

## 第21章 混雑のモデル化(A)

Robin Lindsey (University of Alberta)

Erik Verhoef (Free University, Amsterdam)

### 1. はじめに

交通混雑は人口と経済活動の集積から得られる利益に対する対価である。交通の需要はコストに依存し、交通状況の改善はトリップを増加させることとなるため、渋滞を無くすことは不可能であろう。初期の研究者は、正確だけでなく適用性の高い流体力学に基づくモデルを開発しようとした。しかし、流体と異なり、交通混雑は純粋な物理的現象ではなく、人々の交通行動の結果によるものである。また、ある人は、混雑の量的な性質は車、道路構造、道路の使用規則、生活のペースや、その他の要因によって変わると考えるだろう。例えば、1960年代に先進国で調整されたモデルは21世紀初頭の発展途上国では適合しないかもしれない、と。

混雑問題は道路に限らず他の交通手段でも発生する問題であるが、本稿では道路交通の渋滞に絞る。交通混雑は、他の車両の存在により、速度の低下によって、あるいは安全に走行するために多大な注意が必要となるために旅行コストが増加する時に起こる。

交通混雑はマイクロレベル、マクロレベル（車両を流体的に扱うなど）両方の視点から分析できる。待ち行列モデルもマイクロレベルの分析の1つだがここでは取り扱わない。マイクロレベルの1つであるCar-following theoryとマクロレベルで行われている多くの分析については取り上げる。

### 2. 時間変化のないモデル

交通渋滞のtime-independent modelはより複雑で現実的なtime-dependent modelの開発と理解への足がかりとなるものである。このモデルは、ゆっくりと変化する交通状況に対しては合理的な解釈を与えるかもしれない。このような交通状態は“stationary”な（静止した）状態と呼ばれるが、stationaryな状態とは何かという正確な意味は難しいところである(Daganzo, 1997)。

交通流は密度 $k$  (台/車線/km)、速度 $v$  (km/時)、交通量 $q$  (台/時)によって表される。これらはマクロレベルでは静止状態で任意の時空間で定義され、 $q = kv$ の関係がある。図1(a)の $k$ - $v$ 関係は“the fundamental diagram of traffic flow”と名付けられた(Haight, 1963)。この

形状は道路の様々な要因（幅員・車線数・勾配・曲率・制限速度など）によって異なるものである。図1において、 $q' < q_0$ のすべての条件で、低密度-高速度の( $k_L, v_L$ )と高密度-低速度の( $k_H, v_H$ )の二値をとる。経済学ではこれらの状態をそれぞれ「混雑(Congested)」と「超混雑(Hypercongested)」という。一方、交通工学では「非渋滞(uncongested, unrestricted)」, 「自由流(free-flow)」と「渋滞(congested, restricted, queued)」などの用語が用いられている。図1(b)の下側（「超混雑」の状態）で待ち行列が発生するので“queued”は適切な表現だが、上側でも速度が自由旅行速度より下がれば混雑は発生する。

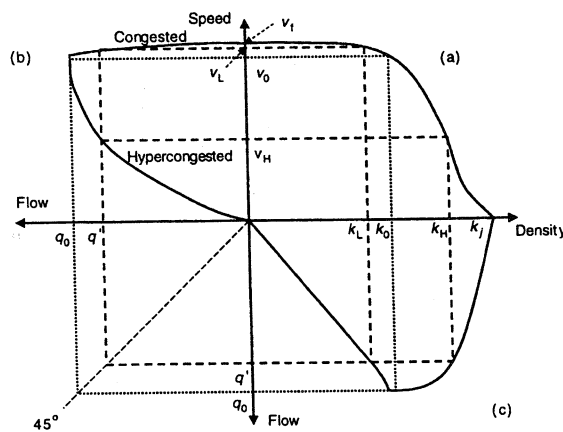


図1 (a)速度-密度曲線、(b)速度-交通量曲線、(c)交通量-密度曲線

Walters(1961)は $q-v$ 曲線を用いた経済学的分析を行っている(図2)。トリップコスト曲線  $C(q) = C_0 + L/v(q)$  と需要曲線  $p(q)$  を図2のように描くと、均衡点が3つ出る。ただ、これについては、「超混雑」な均衡が安定しているか、トリップの需要・供給をフローで定義することに意味があるか、等について議論がなされている。最近の見方では、“超混雑”は過渡的現象であり、動的モデルでのみ分析可能であると考えられている。

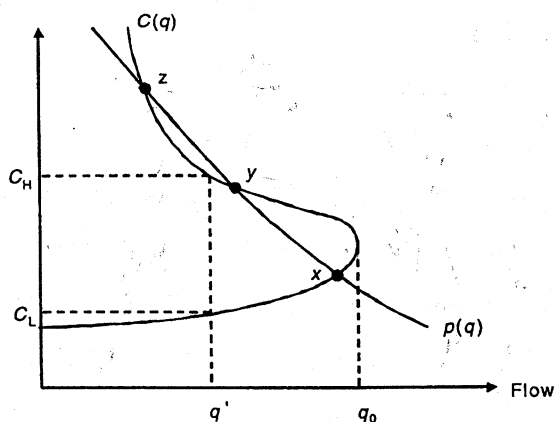


図2 Backward-bending形の旅行費用曲線 $C(q)$ と旅行需要曲線 $p(q)$

経済分析では通常、超混雑側を無視し、 $q$ - $k$ 関係からではなく直接 $C(q)$ を決定するケースが多い。図3の場合、均衡点は $E$ となり、 $C(q)$ は平均の社会的費用を表す。また、総社会的費用は $TC(q)=C(q)q$ 、限界社会的費用は $MSC(q)=C(q)+q\partial C(q)/\partial q$ である。これより社会的に最適な均衡点は $F$ となる。この点で均衡するためには利用者は $p^*=MSC(q^*)$ だけ費用を支払う必要があり、必要な料金は $r^*=MSC(q^*)-C(q^*)$ となる。この料金はピグー課税として知られる(Pigou, 1920))。

この場合、社会的余剰は $FGE$ の面積だけ増加するが、料金収入が利用者に還元されなければ利用者個々人から見ると損失を被る。道路利用を続けたもののトータルロスは $HIFJ$ で囲まれた範囲、道路利用をあきらめたもののトータルロスは $JFE$ の範囲である。これらのロスが混雑料金の導入を妨げる要因となっている。

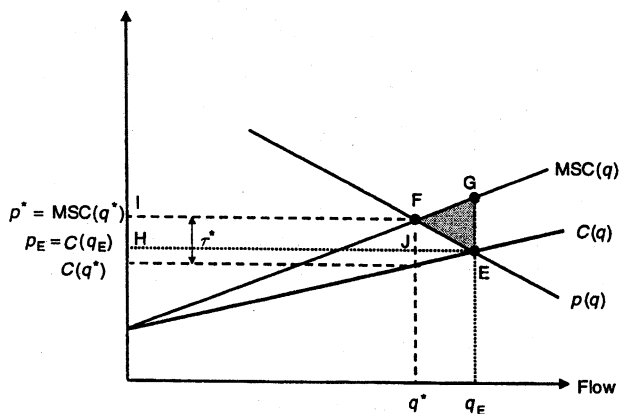


図3 均衡道路利用量 $q_E$ 、最適道路利用量 $q^*$ と最適混雑料金 $r^*$

### 3. 時間変化を考慮したモデル

#### マクロなフローモデル・・・LWRモデル

Time-dependentまたはdynamicモデルは時空間上でのフローの変化を許容したモデルである。最もよく用いられているマクロモデルは、Lighthill and Whitham(1955)とRichards(1956)による流体モデル(hydrodynamic model)であり、頭文字を取ってLWRモデルと呼ばれる。根本的な仮定は、静止状態におけるk-v関係が動的な状態でも成立する、というものである。交通量保存則(conservation equation)より、 $\partial q(t,x)/\partial x + \partial k(t,x)/\partial t = 0$ が成立する。また、交通量と密度の変化は衝撃波(shock wave)として伝搬し、交通量の保存より  $w_{AB} = (q_A - q_B)/(k_A - k_B)$  が導出される(図4)。また、図4(a)でA→Bに変化する場合 *forward-recovery shock wave* がB→Aの場合 *forward-forming shock wave*、B→Cの場合 *backward-forming shock wave* が形成される。

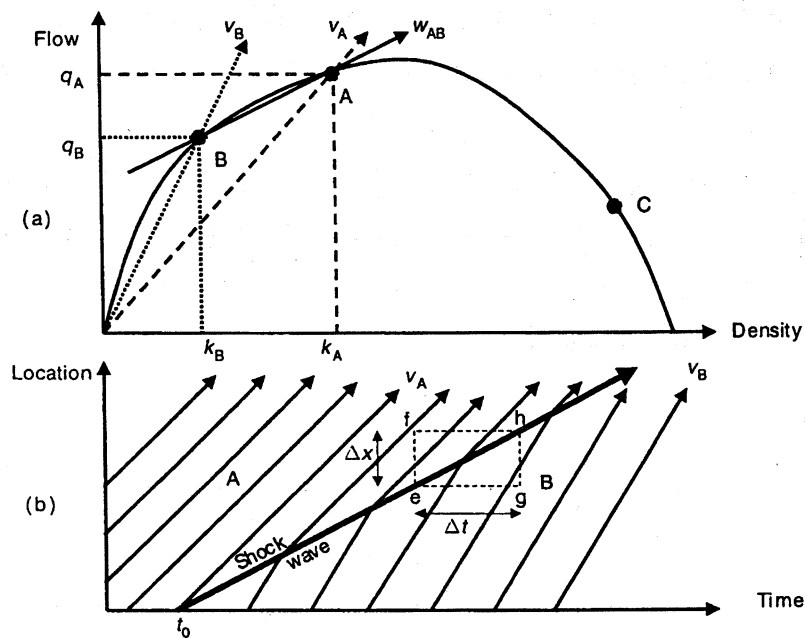


図4 (a) q-k曲線上におけるAからBへの状態変化、(b) time-space図上における軌跡

LWRモデルはドライバーの個々の行動によらず時空間上で常にk-v関係が成立していることが絶対条件である。また、加減速の影響を考慮しておらず、ドライバーの希望走行速度の違いを考慮していない。また、このモデルではstop-and-goなどの不安定な状況を説明できない、といった問題がある。

LWRモデルの欠点は均一でない道路や流入交通が絶えず変化するような場合、解を求

めるのが非常に面倒なことである。この問題を解決するため、いくつかの単純化が行われている。

その1つがボトルネックモデル(bottleneck model)と呼ばれるものである。ボトルネックにおける $q$ - $v$ 関係を、 $q$ が容量 $s$ になるまで速度一定であると仮定する。超過需要が流れた場合、上流へ衝撃波が伝搬する。図5の累積図を仮定し、 $D(t)$ をボトルネックの出発台数、 $A(t)$ を上流の待ち行列最後尾への流入台数とすると、 $Q(t)$ が時間 $t$ の待ち行列台数、 $Q(t)/s$ が時間 $t$ に到着した車両の渋滞通過時間、 $A(t)$ 、 $D(t)$ に囲まれた面積が総待ち時間となる。この分析では、ボトルネック容量が変化する場合にも対応可能である。

待ち行列は道路空間を占有しており、待ち行列中も車両はゆっくり走行している。この分は渋滞していなくても走行する部分である。従って、実際の遅れ時間は上記の待ち時間より小さくなる。従って渋滞長の予測は非常に重要となる。また、渋滞による先詰まりの影響の観点からも渋滞長の考慮は重要である。一方、ネットワーク分析など目的によってはphysical queueを考慮する必要がなく、いわゆるvertical queueでの取り扱いで十分な場合もある。

LWRモデルからの2つ目の派生モデルは、no-propagation model (Henderson, 1977) である。これは、流入時の密度で速度が決まり、変化しないというものである。すなわち、衝撃波は伝搬しない。このモデルでは、低密度で流入した車両が前方車両を追い越してしまふという問題がある。

LWRモデルからの3つ目の派生モデルは、instantaneous propagation model(Agnew, 1977, Mahmassani and Hrman, 1984)である。このモデルでは、道路上で $k$ - $v$ が一樣であり、流入交通量が増加するとその瞬間に全区間で密度が増加する。つまり、衝撃波は瞬間的に伝搬するということであり、非現実的であり、あるネットワークモデルでの個々のリンクや道路区間に適用される程度である。

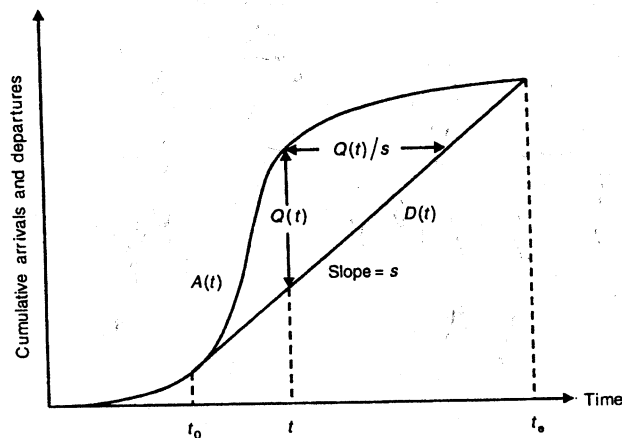


図5 累積到着・出発曲線と待ち行列の生成

### マイクロなフローモデル・・・Car-followingモデル

次は車両を連続体としてでなく離散化して扱うマイクロモデルに目を転じる。マイクロモデルは交通量の少ない道路において追い越しや車線変更が可能な場合や、重渋滞が起こる道路で交差点やネットワークでの車両の移動を追う場合に有効である。

最も幅広く用いられているマイクロモデルは1950～60年代に発展したcar-followingモデルである。モデルは以下の一般形で表される。

$$\ddot{x}_{n+1}(t + \Delta t) = \frac{c [\dot{x}_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{[x_n(t) - x_{n+1}(t)]^l} [\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

静的な交通状況下では、car-followingモデルもLWRモデルやその他のマクロモデルと同様なk-vの関係を満たすが、加減速を考慮していること、ドライバーの反応遅れを考慮していることなどからより現実的である。交通状況が急激に変化する場合LWRモデルでは正確に再現できず、このような場合にcar-followingモデルが用いられる。

マイクロモデルもマクロモデルも明確な対処が出来る交通状況や渋滞現象に対して用いられるものであり、自由走行していた交通が明確な理由なく渋滞に転じ、長時間持続するといった現象は大きな課題である。

### 超混雑の発生について

超混雑も注意を向けるべき課題である。議論されている1つの問題は、中間の入口がなく当初渋滞していない様な道路で超混雑は起こりうるか、ということである。LWRモデルではこのような状況は起こり得ない。また、別の問題は実際の都市のネットワークでどのように超混雑をモデル化するかということである。Chu and Small(1997)は空間的に均

質な道路において2つのモデルを提案している。1つはinstantaneous propagation modelであり、定常的に外生的な流入交通がある場合と仮定している。超混雑は流入が十分長い区間全体に対して容量を超過した場合に発生する。2つ目は、内生的な流入交通を導入した場合である。この場合も超混雑は起こりうる。

低速、低交通量であれば超混雑の性質は都市内では共通している。部分的には交差点における需要の超過であり、中心部ではネットワーク容量が限られていることによるものである。ラッシュ時には路上駐車増加や路外駐車場への待ち行列による容量の低下によるものかもしれない。

なお、以上の議論は交通流としての行動に焦点を当てたものであり、需要の変化がどのように決定されるかといったことは考慮していない。

### トリップを行う時間の選択のモデル化

旅行時間が問題となってくると、トリップの時間選択のモデル化が必要となる。1つの極端な、ただし一般的な仮定としては、異なる時間におけるトリップの代替性はなく、与えられた時刻におけるトリップの需要はその瞬間におけるトリップの費用のみに依存するというものである。

これについては、Vickrey(1969)によってより一般的なアプローチが示されている。希望到着時刻と実際の到着時刻のずれに比例した費用がかかるとする。このコストをスケジュールディレイコスト(schedule-delay cost)という。このスケジュールディレイコストを与えることによって、単一の道路、出発地、目的地について均衡状態で利用者が実際に旅行を行う時刻を決められる。ボトルネックモデルにおける均衡状態は図6のように示される。ここで

$A(t)$  = ボトルネック到着曲線

$D(t)$  = ボトルネック出発曲線

$W(t)$  = 希望ボトルネック到着曲線

である。なお、スケジュールディレイコストの比例係数、時間価値はすべての利用者で同じであるとし、需要の弾力性はないとする。

利用者の選択はいつ渋滞に加わるかというもののみになる。均衡状態(ナッシュ均衡)は、どの利用者也費用をより小さくする時間選択をもたない状況と定義される。このとき渋滞の待ち時間は図6のようになる。未知の値( $t_0$ ,  $t_m$ ,  $t_e$ )は、以下の4つの条件式で求まる。

$$s(t_e - t_0) = N \quad (\text{総旅行人数の保存})$$

$$W(t^{**}) = s(t^{**} - t_0) \quad (\text{自分の希望時刻に間に合った人数})$$

$$\beta(t^{**} - t_0) = \alpha(t^{**} - t_n)$$

$$\gamma(t_e - t^{**}) = \alpha(t^{**} - t_n)$$

(希望到着時刻が $t^{**}$ の人がどの時刻を選択しても費用は変わらない)

総待ち時間は図6のEFGとして求まり、希望時刻よりも早く到着した分のスケジュールディレイの合計はEHJ、遅く到着した人の分はGHKである。

スケジュールディレイコストの係数が個人差がある場合には、同じ値の係数を持つ利用者をグループ化して解く方法がある。

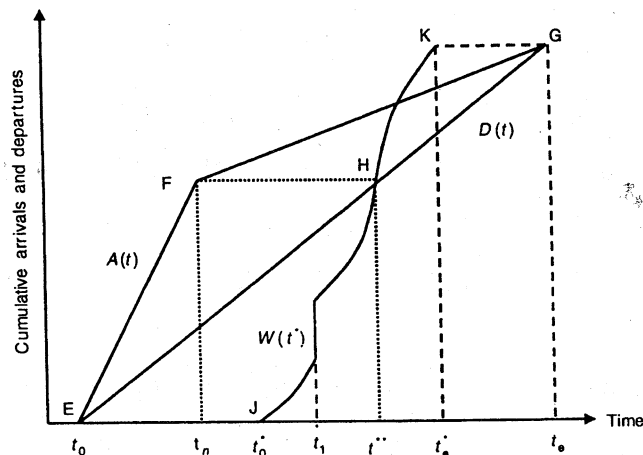


図6 ボトルネックモデルにおける均衡出発時刻と待ち行列

#### 4. ネットワークにおける混雑のモデル化

静的な場合のネットワークへの配分の方法はWardrop(1952)が示している。

- Wardropの第一法則： 1つのODがネットワークで結ばれたとき、均衡状態では利用される各経路の平均費用は同じ。
- Wardropの第二法則： 1つのODをネットワーク上で結ぶとき、利用される各経路の限界費用を一致させれば、系の総費用を最小にすることができる。

第一法則に従う均衡状態を利用者均衡(user equilibrium)という。Beckmann et al.(1956)は、利用者均衡問題は等価な最適化問題として定式化して説くことができることを示している。また、第二法則に従う状態は、システム最適(system optimum)といわれる。第二法則に従えば、系を最適化するための混雑料金は、各リンクの平均費用関数を交通量で微分したも



の最適流の際の値と同じになる。(限界費用と平均費用の差)

動的解析の場合には、経路選択以外に時間選択(出発時刻選択)が入ってくる。このような場合に拡張した理論はいくつも出されている。

情報の不完全性を組み込むために、SUE(確率的利用者均衡)を用いた例がある(Daganzo and Sheffi,1977)。また、車両を離散的なものとして扱ったものもある(Hazelton,1998)。ネットワークの不確実性(事故や天候など)を考慮するのであれば、DSOの仮定を導入するか、あるいは確率ネットワーク・確率利用者均衡(stochastic network stochastic user equilibrium)という方法(Emmerink,1998)がある(これは利用者が旅行費用の期待値を最小化するように行動するとしている)。

## 5. ロードプライシングと投資

道路上には大型車のような多種の車が走っていたり、色々な挙動をとる車両がいる。これらは混雑に対する寄与度が異なるので、混雑料金を考える場合には、車両の種類などを認識する必要性が生ずる。もっともこれには車両それぞれを個別に認識する必要がある。

動的な混雑料金は自動料金收受システムで可能となる。第3節のボトルネックモデルであれば、総待ち時間が死荷重(dead-weight-loss)となるので、この分に相当する額を混雑料金とすればよい。このとき利用者の私的費用(待ち時間分とスケジュールディレイ分)は変化しない。

このように不変になるのはボトルネックモデルのときのみである。LWRモデルでは流れが速度に依存するので、最適混雑料金は需要を分散させることになって、速度向上により遅れ時間は減少するがスケジュールディレイは増大する。

どのようにシステム最適な混雑料金を求めて導入するかについては未だ研究が続いている。例えば社会的限界費用をどう求めるかとか、リンクベースで料金をかけるか経路ベースでかけるか、利用者にどう混雑料金を周知させるかなどである。また、環境外部費用や、インフラの費用、政治的制約なども考慮すべきという意見がある。すなわち、これまで考えてきた混雑料金はファースト・ベストにすぎず、セカンド・ベストで考えるべきというものである。セカンド・ベストの研究としては、1つのODペアを結ぶ2つの混雑している経路について、一方を課金なしとしたケースが計算されている(Verhoef et al.,1996)。また、駐車料金と混雑の関係を考え、駐車料金で操作する方法も考えられている(Glazer and Niskanen,1992)。

混雑料金は道路建設の問題とも関係がある。Small(1992a)によると、例えば混雑料金を

導入しないまま道路を拡張しても、需要に弾力性がある場合には誘発交通により道路建設の便益は少なくなる。このときの混雑料金を用いれば、誘発交通をコントロールすることになり、十分な便益を得られる。一方弾力性が小さい場合であれば、混雑料金がなくても十分な便益が得られる。動的な混雑料金を考えた場合にも、需要に弾力性があれば、先に述べたような効果はやはりある。

混雑料金収入によりどの程度の容量を担保できるかについては、静的解析により以下のようなものが知られている(Mohring and Harwitz, 1962)。すなわち、容量は連続的に増加できる、容量は一定の限界費用で拡張できる、旅行費用は不変である。という条件である。後者2つの条件疑わしいが、一定の範囲の状況であれば成立することが知られている。前者はネットワーク全体で考えればほぼ成立する。この自己担保理論は動的な場合にも拡張される(Arnott et al., 1993)。この自己担保の理論は、ファースト・ベストの考えの中での、最適な道路建設を行うことと関係がある。この話はいわゆる Braesses のパラドックス (Braess, 1968) と関係してくる。

## 6. 結論

交通混雑のモデル化にあたっては特にこれがいちばんという方法はなく、解析の目的に応じて詳細度を変更させるべきである。土地利用モデルを考えるような目的では、静的な方法が適切であり、速度と密度の関係から考えればよい。一方、ラッシュアワーを考えるのであれば、よりミクロな解析が必要となる。大規模なコンピュータシミュレーションも可能になってきてはいるが、本質を見るためには単純なモデルも有用である。

混雑料金の実現は昨今の技術進歩や政策態度の変化により現実性があるといえる。一方 ITS のような技術進歩はそれ自体が需要誘発効果を持つものであり、そのコントロールのためにも混雑料金が使えらるであろう

(担当：小根山 裕之、井料 隆雅)

## 参考文献

- Agnew, C.E. (1977) "The theory of congestion tolls", *Journal of Regional Science*, 17(3):381-393.  
Arnott, R. and M. Kraus (1995) "Self-financing of congestible facilities in a growing economy", Department of Economics, Boston College.  
Arnott, R. and K.A. Small (1994) "The economics of traffic congestion", *American Scientist*, 82:446-455.  
Arnott, R., A. de Palma and R. Lindsey (1993) "A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand", *American Economic Review*, 83(1):161-179.  
Arnott, R., A. de Palma and R. Lindsey (1998) "Recent developments in the bottleneck model", in:

- K.J. Button and E.T. Verhoef, eds., *Road pricing, traffic congestion and the environment: Issues of efficiency and social feasibility*. Cheltenham: Edward Elgar.
- Beckmann, M., C.B. McGuire and C.B. Winsten (1956) *Studies in the economics of transportation*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Braess, D. (1968) "Über ein Paradoxon der Verkehrsplanung", *Unternehmensforschung*, 12:258-268.
- Button, K.J. (1992) *Transport economics*. Aldershot: Edward Elgar.
- Button, K.J. and E.T. Verhoef, eds. (1998) *Road pricing, traffic congestion and the environment: Issues of efficiency and social feasibility*. Cheltenham: Edward Elgar.
- Cassidy, M.J. and R.L. Bertini (1999) "Some traffic features at freeway bottlenecks", *Transportation Research B*, 33:25-42.
- Chu, X. (1992) "Endogenous trip scheduling: A comparison of the Vickrey approach and the Henderson approach", *Journal of Urban Economics*, 37:324-343.
- Chu, X. and K.A. Small (1997) "Hypercongestion", Department of Economics, University of California at Irvine, Irvine Economics Paper 97-98-12.
- Dafermos, S.C. (1973) "Toll patterns for multiclass-user transportation networks", *Transportation Science*, 7:211-223.
- Dafermos, S.C. and F.T. Sparrow (1971) "Optimal resource allocation and toll patterns in user-optimised transport networks", *Journal of Transport Economics and Policy*, 5(2):184-200.
- Daganzo, C.F. (1997) *Fundamentals of transportation and traffic operations*. New York: Elsevier Science.
- Daganzo, C.F. and Y. Sheffi (1977) "On stochastic models of traffic assignment", *Transportation Science*, 11:253-274.
- Daganzo, C.F., M.J. Cassidy and R.L. Bertini (1999) "Possible explanations of phase transitions in highway traffic", *Transportation Research A*, 33:365-379.
- Emmerink, R.H.M. (1998) *Information and pricing in road transportation*. Berlin: Springer-Verlag.
- Gazis, D.C. and R. Herman (1992) "The moving and 'phantom' bottleneck", *Transportation Science*, 26:223-229.
- Glazer, A. and E. Niskanen (1992) "Parking fees and congestion", *Regional Science and Urban Economics*, 22:123-132.
- Haight, F.A. (1963) *Mathematical theories of traffic flow*. New York: Academic Press.
- Hau, T.D. (1998) "Congestion pricing and road investment", in: K.J. Button and E.T. Verhoef, eds., *Road pricing, traffic congestion and the environment: Issues of efficiency and social feasibility*. Cheltenham: Edward Elgar.
- Hazelton, M.L. (1998) "Some remarks on stochastic user equilibrium", *Transportation Research B*, 32:101-108.
- Henderson, J.V. (1977) *Economic theory and the cities*. New York: Academic Press.
- Hurdle, V. (1991) "Queuing theory applications", in: *Concise encyclopedia of traffic and transportation systems*. Oxford: Pergamon Press.
- Kerner, B.S. and H. Rehborn (1997) "Experimental properties of phase transitions in traffic flow", *Physical Review Letters*, 79:4030-4033.
- Lighthill, M.J. and G.B. Whitham (1955) "On kinematic waves. II: A theory of traffic flow on long crowded roads", *Proceedings of the Royal Society, London, Series A*, 229:317-345.
- Mahmassani, H.S. and R. Herman (1984) "Dynamic user equilibrium departure time and route choice on idealised traffic arterials", *Transportation Science*, 18(4):362-384.
- May, A.D. (1990) *Traffic flow fundamentals*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- May, A.D., S.P. Shepherd and J.J. Bates (1999) *Supply curves for urban road networks*. Leeds/Oxford: Institute for Transport Studies, University of Leeds/John Bates Services.
- McDonald, J.F., E.L. d'Ouille and L.N. Liu (1999) *Economics of urban highway congestion and pricing. Transportation research, economics and policy*. Dordrecht: Kluwer.
- Mohring, H. and M. Harwitz (1962) *Highway benefits*. Evanston, IL: Northwestern University Press.
- Nagurney, A. (1999) *Network economics: A variational inequality approach*, revised 2nd edition. Dordrecht: Kluwer.
- Newell, G.F. (1988) "Traffic flow for the morning commute", *Transportation Science*, 22(1):47-58.
- Pigou, A.C. (1920) *Wealth and welfare*. London: Macmillan.
- Ran, B. and D. Boyce (1996) *Modeling dynamic transportation networks: An intelligent transportation system oriented approach*, 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag.
- Richards, P.I. (1956) "Shock waves on the highway", *Operations Research*, 4:42-51.
- Roess, R.P., W.R. McShane and E.S. Prassas (1998) *Traffic engineering*, 2nd edition. Upper Saddle

- River, NJ: Prentice Hall.
- Small, K.A. (1982) "The scheduling of consumer activities: Work trips", *American Economic Review*, 72:467-479.
- Small, K.A. (1992a) *Urban transportation economics. Fundamentals of pure and applied economics*. Chur: Harwood.
- Small, K.A. (1992b) "Using the revenues from congestion pricing", *Transportation*, 19(4):359-381.
- Transportation Research Board (1992) *Highway capacity manual*, 3rd edition. Washington, DC: National Academy Press, TRB Special Report 209.
- Verhoef, E.T. (1999) "Time, speeds flows and densities in static models of road traffic congestion and congestion pricing", *Regional Science and Urban Economics*, 29:341-369.
- Verhoef, E.T., P. Nijkamp and P. Rietveld (1996) "Second-best congestion pricing: The case of an untolled alternative", *Journal of Urban Economics*, 40(3):279-302.
- Verhoef, E.T., J. Rouwendal and P. Rietveld (1999) "Congestion caused by speed differences", *Journal of Urban Economics*, 45:533-551.
- Vickrey, W.S. (1969) "Congestion theory and transport investment", *American Economic Review (Papers and Proceedings)*, 59:251-260.
- Walters, A.A. (1961) "The theory and measurement of private and social cost of highway congestion", *Econometrica*, 29(4):676-697.
- Walters, A.A. (1987) "Congestion", in: *The new Palgrave: A dictionary of economics*, Vol. 1. New York: Macmillan.
- Wardrop, J. (1952) "Some theoretical aspects of road traffic research", *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, 1(II):325-378.
- Wie, B.-W. and R.L. Tobin (1998) "Dynamic congestion pricing models for general traffic networks", *Transportation Research B*, 32:313-327.