研　究　速　報
研 究 速 報

道路交通における動的な混雑料金の理論的考察

—個人差を考慮した出発時刻選択問題—

A theoretical analysis on dynamic road pricing for highway traffic —Departure time choice considering individual variation in time value—

井 料 隆 雅*・桑 原 雅 夫*
Takamasa IRYO, Masao KUWAHARA

1．は じ め に

朝のラッシュ時になると，都市の各所では，激しい渋滞が発生する．このような渋滞は，時間の無駄になるばかりではなく，排気ガスによる公害を招いたりするなど，多くの社会的損失をもたらすものである．

このような渋滞を緩和する方策の一つとして，ラッシュ時に業務中心地に向かう車に対して，混雑料金を課す，という施策が知られている．これは「ピークロードプライシング」と呼ばれている．

一方，渋滞の待ち時間に対して感じる時間価値は各個人によって異なるのが自然と考えられ，混雑料金を考える際には，このような個人差を考慮するのが重要かと思われる．

本稿では，特に個人差を考慮した上で，混雑料金に関する理論的な考察を行う．

2．個人差を考慮した出発時刻選択問題による渋滞の解析

ピークロードプライシング政策は，利用者に出発時刻を調整する動機づけを与える，という点に意味がある．利用者が出発時刻を選択する問題を「出発時刻選択問題」と呼び，これまでいくつかの研究の蓄積がある[1]．個人差を扱ったものにはNewellの論文[2]があるが，混雑料金問題に拡張するにはやや難があったので，今回，改めて理論を再構築した．

いま，居住地と勤務地が一本の道路で結ばれ，そこに単一ボトルネックがある状態を考える（図1）．この道路は，基本的には容量に制限がないが，ボトルネックの部分に限って容量に上限がある．すると，利用者はボトルネックの手前で，ボトルネックを通り抜けるのを待つ．この待つことが「渋滞」であり，ボトルネックに入る時刻をt_a，ボトルネックを出る時刻をt_dとすると，FIFOサービスを仮定することにより，t_aはt_dの関数と表すことができるので，ボトルネックで待たされる時間は

$$w(t_d) \equiv t_d - t_a(t_d) \quad \cdots\cdots(1)$$

と表される．そして，この$w(t_d)$が，この理論で最終的に知るべきものである．一方，利用者は，勤務開始時刻を持ち，その時刻には必ず間に合うように行動するとする．いま，ボトルネックから勤務地までの所要時間が変化しないとすると，各利用者は，勤務開始時刻の代わりに希望ボトルネック出発時刻t_wを持つ．

そして，このとき，各利用者の一般化交通費用pとして，

$$p = c_w w(t_d) + c_s(t_w - t_d)\ (\text{ただし}\ t_d \le t_w) \quad \cdots\cdots(2)$$

という形を仮定する．ここで，c_wは渋滞の単位待ち時間に対応するコスト，c_sは勤務地で勤務時間を待つ単位時間に対応するコストである．ここで，居住地からボトルネックまでの所要時間が変化しないとすると，ボトルネック到着時刻t_aがt_dの関数であることより，出発時刻を選択することは，ボトルネック出発時刻t_dを選択するのと等価となる．ゆえに，各利用者は，式(2)を最小化するようにt_dを選択する．すなわち，

$$\frac{dp/c_w}{dt_d} = \frac{dw}{dt_d} - \gamma = 0$$

$$\text{かつ}\ t_d < t_w\ (\text{勤務地に早く着く＝早着者}) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\text{または}\ t_d = t_w\ (\text{勤務地に定時に着く＝定時着者}) \quad \cdots(4)$$

を満たすt_dから，pを最小化するt_dを選ぶこととなる．なお，式(3)はc_wで両辺を除しており，$\gamma \equiv c_s/c_w$である．

*東京大学生産技術研究所　第5部

式(3)，(4)から，以下のことが分かる．

［補題1］ある旅行者が早着者ならば，t_dはγのみの関数となり，定時着者ならば，t_dはt_wのみの関数となる．

では次に，ある旅行者が早着者か定時着者かを判別する方法を考えよう．次に示す補題がそのためのものである．

［補題2］いま，$\hat{\gamma}(t_w) \le \gamma$の人は定時着，$\hat{\gamma}(t_w) > \gamma$の人は早着，という一価関数$\hat{\gamma}(t_w)$を定義できる．

この証明はやや複雑なので，付録に記しておく．補題2を図にしたのが図2である．補題1と補題2により，各利用者の特性はその個人の持つγとt_wとで表現できるので，すべての利用者はこの図上の特定の場所（γ，t_w）に配置され，境界線$\hat{\gamma}(t_w)$により区分される．この図はこの論文で基本的な役割をもつものであり，以下この図を「γ図」と呼ぶことにする．

ここで，定時着者のt_dは当然t_wだが，早着者のt_dがどう決まるかを考えなくてはならない．このための補題が以下のものである．

［補題3］γを持つ早着者のt_dは$\hat{\gamma}(t_d) = \gamma$を満たす$t_d$のうち，$t_d < t_w$でかつ$t_w$に一番近い$t_d$となる（図3）

なお，この証明も付録に記しておく．また，補題3と図3から明らかに分かるように，早着者の到着するt_dでは，必ず$\hat{\gamma}(t_d)$が増加している（逆も成立）．

さて，この補題を使うと，ある時刻t_wに，どれくらいの利用者がボトルネックを出るかが，γ図から計算できる．まず，需要空間にいる利用者の数を，密度関数$\rho(\gamma, t_w)$であらわし，ρの累積関数を，

$$F(\gamma, t_w) = \int_0^{\gamma} \rho(\gamma^*, t_w)\, d\gamma^*$$

$$W(\gamma, t_w) = \int_{-\infty}^{t_w} \rho(\gamma, t_w^*)\, dt_w^* \qquad \cdots\cdots(5)$$

とする．

ここで，ある出発時刻t_dを考えたとき，t_dにボトルネックを出る定時着者の数dN_oは，関数$\hat{\gamma}$の定義から，

$$dN_o = dt_d \left\{ F(1, t_d) - F(\hat{\gamma}(t_d), t_d) \right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

と与えられる．（図4の斜線部）（なお，系が安定するには，$\gamma \le 1$でなくてはならない[1]ので，上の式ではγの上限を1としている）

一方，$\hat{\gamma}(t_d)$が増加し，t_dに早着者が存在する際の早着者の数dN_eについては，t_dからt_d+dt_dの間につく人間の持つγが，$\hat{\gamma}(t_d)$から$\hat{\gamma}(t_d+dt_d)$であることより，この範囲のγを持つ早着者の数を合計すればよいので，dt_dを微小量として，

$$dN_e = d\hat{\gamma} \left\{ W(\hat{\gamma}(t_d), t_d^*) - W(\hat{\gamma}(t_d), t_d) \right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

と計算できる（図4の黒色部）．ただし，t_d^*は$\hat{\gamma}(t_d^*) = \hat{\gamma}(t_d)$を満たすもののうち，$t_d$の次に大きいものである（図4）．

ところで，渋滞が発生している状況では，道路容量いっぱいに車が流れていると考えるべきなので，ある単位時間にボトルネックを通る利用者数は，必ずボトルネック容量

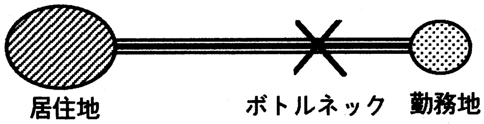

図1　対象とするネットワーク

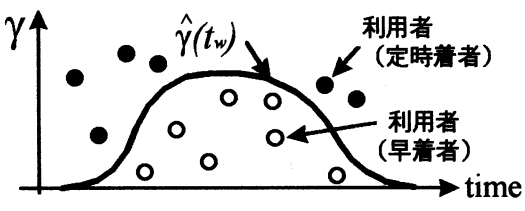

図2　γ - t_w平面上の利用者分布
（利用者はγ - t_w平面に分布する．また，早着者と定時着者を分ける一価関数$\hat{\gamma}(t_w)$を定義できる）

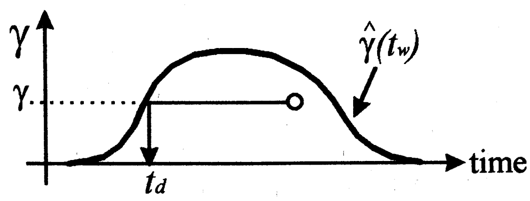

図3　早着者の流出時刻
（（γ，t_w）にいる早着者のt_dは，γと$\hat{\gamma}(t_w)$との交点で表せる．）

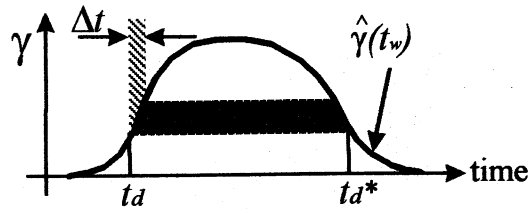

図4　流出時刻t_dの流出者
（斜線＋黒色の利用者がΔtの部分に流出する．流出量は渋滞中は常に道路容量と等しくなる．）

と等しくなる（図4）．これを用いると，渋滞中では，

$$\mu = F\left(1, t_d\right) - F\left(\hat{\gamma}\left(t_d\right), t_d\right) + \frac{d\hat{\gamma}}{dt_d}\left\{W\left(\hat{\gamma}\left(t_d\right), t_d^*\right) - W\left(\hat{\gamma}\left(t_d\right), t_d\right)\right\}\left(\frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} > 0\right) \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\mu = F\left(1, t_d\right) - F\left(\hat{\gamma}\left(t_d\right), t_d\right)\left(\frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} \le 0\right) \quad \cdots\cdots(9)$$

という式が成り立つ．（μはボトルネック容量である）

また，渋滞終了時刻t_1は，需要が容量に等しくなる時刻（$\mu = F(1, t_1)$）で，かつそれ以降需要が容量を越えない時刻である．このときは，明らかに，

$$\hat{\gamma}\left(t_1\right) = 0 \text{ かつ } \frac{d\hat{\gamma}}{dt_d} \le 0 \quad \cdots\cdots(10)$$

である．

以上により，式(10)で求まるt_1を起点とし，式(8)と式(9)を時間をさかのぼりながら解くことにより，$\hat{\gamma}(t_w)$を一意に決めることが出来ることが分かる．

次に，$w(t_d)$の計算を考える．t_dが早着者のいる時刻（$\hat{\gamma}(t_d)$が増加する時刻）であれば，式(3)より，$\frac{dw}{dt_d} = \gamma$が成立する．また，補題3から，$\hat{\gamma}(t_d) = \gamma$なので，これらを合わせて，積分することにより，

$$w\left(t_d\right) = \int_{t_0}^{t_d} \hat{\gamma}\left(t_w\right) dt_w \quad \cdots\cdots(11)$$

と，$\hat{\gamma}(t_w)$により表記できる．（t_0は$w(t_0) \equiv 0$と定義）

一方，t_wが早着者がいない時刻（$\hat{\gamma}(t_w)$が減少する時刻）である時を考える．いま，図5のγ図上で点A（$\hat{\gamma}(t_w)$, t_w-δ）に居る人（ただし$\delta \to +0$）を考えると，補題2よりこの人は早着者となり，その人のコストは，

$$p / c_w = w\left(t_d\right) + \hat{\gamma}\left(t_w\right)\left(t_w - t_d\right) + Ord\left(\delta\right)$$

ただし，t_dは$\hat{\gamma}\left(t_d\right) = \hat{\gamma}\left(t_w\right)$かつ$t_d < t_w$を満たす最大のもの　　　$\cdots\cdots(12)$

となる（図5の斜線部）．一方，γ図上で点B（γ, t_w）にいる人のコストは，この人が定時着者になることより，

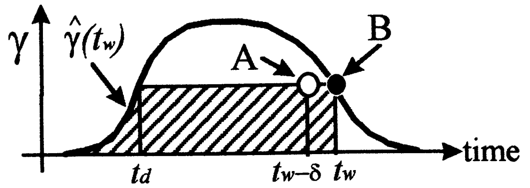

図5　γ, t_w利用者のコスト
（Aの人とBの人のコストは連続するため，Bの人のコストは斜線部で表すことが出来る．）

$$p / c_w = w\left(t_w\right) \quad \cdots\cdots(13)$$

となる．この両者のコストは，コストの連続性を考えると，$Ord(\delta)$の差しかないはずなので，結局，

$$w\left(t_w\right) = w\left(t_d\right) + \hat{\gamma}\left(t_w\right)\left(t_w - t_d\right)$$

ただし，t_dは$\hat{\gamma}\left(t_d\right) = \hat{\gamma}\left(t_w\right)$かつ$t_d < t_w$を満たす最大のもの　　　$\cdots\cdots(14)$

となる．

以上により，利用者の需要の特性（すなわち$\rho(\gamma, t_w)$）と容量μを与えれば，まず式(5)から式(10)により$\hat{\gamma}$を決定でき，それを用いて，式(11)から式(14)により$w(t_d)$を決定できる．すなわち，利用者の需要の特性と容量から渋滞の状況を知る方法が分かったことになる．

3．個人差が混雑料金に与える影響

混雑料金について議論するには，式(2)に料金の項を足す必要がある．すなわち，

$$p = c_w w\left(t_d\right) + c_s\left(t_w - t_d\right) + \chi\left(t_d\right) \quad \cdots\cdots(15)$$

となる．いま，$\chi(t_d)$は時刻t_dにボトルネックを出る人に課される料金である．ここで，

$$w^*\left(t_d, c_w\right) \equiv w\left(t_d\right) + c_w^{-1}\chi\left(t_d\right) \quad \cdots\cdots(16)$$

と定義すると，

$$p = c_w w^*\left(t_d, c_w\right) + c_s\left(t_w - t_d\right) \quad \cdots\cdots(17)$$

とでき，式(2)と同じ形となる．もし全ての人が同じc_wを持っているのであれば，$w^*(t_d, c_w)$は全利用者に共通の値となるので，これはすでに説明した方法で解くことができる．

一方，c_wが個人によって変化するときは，各c_wごとに異なった$w^*(t_d, c_w)$が求まることとなる．

そして，各c_wごとに，$w^*(t_d, c_w)$をすでに説明した方法で解けばよいのだが，ここで注意しなくてはならないのは，「それぞれのc_wをもつグループは，ある時間内の道路容量を分けあって利用するが，その配分比は時間に依存して変化し得る」点である．それゆえ，$w^*(t_d, c_w)$を知るために必要な各c_wのグループの境界線$\hat{\gamma}(t_w, c_w)$を決めるには，各時刻においての容量配分比をまず知らなくてはならな

い．容量配分を決定する条件は，待ち時間 $w(t_d)$ が各グループで共通であることを考えると，式(16)より，

$$w^*(t_d, c_{w1}) - w^*(t_d, c_{w2}) = \left\{c_{w1}^{-1} - c_{w2}^{-1}\right\} \chi(t_d) \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

となる．
そして，条件(18)が満たされるような $w^*(t_d, c_w)$ になるように，各時間の容量配分比を決定することが出来れば，$w(t_d)$ を導出することが出来ることになる．ただ，この問題を実際に解くのはかなり難しい．

しかし，すべての区間で待ち時間を0にするような，最適な混雑料金 $\chi_0(t_d)$ は比較的簡単に求められる．このような場合，式(15)から待ち時間の項を抜いた式，

$$p = c_s(t_w - t_d) + \chi_0(t_d) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

の χ_o を，利用者最適が満たされるように決定すればよい．この式は式(2)と同じ形状なので，$w(t_d)$ を求めるのと全く同じ手法で $\chi(t_d)$ を求められる．

ただし，c_s の分布は，一般には γ とは異なる．このため，c_w が全員同じ値でなければ，$\chi_0(t_d)$ と混雑料金がないときの $w(t_d)$ とは単純な比例関係にならないことを示している．そのため，個人差を考慮したばあい，新しく混雑料金を設定する際に，単純に渋滞での待ち時間に比例する料金を設定すれば良いとは限らないことが分かる．

4. お　わ　り　に

混雑料金を考える際に，個人差を考えることは，個人差が系に与える影響はもちろんのこと，混雑料金に対する道路利用者の理解を得るためにも重要と考える．今回の理論は，混雑料金などの渋滞緩和政策に個人差の与える影響を評価するのに有用ではないかと考える．

付録（補題の証明）

[補題2] t_w の等しいある2人の旅行者1, 2を考える．この2人のコストは，

$$p_1/c_{w1} = w(t_{d1}) + \gamma_1(t_w - t_{d1})$$
$$p_2/c_{w2} = w(t_{d2}) + \gamma_2(t_w - t_{d2}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

である．ここで，2人の行列上での位置，すなわち t_d を入れ替えると，

$$p_1^*/c_{w1} = w(t_{d2}) + \gamma_1(t_w - t_{d2})$$
$$p_2^*/c_{w2} = w(t_{d1}) + \gamma_2(t_w - t_{d1}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

いま，系が利用者均衡であることを考えれば，
$p_1^* > p_1, p_2^* > p_2$ なので，

$$(p_1^* - p_1)/c_{w1} = w(t_{d2}) - w(t_{d1}) + \gamma_1(t_{d1} - t_{d2}) \geq 0$$
$$(p_2^* - p_2)/c_{w2} = w(t_{d1}) - w(t_{d2}) + \gamma_2(t_{d2} - t_{d1}) \geq 0 \cdots (22)$$

であり，この両辺を足して $(\gamma_1 - \gamma_2)(t_{d1} - t_{d2}) \geq 0$．

以上により $\gamma_1 > \gamma_2$ ならば，$t_{d1} \geq t_{d2}$ である．これにより，(γ, t_w) にいる定時着者のうち，もっとも小さい γ を $\hat{\gamma}(t_w)$ とすると，

$$\hat{\gamma}(t_w) < \gamma \text{の人は，} t_d < t_w \text{（早着者）}$$
$$\hat{\gamma}(t_w) \geq \gamma \text{の人は，} t_d = t_w \text{（定時着者）} \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

とできる（証明終）．
[補題3]

補題1より，早着者の t_d は，t_w によらないので，以下，$\delta \to +0$ として，$(\gamma, t_w) = (\hat{\gamma}(t_{w0}), t_{w0}+\delta)$ にいる早着者のコストと $(\hat{\gamma}(t_{w0}), t_{w0})$ にいる定時着者のコストを比較する．これらはそれぞれ，

$$p_e/c_w = w(t_d) + \hat{\gamma}(t_{w0})(t_{w0} + \delta - t_d) \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

$$p_0/c_w = w(t_{w0}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

となり，コストの連続性を考えると，$\delta \to +0$ では，
$p_e = p_o$，つまり

$$w(t_d) + \hat{\gamma}(t_{wo})(t_{wo} - t_d) = w(t_{wo}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

となる．これが等しくなるのは，$t_d = t_{wo}$ であり，また，$(\hat{\gamma}(t_{wo}), t_{wo})$ の人は，定時着者であり，早着することはないので，これ以外に式(26)を満たす解はない．

以上により $\hat{\gamma}(t_d) = \hat{\gamma}(t_{wo}) = \gamma$（証明終）

（1999年6月10日受理）

参　考　文　献

1）桑原雅夫：道路交通における出発時刻選択に関する研究解説，土木学会論文集，No.604/IV-41,pp73-84，土木学会，1998.1 C.
2）Newell G.F.: The Morning Commute for Non-Identical Travelers, *Transportation Science*, Vol.21, No.2, pp.74-88, 1985.