【土木計画学研究・講演集 No.23(2) 2000年11月】

個人差を考慮した出発時刻選択問題における均衡状態の安定性の解析

An analysis of stability on departure time choice considering individual variation in time value

井料 隆雅* ,桑原 雅夫**
By Takamasa IRYO* and Masao KUWAHARA**

1. はじめに

この研究では，個人差を考慮した出発時刻選択問題を考え，そのときの均衡解が安定になるかどうかについて解析する．

道路交通における通勤などの混雑時の際の渋滞の状況や利用者の行動を解析するための理論的な手段として「出発時刻選択問題」が知られている．出発時刻選択問題は，ある道路ネットワークがあったときに，そこを通過しようとする利用者の数が時間的に集中し，その結果ネットワークの容量を超過するだけの需要が一時的に存在するような状況において，各利用者がどのように自分の道路を利用する時刻を選択しているのか，ということを考える問題である．

出発時刻選択問題の研究は過去にいくつか存在する [1] が，これまでの研究では，すべての利用者が一般化交通費用を最小化した状況で行動を確定する「均衡状態」を考えていた．しかし均衡状態は必ず実現されるものではない．実際に存在が許される均衡状態は微小な摂動に対して安定な状態に限られる．もし微小な摂動が増幅されてしまうようであれば，その均衡状態は外界からのノイズによってすぐ崩壊してしまうことになり，現実の世界で実現することは不可能である．

この研究では，利用者が微小ノイズに対してどう反応し，その結果系の均衡が破れるかどうかについて解析していく．

キーワード：交通行動分析
* 学生員，理修，工修，東京大学生産技術研究所第５部
連絡先：〒153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1
TEL：03-5452-6001 ext.58175
FAX：03-5452-6420
e-mail iryo@nishi.iis.u-tokyo.ac.jp
** 正会員，Ph.D.，東京大学生産技術研究所第５部教授

2. 出発時刻選択問題の定式化

出発時刻選択問題において均衡状態の安定性を考えるには，渋滞の状態が日々どのように変動するかについて考える必要がある．そのために問題の定式化する．

まず，今回考える系を決定する．今回考えるネットワークは，出発エリアが１個，目的エリアが１個あり，そのあいだに容量 μ のボトルネックを１つ含むリンクがただ１本だけあるというものである（図1）．すべての利用者はこの出発地から到着地にこのネットワークを必ず利用して毎日移動を行う．各利用者は自分の出発地を出発する時刻を選択するが，いまボトルネック以外では一定の自由流速度で走行することが可能なので，以下では各利用者はボトルネックを出発する時刻を選択していると考える．この選択時刻を t_d と記す．ボトルネックによる渋滞の遅れ時間は日々変動し，i 日目の遅れ時間を $w_i(t_d)$ と示す．

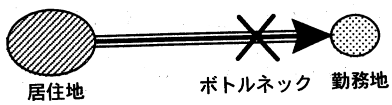

図1: 対象とするネットワーク

すべての利用者は，i 日目に予想される一般化交通費用 p_i を小さい値にするように行動する．このとき，利用者は一般化交通費用を完全に最小化することはなく，費用 p_a の選択肢を選ぶ人の割合と，費用 p_b の選択肢を選ぶ人の割合の比 F は，ある定数 β を用いて，$F = e^{-\beta(p_a - p_b)}$ と表せるとする．一般化交通費用 p_i は時間の次元で表現され，

$$p_i(t_d,\vec{r}) = w_{i-1}(t_d) + q(t_d,\vec{r}) \tag{1}$$

となる．ここで注意すべき点は，渋滞での待ち時間については，前日までの実績か，せいぜい当日の出発地を出発する以前の情報しか得られないということである．利用者はこれら過去の情報から当日発生するであろう待ち時間を予想することになる．今回は，各利用者が予想値として，前日の待ち時間 $w_{i-1}(t_d)$ を用いるという単純な仮定を置いている．$q(t_d,\vec{r})$ は，遅れ時間に依存しない費用の項であり，ここにはスケジュールディレイや混雑料金など，渋滞の状況に陽に依存しないすべての費用が含まれる．$\vec{r}$ は個人特性であり，時間価値や希望到着時刻をはじめとして，一般化交通費用に影響するすべての個人パラメータを含むことが可能である．

このような行動原理の元では，ある特定の個人特性 $\vec{r}$ の人のうち，ある時刻 t_d にボトルネックを出発できるように行動する人間の割合 $f_i(t_d,\vec{r})$ は，

$$f_i(t_d,\vec{r}) = \frac{e^{-\beta p_i(t_d,\vec{r})}}{\int_{-\infty}^{\infty} dt_d^* e^{-\beta p_i(t_d^*,\vec{r})}} \tag{2}$$

となる．ある時刻 t_d にボトルネックを出発できるように行動する利用者の数 $\nu_i(t_d)$ は，個人特性 $\vec{r}$ を持つ利用者の人数 (密度) を $\rho(\vec{r})$ とすることにより，

$$\nu_i(t_d) \quad = \quad \int_R d\vec{r}\rho(\vec{r})f_i(t_d,\vec{r}) \tag{3}$$

と表される．ある時刻 t_a にボトルネックでの待ち行列に到着する利用者の数は，この $\nu_i()$ の引数として，$t_a = t_d - w^*(t_d)$ を満たす t_d を代入すれば求められるので，結局 $\nu_i()$ から累積到着曲線が書けることになり，その結果累積出発曲線が書け，i 日目に実際に発生した渋滞での待ち時間 $w_i(t_d)$ も求められる．

3. 摂動を加えた際の安定性

前章で考えた系が均衡し，日々の変動がまったくない状況では，

$$w_i(t_d) = w_{i-1}(t_d) \tag{4}$$

が満たされる．このときの $w_{i-1}(t_d)$ を $w_e(t_d)$，$p_{i-1}(t_d,\vec{r})$ を $p_e(t_d,\vec{r})$ と置く．また，$w_i(t_d)$ の均衡解 $w_e(t_d)$ からのずれ $\Delta w_i(t_d)$ を

$$w_i(t_d) = w_e(t_d) + \Delta w_i(t_d) \tag{5}$$

と定義する．この均衡の安定性は，$\Delta w_{i-1}(t_d)$ が微小な摂動であったときに，$\Delta w_i(t_d)$ がその摂動に比べて小さくなるか，大きくなるかで判定される．もし小さくなれば摂動は収束して均衡は保たれるだろうし，大きければ摂動は発散して均衡は破錠する．

今回は，摂動に対する安定性を簡便に評価するために，摂動として，ある時間帯 $D_T : t_x \le t_d \le t_x + T$ にのみ一定の量だけ摂動がかかるもの，すなわち

$$\begin{aligned} \Delta w_{i-1}(t_d) &= \delta > 0 \quad \text{if } t_x \le t_d \le t_x + T \\ &= 0 \qquad \text{otherwise} \end{aligned} \tag{6}$$

を考える．このような摂動の存在する時間帯 D_T にボトルネックを出発しようと行動する利用者の数は，

$$I = \int_{t_x}^{t_x+T} \nu_i(t_d)dt_d \tag{7}$$

と記述される．一方，摂動がない均衡状態の場合，同じ時間 D_T にボトルネックを出発しようと行動する利用者の数は μT である．いま I の大きさは $\Delta w_i(t_d)$ の大きさに影響し，図 2 に示すように，

$$|\Delta w_i(t_d)| \sim |I - \mu T|/\mu \tag{8}$$

となる．例えば，I が 0 に近ければほとんどの人は時間帯 D_T にボトルネックを出発しようとせず，その代わりこの時間帯の前後に利用者が集中することになり，その結果，$\Delta w_i(t_d)$ は時間帯 D_T とその前後で T のオーダーの大きさになる．

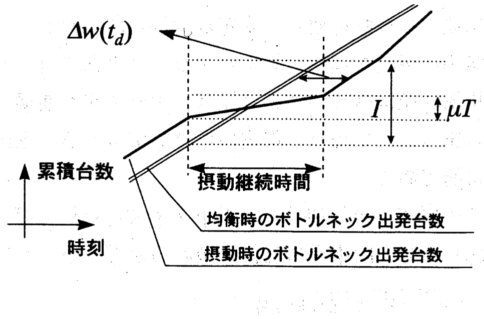

図 2 摂動によるずれ I と待ち時間のずれ $\Delta w_i(t_d)$ の関係．I-μT が大きいと，それに比例して累積曲線の差が広がるため，$\Delta w_i(t_d)$ は I-μT にほぼ比例して大きくなる．

以上より，均衡の安定性を議論するのであれば，I が摂動 δ や摂動持続時間 T にどのように依存しているかを調べればよい．以下ではこのことについて数学的に説明していく．

I は

$$I = \int_R d\vec{r}\rho(\vec{r})\frac{L}{K} \tag{9}$$

となる．なお，

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p_i(t_d^*,\vec{r})}dt_d^* \tag{10}$$

$$L = \int_{t_x}^{t_x+T} e^{-\beta p_i(t_d^*,\vec{r})}dt_d^* \tag{11}$$

である．

以降では $\beta \to \infty$ のときに I がどうなるかを見ていく．このために，ますは式 (9) で積分される関数 L/K がどうなるかを見る必要がある．そこで，$\beta \to \infty$ でどのような関数に漸近しているかを調べる．なお，簡便のため，β での微分を以下では $'$(プライム) をもって表すことにする．すると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{L}{K}\right)' &= \frac{L'}{K} - \frac{L(K)'}{K^2} \\ &= \frac{L}{K}\left\{\frac{L'}{L} - \frac{K'}{K}\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

となる．ここで，

$$-\frac{L'}{L} = \frac{\int_{t_x}^{t_x+T} p_e(t_d,\vec{r})e^{-\beta p_e(t_d,\vec{r})}dt_d}{\int_{t_x}^{t_x+T} e^{-\beta p_e(t_d,\vec{r})}dt_d} \tag{13}$$

である．これはちょうど $p_i(t_d,\vec{r})$ の時間帯 D_T における重みつき平均の形になっている．ゆえに $\beta \to \infty$ では，この値は時間帯 D_T における $p_i(t_d,\vec{r})$ の最小値 $p_m(\vec{r})$ を示すことになる．ところで，時間帯 D_T では，

$$p_i(t_d,\vec{r}) = p_e(t_d,\vec{r}) + \delta \tag{14}$$

なので，$\delta = 0$ のときの $p_m(\vec{r})$ を $p_{m0}(\vec{r})$ とすると，

$$p_m(\vec{r}) = p_{m0}(\vec{r}) + \delta \tag{15}$$

となる．

同様に，$-K'/K$ は区間 $(-\infty,\infty)$ における $p_i(t_d,\vec{r})$ の最小値 $p_o(\vec{r})$ を示すことになる．

これらを用いると，$\beta \to \infty$ では，

$$\left(\frac{L}{K}\right)' \sim \frac{L\{p_o(\vec{r}) - p_m(\vec{r})\}}{K} \tag{16}$$

となる．これは L/K に対する微分方程式になっている．これを解くと，

$$\frac{L}{K} \sim e^{\beta\{p_o(\vec{r})-p_m(\vec{r})\}} \tag{17}$$

となる．すなわち，$p_o(\vec{r})-p_m(\vec{r}) < 0$ のときは $L/K \to 0$ となる．

以下では $p_o(\vec{r}) - p_m(\vec{r})$ の符号について考える．まず，$\vec{r}$ を持つ旅行者が時間帯 D_T 以外を t_d として選択しているような状況では，時間帯 D_T 以外の区間で p_i が最小化されているので，必ず $p_o(\vec{r}) - p_m(\vec{r}) < 0$ が成立する．一方，$\vec{r}$ を持つ旅行者が時間帯 D_T の中を t_d として選択しているような状況では，時間帯 D_T に近付くほど p_i は小さくなるので，p_i が最小値をとる t_d は，摂動による不連続な変化の存在する時間帯 D_T の境界部分か時間帯 D_T 内の極小点かどちらかとなり，

$$p_o(\vec{r}) = \min[p_e(t_x,\vec{r}), p_e(t_x+T,\vec{r}), p_m(\vec{r})] \tag{18}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}p_o(\vec{r}) - p_m(\vec{r}) &= \min[p_e(t_x,\vec{r}) - p_m(\vec{r}), \\ &\quad p_e(t_x+T,\vec{r}) - p_m(\vec{r}), 0] < 0\end{aligned} \tag{19}$$

となる．すなわち，

$$p_m(\vec{r}) \leq \min[p_e(t_x+T,\vec{r}), p_e(t_x,\vec{r})] = p_q(\vec{r}) \tag{20}$$

のときは $p_o(\vec{r}) - p_m(\vec{r}) = 0$，これ以外では < 0 となる．以上により，$\vec{r}$ を持つ旅行者が時間帯 D_T の中を t_d として選択しており，なおかつ $p_m(\vec{r}) \leq p_q(\vec{r})$ を満たす場合のみ $L/K \sim 1$ で，あとのケースでは $L/K \sim 0$ となる．

以降では，$R^*(t_x,T)$ を時間帯 D_T に到着する利用者の特性 $\vec{r}$ の集合とし，$1-\gamma$ を $p_m(\vec{r}) \leq p_q(\vec{r})$ が満たされる $\vec{r}$ を持つ利用者の割合とする．式 (9) にこれまで計算した L/K を代入すれば，

$$I \simeq (1-\gamma)\int_{R^*(t_x,T)} d\vec{r}\rho(\vec{r}) = (1-\gamma)\mu T \tag{21}$$

とかける．

この I を用いれば，式 (8) より

$$|\Delta w_i(t_d)| \sim \gamma T \tag{22}$$

が成立する．よって，

$$|\Delta w_i(t_d)| \sim \gamma T > \delta \tag{23}$$

のときに，摂動 δ が増幅され，均衡が不安定になることがわかる．

あとは γ の大きさについて考察するのみである．$p_m(\vec{r}) = p_{m0}(\vec{r}) + \delta$ の関係式より，この γ の値は，

$$\delta > p_q(\vec{r}) - p_{m0}(\vec{r}) \tag{24}$$

となる $\vec{r}$ を持つ利用者の割合となる．いま，$\vec{r}$ として $R^*(t_x, T)$ に含まれるものを考えると，この $p_q(\vec{r}) - p_{m0}(\vec{r})$ は，式 (20) より，

$$p_q(\vec{r}) - p_{m0}(\vec{r}) = p_e(t_x, \vec{r}) - p_e(t_d, \vec{r}) \tag{25}$$

または，

$$p_q(\vec{r}) - p_{m0}(\vec{r}) = p_e(t_x + T, \vec{r}) - p_e(t_d, \vec{r}) \tag{26}$$

となる．p_e は t_d で極小となるので，これらの式は T^2 と $\vec{r}$ に依存する定数項 $a(\vec{r})$ を用いて近似できて，

$$p_q(\vec{r}) - p_{m0}(\vec{r}) \simeq a(\vec{r})T^2 \tag{27}$$

とできる．よって，

$$a(\vec{r})T^2 < \delta \tag{28}$$

を満たし，$R^*(t_x, T)$ に含まれる $\vec{r}$ を持つ利用者の割合が γ となる．

いま，均衡時の利用者の費用 p_e は t_d の微小変化で極端に大きく変動することはないとする．このとき $a(\vec{r})$ は有限であるので，$a(\vec{r}) \leq M$ となる M を考える．そして，$a(\vec{r})/M$ の累積分布を $G(a(\vec{r})/M)$ と定義する．すると，

$$I = (1-\gamma)\mu T = \mu T \left\{1 - G\left(\frac{\delta}{MT^2}\right)\right\} \tag{29}$$

と書ける．これを式 (23) に代入して，

$$G\left(\frac{\delta}{MT^2}\right) > \frac{\delta}{T} \tag{30}$$

のときに均衡が不安定であることがわかる．いま，摂動 δ が摂動継続時間 T よりも小さく，また，M は T に依存しない定数なので，T を小さくすれば $MT \ll 1$ となる．このようなときは $G()$ の引数が大きくなるので，$G() \simeq 1$ となり，結局，

$$I \simeq 0 \tag{31}$$

$$G\left(\frac{\delta}{MT^2}\right) \simeq 1 > \frac{\delta}{T} \tag{32}$$

と，摂動区間にボトルネックを出発する利用者はほぼいなくなり，また式 (30) が成立し，均衡は不安定になる．

以上により，いくつかの条件の元ではあるが，今回の定式化における出発時刻選択問題では，均衡が不安定になる状況が存在することがわかった．

4. まとめと展望

以上では，β が十分大きいときに，ある長さ T の時間に微小摂動 δ をかけた時には，摂動区間にくる利用者の数が大きく減少して，その結果系が大きく変動することを示した．このことは，出発時刻問題で均衡解を求めたとしても，その均衡解が実現されないことがあることを示している．しかし，今回考察した状況では，日々の利用者の行動原理，摂動の形状などにおいてかなり限定された仮定を置いた．そのため，これらの仮定が変更されたときには均衡解が安定することも予想される．そのため，均衡解が安定する条件はどのようなものかを今後詳しく調べる必要があろう．

一方，現実の系が果して均衡という枠組で表現しきるかどうかについても考える必要がある．すなわち，均衡解が安定しない状況ではこれまでの均衡解以外の方法で系を解析する必要がある．場合によっては完全に動学的な枠組で考える必要もあるかと思われる．

参考文献

[1] 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集,No.604/IV-41,pp73-84, 土木学会,1998.1