出するという原則とも言え、これによって、流出時刻 t と希望到着時刻 t_w が、 $t_w(t) = W^{-1}(D(t))$ 、あるいは $t(t_w) = D^{-1}(W(t_w))$ として関係づけられる。FIFW 原則はスケジュールコスト関数 $f_s(s)$ が s について凸であれば成立することが Daganzo¹³⁾によって証明されている。FIFW が成り立つ場合には、 $D(t)=W(t_w)$ の関係が成り立つので、所与である $W(t)$ に適切な待ち行列開始時刻 t_0 から傾き μ をもつ $D(t)$ を重ね合わせれば、スケジュールディレイは $D(t)$ と $W(t)$ の間の水平距離としてすべての流出時刻 t あるいは希望到着時刻 t_w について評価できることになる。

FIFW は、 $f_s(s)$ が厳密に凸であれば希望到着時刻 t_w を持つ利用者は、流出時刻 $t=D^{-1}W(t_w)$ のときに旅行費用が唯一の最小値をとることを意味している。一方、 $f_s(s)$ が s について線形のように厳密には凸でない場合には、FIFW を満足しない希望到着時刻と流出時刻の関係もあることになる。つまり、各個人の費用を最小にするような流出時刻は1つに定まらないが、FIFW を満足する流出時刻も解の1つである。この意味で、線形関数の場合も含めて、 $f_s(s)$ が s について凸の場合には FIFW が成立するものとして解析することができる。

c) 時間的均衡条件

さて、利用者は自分の旅行費用が最小になるようにボトルネックからの流出時刻 t を選択すると仮定しているので、最適な流出時刻 t は次の条件を満足する。

$$\frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t} = 0 \quad (18-a)$$

これは流出時刻 t に着目した時間的均衡条件であるが、希望到着時刻 t_w に着目して均衡条件を次のように求めることもできる (付録2参照)。

$$\frac{d p(t, t_w)}{d t_w} = \frac{d f_s\{s(t_w)\}}{d s(t_w)} \quad (18-b)$$

FIFW の条件を考慮しながら時間的均衡条件(18-a)に

式(16)を代入すると、 $w(t)$ を次のように求めることができる。

$$w(t) = f_w^{-1} \left[\int_{t_0}^t f_s\{s(x)\} dx \right] \quad (19)$$

ここに、 t_0 = 待ち行列発生時刻、
 $w(t_0) = 0$

すなわち、与えられている $W(t)$ に適切な待ち行列開始時刻 t_0 から傾き μ を持つ $D(t)$ を重ね合わせることによって、スケジュールディレイ $s(t)$ が全ての時刻 t について決定できる。この $s(t)$ を上式に代入して $w(t)$ を求めれば、 $A(t)$ も決めることができる。

待ち行列開始時刻 t_0 の決め方であるが、待ち行列が終わる時刻 t_2 において、 $A(t_2) = D(t_2) = W(t_2)$ となることが条件となる。すなわち、以下の条件を満たすように t_0 を決める必要がある。

$$A(t_2) - A(t_0) = \mu(t_2 - t_0) = W(t_2) - W(t_0) \quad (20)$$

このように $A(t)$ 、 $D(t)$ 、 $W(t)$ の3種類の累積曲線が、待ち行列開始時刻 t_0 と終了時刻 t_2 で1点で交わるような累積曲線 $A(t)$ 、 $D(t)$ の存在と唯一性については、Smith²⁰⁾、Daganzo¹³⁾、Kawahara²⁴⁾らによって証明されている。証明の詳細はこれらの文献を参照されたいが、結論としては、もしも $f_s(s)$ が s について凸で、 $f_w(w)$ が w について単調増加で $f_w(0)=0$ であるなら、時間的均衡条件を満たす累積曲線 $A(t)$ 、 $D(t)$ は唯一に存在するというものである。ここで留意すべきは、 $f_s(s)$ が線形のように厳密に凸でない場合には累積曲線 $A(t)$ 、 $D(t)$ は唯一に求められるが、FIFW の説明で述べたように利用者の流出時刻 t は唯一に決められないことである。すなわち利用者のボトルネックへの流入・流出の順番は唯一に決まらないが、 $A(t)$ と $D(t)$ の形状は唯一に決まることである。

(2) 単一ボトルネック分析の拡張

a) 複数のボトルネックを持つネットワークへの拡張

前述の出発時刻選択問題に関する研究を、複数存在するボトルネックを持つネットワークに発展させようとする研究がいくつか行われている。

Kuwahara et. al.^{24, 25)}は、Many-to-One のODパターンを持つ図13のようなネットワークを分析している。利用者が勤務地にアクセスするためには、必ず1回いずれかのボトルネックを通過しなければならないという制約下で、複数のボトルネックにおけるそれぞれの累積到着分布を求める方法を提案している。まず、旅行費用にボトルネックに関わる待ち時間費用とスケジュール費用に加えて、移動に要する静的な費用を追加する。そして、希望到着時刻に関する時間的均衡条件(18-b)とボトルネック選択を組み合わせて同時に解く方法である。

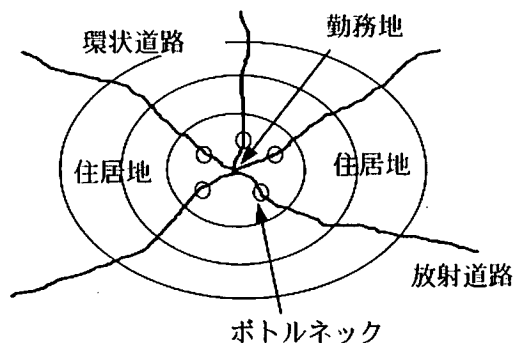


図-13 複数ボトルネックが存在するネットワーク

このほかの複数ボトルネック分析としては、図14のように、2つの連続するボトルネック (Tandem Bottleneck) における研究が、Kuwahara²⁶⁾や Arnott et. al.⁹⁾らによって行われている。住居地2に住む利用者は両方のボトルネックを、また住居地1に住む利用者は下流側のボトルネックだけを通過して勤務地に向かうことができる場合の出発時刻選択問題である。

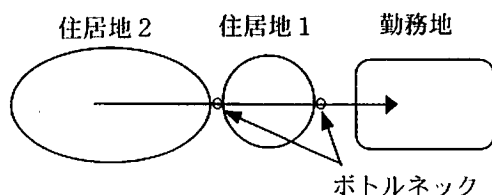


図-14 2つの連続するボトルネックを持つネットワーク

最近では、Akamatsu and Kuwahara⁹⁾、Bernstein et. al.¹²⁾、Ran Bin et. al.³⁴⁾が、より一般的なネットワークにおける出発時刻と経路の同時選択問題の定式化を提案している。これらの研究は、本稿で解説してきたボトルネックに着目した分析ほど詳細に詰められたレベルには達していないが、今後の期待される研究である。

b) 旅行費用関数に個人差がある場合への拡張

これまでの研究では、費用関数 $f_w(w)$, $f_s(s)$ は全ての利用者に共通の関数形であったが、Newell³²⁾は単一ボトルネックにおいて、これらに個人差がある場合にも、時間的均衡条件を満たす解が求められることを示している。すなわち、 $f_w(w)$, $f_s(s)$ の関数形に個人差がある場合であっても、すべての利用者の時間的均衡条件を満たす待ち時間 $w(t)$ が求められる。これをロードプライシングに当てはめてみよう。 $w(t)$ をプライシングの課金額、 $f_w(w(t))$ を課金の知覚コストと見直せば、利用者の料金価値に差がある場合であっても、ボトルネック待ち行列がなくせるような時間的にダイナミックなプライシング $w(t)$ が存在しうることを示唆している。

c) ランダム効用理論に基づいた出発時刻選択

De Palma et al.¹⁵⁾は、決定論的な待ち行列モデルとランダム効用理論を組み合わせ、従来のモデルを確率的なものに拡張している。この分析は、単一ボトルネック問題で、希望到着時刻がすべての利用者 N 人について同じ場合であり、費用関数 $f_w(w)$, $f_s(s)$ は線形を仮定したものである。

これらの研究の課題は、希望到着時刻をすべての利用者に同一の時刻を仮定しており、希望到着時刻が分布する場合について分析されていないことである。もう一つの課題は、OD が1つの場合に限定されていることである。Ben Akiva et al.^{10, 11)}らは、1ODではあるが複数の平行経路 (各経路には1つずつだけボトルネックが存在する) がある場合についてモデルを発展させているが、この場合についても、解析的に解くことが難しく、確率的な取り扱いを如何により一般的なネットワークに拡張していくかが今後の課題であろう。

5. 今後の課題

動的交通流解析について、Physical Queue の取り扱い、DUO/DUE/DSO 配分問題、出発時刻選択問題について述べてきたが、これらの今後の課題を総括的にまとめる。

DUE においては、まず Point Queue について、Many-to-Many の OD を持つネットワークにおける定式化と問題の性質（解の存在性・唯一性）および効率的な解法のアルゴリズムの提案が課題として残されている。Many-to-One あるいは One-to-Many の問題は、問題を分解して解くことができている²⁷⁾ので、これらを重ね合わせることで、Many-to-Many へ拡張することが期待できる。

また、DUE は変分不等式問題、非線形相補性問題、不動点問題に置き換えることができるので、これらの数学的問題に変換して数学的性質と解法のアルゴリズムを提案するアプローチも考えられている。この部分に関する包括的な解説は赤松²⁾に詳しい。特に赤松ら^{3,4,8)}は、Many-to-One あるいは One-to-Many の DUE を変分不等式、非線形相補性問題に置き換えて効率的な計算アルゴリズムを提案している。

DSO については、目的関数が簡単に定義できるので最適化問題としての定式化は困難ではない。特に、Many-to-One あるいは One-to-Many の場合には、LP として定式化され計算アルゴリズムも提案されている^{14, 38)}。しかし、Many-to-Many の OD を持つ一般ネットワークについては、凸計画問題とはならないことが知られており、この場合のアルゴリズムの提案は課題の一つである。

一方、DSO の場合には、第3章で用いたような簡単なネットワークにおいても理論的な解がきちんとまとめられてはおらず、アルゴリズム提案と平行して行うべき理論研究である。本稿では、2経路でしかも1つの経路にしか待ち行列が生成されない単純なケースしか触れなかったが、両経路に待ち行列が生成される場合や経路の相互干渉のある場合についても検討中である。このような分析を通して、どのような待ち行列の発生パターンが起こり得るのか、システム最適な配分戦略とはどのような戦略なのか

を、定性的ではあるが一般性を持って知ることができる。

さらに、本稿で扱った DSO は、需要そのものを制御してシステム最適を達成するという問題であった。しかし、現実には需要そのものを制御すると言うよりは、プライシングや流入制御などのような経済的・物理的な制御手段を用いて需要を間接的に調整することになる。従って、そのような制御でできる変数を組み込んだ形で、DSO を再考する必要がある。例えば、ランプ流入制御を考えた場合には、如何なる状況に置いてどのようにランプ交通量を調節すべきなのであろうか。流入制御は、言ってみればネットワーク上のあるリンクの容量を絞ることであり、それによってシステム全体の評価指標を向上させられる場合とは、どのような交通状況なのか、さらにいつ、どのくらい容量を絞るべきであろうか。動的な解析では、静的な解析ではあまり起こり得なかった現象、例えばリンク容量を上げたことによって、かえって総遅れ時間が増えてしまうなどの興味深い現象が、より頻繁に起こり得るという報告もある^{14,6,7)}。これらを踏まえて、上記のような基本的な点を整理することは、極めて重要であろう。

Physical Queue を用いた解析は DUO では既に行われている²⁹⁾が、DUE、DSO では未だに行われていない。複雑な Physical Queue の延伸状況の再現については、数理的モデルでどこまで対応できるのか、対応できたとしても効率的なアプローチなのか、筆者も確信は持てないところである。これに対し、トラフィックシミュレーションを用いたアプローチがある。単に Physical Queue の延伸状況だけでなく、レーン別の規制や信号制御などといったネットワーク細部にわたる制御変数を組み込んで、その評価を行うのには有効なツールであろう。

このようにシミュレーションは、単純ルールの積み重ねによって交通状況を再現する便利なツールである。しかし、1つ1つのルールは単純であっても、それがたくさん重ね合わされると、それらの相互作用が複雑になり、中身がブラックボックス化してしまう。また、ルールの重ね合わせ方を間違えると、意図しない結果も生まれる。このようなシミュレーションが抱える課題をサポートする上で、理論研究が

必要となる。特に、理論研究に期待されることは、シミュレーションに利用される一般性のあるルールを見つけだすこと、シミュレーションのアウトプットを検証するための理論的な答えを（検証可能な比較的単純なネットワークについて）用意しておくことである。

さらにシミュレーションは、ある道路幾何構造や交通条件に特化した現象を表現するには適しているが、一般性のある結論を導き出すことには向いていない。一般性を保証するためには、必ず理論的な裏付けが必要であり、この意味においてもシミュレーションと理論研究は共存する方向で研究を進めるべきである。

出発時刻選択問題については、個人差の考慮が比較的短期間で達成可能な、しかも意義のある課題ではないだろうか。今のところ、旅行費用に個人差がある場合については、単一ボトルネックにおいて、線形の費用関数を用いた研究³²⁾があるのみである。個人差の考慮は、今後のロードプライシング、フレックスタイム制、時差出勤、旅行予約制などの政策評価に際して重要な課題であろう。

対象とするネットワークの一般化は、大きな課題である。理想的には、出発時刻選択問題を Many-to-Many の OD を持つネットワークに拡張することである。言い換えれば、出発時刻選択と経路選択を組み合わせることである。One-to-Many の OD で1回だけボトルネックを通過する場合には、希望到着時刻というある特定の時刻に着目して、問題をその時刻で分解して解くことができた^{24, 29)}のであるが、Many-to-Many の OD の場合には、効率的に複雑な問題を分解して解くことができていない。先に述べたように、この同時選択問題の定式化は最近いくつか試みられているが^{5, 12, 34)}、単一ボトルネック分析から得られている知見との整合性チェック、計算アルゴリズムの提案等の検討は、今後に残されている課題である。また、単一ボトルネック問題のような簡単なネットワークでは、Physical Queue の考慮の必要性は無かったが、一般的なネットワークに拡張して経路選択を考慮する場合には、Physical Queue の取り扱いが必要となるであろう。

6. おわりに

本論文では、ネットワーク解析における交通流の動的解析について述べた。まず、車両走行軌跡を表すタイムスペースダイアグラムを3次的に表現することによって累積交通量図との関係を解説した。また、物理的な長さを持つ Physical Queue における累積交通量図の求め方を Kinematic Wave 理論に基づいて解説し、リンク旅行時間などの交通状況の評価方法を示した。次に、DUO（動的利用者最適配分）、DUE（動的利用者均衡配分）、DSO（動的システム最適配分）という3種類の配分理論について、これまでの知見を整理した。最後に、経路選択とともに利用者の選択肢として考慮すべき出発時刻選択について、近年の理論的な研究成果をレビュー解説するとともに、今後の研究課題をまとめた。本論文が、今後の動的ネットワーク解析の発展の一助になれば幸いである。

今回の論文賞は、豊橋技術科学大学の赤松隆助教授との共同受賞であった。彼とは長年にわたってネットワークの数学的な解析について、数多くのディスカッションを行い、今回の受賞対象となった数編の論文を完成させることができた。お互いに興味は同じで、しかも少しだけ得意分野が違っていたことが幸いして、よき協力者になり得ていると思う。

これら数編の論文完成に当たっては、数多くの研究者との意見交換が有益であったことは言うまでもなく、ここに改めて謝意を表したい。さらに、論文の仕上げ段階で惜しめない協力をしていただいた私の研究室の職員に感謝いたします。

付録1: 特性曲線について

交通量保存則より、交通流率と交通密度の間には、

$$\partial k(x,t) / \partial t = \partial f(x,t) / \partial x$$

の関係があることがわかっている。また、交通流率の全微分は、

$$\begin{aligned} df(x,t) &= \partial f(x,t) / \partial t \cdot dt + \partial f(x,t) / \partial x \cdot dx \\ &= \{ \partial f(x,t) / \partial t + \partial f(x,t) / \partial x \cdot dx/dt \} \cdot dt \end{aligned}$$

のように書け、これに交通量保存則を代入すると、

$$df(x,t) = \{ \partial f(x,t) / \partial t + \partial k(x,t) / \partial t \cdot dx/dt \} \cdot dt$$

となる。さらに、タイムスペースダイヤグラム上で、 $-dx/dt = \partial f / \partial k$ となる Backward Wave の軌跡上を考えると、

$$df(x,t) = \{ \partial f(x,t) / \partial t - \partial k(x,t) / \partial t \cdot \partial f(x,t) / \partial k(x,t) \} \cdot dt = 0$$

となる。このように交通流率 $f(x,t)$ が変化しない軌跡は、特性曲線 (Characterstic Curve) と言われている。このことから時刻 t のリンク下流端の交通流率 $f(0,t)$ と同じ流率は、Backward Wave の軌跡に沿って上流にさかのぼる。

付録2: 希望到着時刻に着目した時間的均衡条件
旅行費用の全微分をとると、

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, t_w)}{dt_w} &= \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t_w} + \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t} \frac{dt}{dt_w} \\ &= \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t_w} - \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

従って、FIFW より流出時刻 t は希望到着時刻 t_w の関数となるので、次のように書くことができる。

$$\frac{dp(t, t_w)}{dt_w} = \frac{\partial p(t, t_w)}{\partial t_w} = \frac{\partial f_s \{s(t_w)\}}{\partial s(t_w)} \frac{\partial (t_w - t)}{\partial t_w} = \frac{df_s \{s(t_w)\}}{ds(t_w)}$$

参考文献

- 1) 赤松 隆、桑原雅夫：渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分、土木学会論文集, No. 488/IV-23, pp.21-30, 1994.
- 2) 赤松隆：交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論、土木計画学研究・論文集 13, pp.23-48, 1996.
- 3) 赤松隆、高松望：動的な利用者均衡配分の効率的解法、土木計画学研究・講演集, No.20, pp. 549-552, 1996.
- 4) 赤松隆・大石直史：動的利用者均衡配分の

数値解法の比較実験、土木計画学研究・講演集, No.20, pp. 287-290, 1997.

- 5) Akamatsu T. and Kuwahara M. : Dynamic Network Equilibrium Model of Simultaneous Route/Departure Time Choice for a Many-to-One OD Pattern, submitted to Transportation Research B.
- 6) Akamatsu T. : A Dynamic Traffic Equilibrium Assignment Paradox, submitted to Transportation Research B.
- 7) Akamatsu T. and Kuwahara M. : A Capacity Increasing Paradox for a Dynamic Traffic Assignment with Departure Time Choice, submitted to the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory.
- 8) Akamatsu T. : An Efficient Algorithm for Dynamic User Equilibrium Assignment for a One-to-Many / Many-to One OD Pattern, submitted to Transportation Science.
- 9) Arnott R., De Palma A., and Lindsey R.: Properties of Dynamic Traffic Equilibrium Involving Bottlenecks, Including a Paradox and Metering, Transportation Science Vol.27, No.2, pp.148-160, 1993.
- 10) Ben Akiva M., Cyna M., and De Palma A.: Dynamic Model of Peak Period Congestion, Transportation Research Vol.18B, No.4/5, pp.339-335, 1984.
- 11) Ben Akiva M., De Palma A., and Kanaroglou P.: Dynamic Model of Peak Period Traffic Congestion with Elastic Arrival Rates, Transportation Science, Vol.20, No.2, 1986.
- 12) Bernstein D., Friesz T.L., Tobin R.L., and Wie B.W. : A Variational Control Formulation of the Simultaneous Route and Departure Choice Equilibrium Assignment, Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp.107-126, 1993.
- 13) Daganzo C.F.: The Uniqueness of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, Transportation Science, Vol.19, pp.29-37, 1985.
- 14) Daganzo F.D. : Queue Spillovers in Transportation

- Networks with a Route Choice, accepted in Transportation Science, 1998.
- 15) DePalma A., M.Ben-Akiva, C.Lefevre, and N.Litinas: Stochastic Equilibrium Model of Peak Period Traffic Congestion, Transportation Science, Vol.17, No.4, 1983.
 - 16) Fargier P.H.: Effects of the Choice of Departure Time on Road Traffic Congestion, Proceedings of the Eighth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Toronto, Canada, 1981.
 - 17) Henderson J.V.: Road Congestion - A Reconsideration of Pricing Theory, Journal of Urban Economics 1, 1974.
 - 18) Hendrickson C., and Kocur G.: Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, Transportation Science, Vol.15, No.1, 1981.
 - 19) Hendrickson C., Nagin D., and Plank E.: Characteristics of Travel Time and Dynamic User Equilibrium for Travel-to-Work, Proceedings of the Eighth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Toronto, Canada, 1981.
 - 20) Hendrickson C., and Plank E.: The Flexibility of Departure Times for Work Trips, Transportation Research, Vol.18A, No.1, 1984.
 - 21) Hurdle V.F.: The Effect of Queuing on Traffic Assignment in a Simple Road Network, Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Sydney, 1974.
 - 22) Hurdle V.F.: Equilibrium Flows on Urban Freeways, Transportation Science, Vol.15, 1981.
 - 23) 熊谷香太郎、桑原雅夫、吉井稔雄：動的システム最適配分の基本的性質に関する考察、第53回土木学会年次学術講演会 IV-5、1998.10.
 - 24) Kuwahara M.: A Time-Dependent Network Analysis for Highway Commute Traffic in a Single Core City, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley, Dissertation Series, UCB-ITS-DS-85-2, 1985.
 - 25) Kuwahara M., and Newell G.F.: Queue Evolution on Freeways Leading to a Single Core City during the Morning Peak, Proceedings of the 10th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp.21-40, Boston, 1987.
 - 26) Kuwahara M.: Equilibrium Queuing Patterns at a Two-Tandem Bottleneck during the Morning Peak, Transportation Science Vol.24, No.3, pp.217-229, 1990.
 - 27) Kuwahara, M. and Akamatsu, T. : Dynamic Equilibrium Assignment with Queues for a One-to-Many OD Pattern, the proceedings of 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, pp.185-204, Elsevier, Berkeley, 1993.
 - 28) Kuwahara M. and Akamatsu T. : Decomposition of the Reactive Dynamic Assignments with Queues for a Many-to-Many Origin-Destination Pattern, Transportation Research, Vol.31B, No.1, pp.1-10, 1997.
 - 29) 桑原雅夫、赤松 隆：多起点多終点ODにおける渋滞延伸を考慮したリアクティブ動的利用者最適交通量配分、土木学会論文集, No. 555/ IV-34, pp.91-102, 1997.
 - 30) Lighthill, M.J. and Whitham, G.B. : On Kinematic Waves I: Flood Movement in Long Rivers, II: A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Proceedings Royal Society, London, A229, pp.281-345, 1955.
 - 31) Makigami Y., Newell G.F. and Rothery R. : Notes on Freeway Capacity, Highway Research Record No.27, Highway Research Board, Washington D.C., 1971.
 - 32) Newell G.F.: The Morning Commute for Non-Identical Travelers, Transportation Science, Vol.21, No.2, pp.74-88, 1985.
 - 33) Newell, G.F. : A Simplified Theory of Kinematic Waves in Highway Traffic, Part II: General Theory, Transportation Research, Vol.27B, No.4, pp.289-304, 1993.
 - 34) Ran, B., R.W.Hall and D.E.Boyce : A Link-based Variational Inequality Model for Dynamic Departure Time / Route Choice. Transportation Research 30B, pp.31-46, 1996.
 - 35) Richards P.I. : Shock Waves on the Highway,

- Operations Research, 4, pp.42-51, 1956.
- 36) Smith M.J.: The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, International Symposium on Frontiers in Transportation Equilibrium and Supply Models, Montreal, 1981.
 - 37) Vickrey W.S.: Congestion Theory and Transportation Investment, American Economic Review 59, 1969.
 - 38) Ziliaskopoulos A.K. : A Linear Programming Model for the Single Destination System Optimum Dynamic Traffic Assignment Problem, Transportation Research Board presentation preprint, Washington, D.C., 1997.