出発時刻選択問題の安定性における時刻選択地点の影響

Stability of the departure time choice problem
in relation to a location of decision making

井料 隆雅[*], 桑原 雅夫[**]
By Takamasa IRYO[*] and Masao KUWAHARA[**]

１. はじめに

この論文では，出発時刻選択問題における時刻選択地点の位置と均衡の安定性との関連について議論を行う。

出発時刻選択問題 [1)] とは道路における渋滞の発生と利用者の道路利用時刻の選択行動との関係を理論的に考える枠組みである。渋滞は道路利用者が特定の時刻に集中して道路を利用しようとするために発生するものであるため，出発時刻選択問題は，渋滞を理論的に考える際に必要不可欠なものである。

出発時刻選択問題でよく問題になるのが「均衡状態の安定性」である。均衡状態の安定性については未だ分からない点が多い。均衡状態が安定しないということは均衡状態が実現されないことを意味するため，このことは出発時刻選択問題の応用上非常に問題となるところである。

一方，道路交通における出発時刻選択問題を考える際には，利用者がどの地点における時刻を基準として行動を決定するかを明示的に示さなくてはならない（「時刻選択地点」の明示化）。すなわち，利用者が出発地における時刻，すなわち「出発時刻」を希望時刻として持つか（出発地基準），あるいは到着地における時刻，すなわち「到着時刻」を希望時刻として持つか（到着地基準）で問題の質が異なってくることに注意する必要がある。これは，渋滞現象では旅行時間の変動があるので，各利用者が出発地を出る時刻と到着地に到着する時刻との間には一定の関係が存在しないからである。特に「到着時刻」については，利用者は実際に発生する渋滞を旅行前に正確に知ることが出来ないために,「自分の意図した到着時刻が実現するとは限らない」という特徴があることが問題になる。

ここでは，出発時刻選択問題の均衡状態の安定性について，時刻選択地点の差，特に出発地基準と到着地基準との差に着目した解析を行うこととする。

２. 出発時刻選択問題の定式化

ここでは，この研究における出発時刻選択問題の定式化を行う。

いま，単一道路上に１つづつの出発地と到着地，またポイントキューの単一ボトルネックが存在するネットワークを考え，渋滞はボトルネックモデルによって記述されるとする。出発地からボトルネックまで，またボトルネックから到着地までの旅行時間は不変とする。車両のボトルネックへの流入はボトルネック累積流入曲線 $A(t_a)$ で示す。ここで t_a はボトルネック流入時刻である。ボトルネック累積流出曲線は $D(t_d)$ で示される。ここで t_d はボトルネック流出時刻である。ボトルネックは FIFO サービスであるとする。ボトルネック流出時刻を基準にした待ち時間を $w_a(t_a)$ と表記する。$w_a(t_a)$ はボトルネック容量 μ を用いて

$$w_a(t_a) = \{A(t_a) - D(t_a)\} / \mu \qquad (1)$$

と示せる。以上の関係を図で示したのが図１である。なお渋滞発生中はボトルネックは容量と同量の交通量をさばくので，式 (1) を t_a で微分すると

$$w'_a(t_a) \quad = \quad \{A'(t_a) - \mu\} / \mu = A'(t_a)/\mu - 1 \qquad (2)$$

を得る (’ は t_a 微分を示す。以下同じ)。また，

$$t_d = t_a + w_a(t_a) \qquad (3)$$

キーワード：交通行動分析
[*]正会員、工博、東京大学国際産学共同研究センター
連絡先：〒 153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1
東京大学生産技術研究所桑原研究室
TEL：03-5452-6001 ext.58175
FAX：03-5452-6420
e-mail iryo@nishi.iis.u-tokyo.ac.jp
[**]正会員、Ph.D.、東京大学生産技術研究所

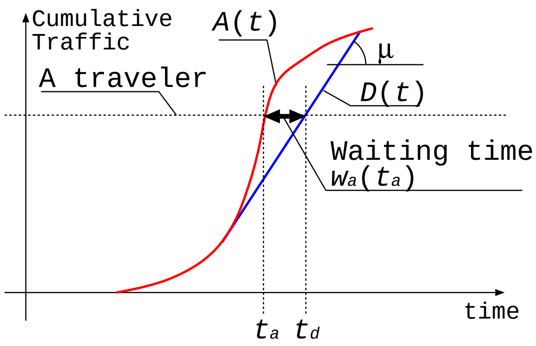

図１　ボトルネックでの累積図

が成立するので，これらの両辺を微分すると

$$\frac{dt_d}{dt_a} = 1 + w'_a(t_a) \tag{4}$$

となる。

利用者は自分が旅行するときに発生するであろう渋滞の状況 $w_a(t_a)$ を予測し，それを元にして自分の道路利用時刻を決定する。「道路利用時刻」の測定地点としては「出発地」と「到着地」の２種類を考えるが，出発地からボトルネックまでの旅行時間は不変としたので，出発地を出発する時刻を目標に時刻選択を行うこと（出発地基準）は，ボトルネック流入時刻 t_a を選択することと同じことになる。同様にボトルネックから目的地までの旅行時間も不変なので，到着地に到着する時刻を目標に時刻選択を行うこと（到着地基準）はボトルネック流出時刻 t_d を選択することと同じことになる。よって利用者は「出発地基準」では t_a を直接選択し,「到着地基準」では t_d をまず選択し，その後に予想される待ち時間 $w_a(t_a)$ と式 (3) の関係を用いて t_a を算出することになる。

利用者の行動原理の詳細については，この論文では定性的な評価のみを行うため，ここでは触れない。

３. 出発時刻選択問題の動学的記述

ここでは，出発時刻選択問題を動学的に記述する方法を定義することを行う。

利用者は待ち時間 $w_a(t_a)$ を参考にして行動を決定する，とすでに述べたが，この $w_a(t_a)$ を旅行前に正確に知ることは不可能であり，現実には何らかの方法で推定された値を用いるしかない。そこでまず「利用者は前日の渋滞が当日も完全に再現されると考えて行動を決定する」という仮定をおくことにする。するとボトルネック流入曲線の日々の変動は

$$A(t_a, x+1) = A^+(t_a; w_a(t_a, x)) \tag{5}$$

という式によって記述することができる。ここで x は経過日数を意味する。また，$A^+(t_a; w(t_d, x))$ は x 日目に発生した待ち時間 $w_a(t_a, x)$ をすべての利用者が当日発生する待ち時間と認知して行動した結果の新しい流入曲線を意味する。

一方で実際にはすべての人が同じ情報に従って同時に行動を変えるとは考えにくい。そこで式 (5) を

$$A(t_a, x+1) = \alpha A^+(t_a; w_a(t_d, x)) + (1-\alpha)A(t_a, x) \tag{6}$$

と発展させてみることを考える（α は 0 より大きく 1 未満の定数)。この式は「一部の利用者」のみが前日の渋滞を参考にして行動を変え，残りの利用者は行動を変えないことを意味する。さらにこの式を

$$A(t_a, x+\alpha) = \alpha A^+(t_a; w_a(t_a, x)) + (1-\alpha)A(t_a, x) \tag{7}$$

と書き換えた上で $\alpha \to 0$ とすることにより

$$\{A(t_a, x+\alpha) - A(t_a, x)\}/\alpha = A^+(t_a; w_a(t_a, x)) - A(t_a, x) \tag{8}$$

より

$$\frac{\partial A}{\partial x} = A^+(t_a; w_a(t_a, x)) - A(t_a, x) \tag{9}$$

とできる。この変形により，式 (6) から α を除去できる上に，数学的により扱いやすい微分方程式の形の式を用いることが可能になるので，以下ではこの式で系の動的な変動を表現することにする。なおこの式では x には日数の意味はなく，単に利用者の行動の更新の進行度を示す値になっていることに注意したい。なお以降では式 (9) をそのままは用いず，両辺を t_a で微分した式

$$\frac{\partial A'}{\partial x} = A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) - A'(t_a, x) \tag{10}$$

を用いる。

４. 均衡状態付近における安定性の解析

ここでは出発時刻選択問題の均衡状態付近における定性的な性質を解析することを行う。なおここで

は「均衡状態付近」ということを，$A'()$ の均衡状態からの差

$$\Delta A'(t_a, x) \quad = \quad A'(t_a, x) - A'_e(t_a) \tag{11}$$

が均衡状態における流入曲線の微分 $A'_e(t_a)$ よりも十分小さいとき，と定義する。このとき式 (10) は

$$\frac{\partial \Delta A'}{\partial x} \quad = \quad A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) - \Delta A'(t_a, x) - A'_e(t_a) \tag{12}$$

と書き直せる。

出発地基準の場合について考える。いま，均衡状態周辺では利用者の選択する行動も均衡状態に近いと仮定すれば

$$\Delta A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) \quad = \quad A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) - A'_e(t_a) \tag{13}$$

と書ける。これを式 (12) に代入すると

$$\frac{\partial \Delta A'}{\partial x} = \Delta A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) - \Delta A'(t_a, x) \tag{14}$$

となる。これを形式的に解くと

$$\begin{aligned} &\Delta A'(t_a, x) = \\ &\Delta A^{+'}(t_a, 0) \exp\left(-x + \int_0^x \frac{\Delta A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x^*))}{\Delta A'(t_a, x^*)} dx^*\right) \end{aligned} \tag{15}$$

となる。

到着地基準の場合には，利用者が直接選択するのは t_a ではなく t_d であるために，利用者の行動を直接 $A^{+'}()$ で示すのは適当ではない。そこでここでは利用者の t_d の累積選択曲線 $C^+(t_d; w_a(t_a, x))$ を用いる。この $C^+()$ は，時刻 t_d までにボトルネックを流出しようという「意図」を持つ利用者の総数を示す。$A^+()$ との関係は

$$A^+(t_a; w_a(t_a, x)) = C^+(t_d; w_a(t_a, x)) \tag{16}$$

で示すことができる（図２）。これを t_a で微分すると

$$\begin{aligned} A^{+'}(t_a; w_a(t_a, x)) \quad &= \quad C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) \frac{dt_d}{dt_a} \\ &= \quad C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x))(1 + w'_a(t_a, x)) \end{aligned} \tag{17}$$

を得る（式 (4) を使用）。均衡状態では系が静止するので，すべての利用者は自分の意図した時刻ちょうどにボトルネックを流出することになる。このため，累積選択曲線は流出曲線と一致し，

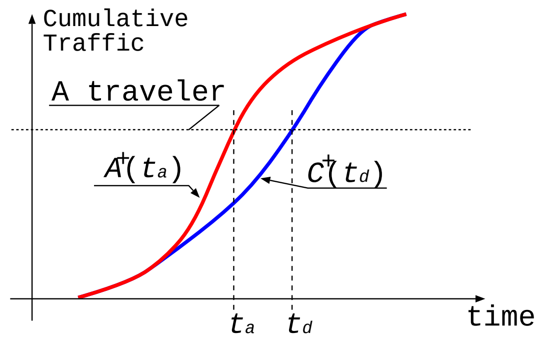

図２　$A^+()$ と $C^+()$ の関係

$$C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) = D'(t_d) \tag{18}$$

となるが，流出曲線の傾きは渋滞中であればボトルネックの容量に等しくなることに注意したい。よって均衡時の $C^{+'}()$ を $C_e^{+'}()$ とすれば

$$C_e^{+'}(t_d) = \mu \tag{19}$$

となる。$C^{+'}()$ の均衡状態付近での摂動 $\Delta C^{+'}()$ は

$$\Delta C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) \quad = \quad C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) - C_e^{+'}(t_d) \tag{20}$$

と定義する。渋滞中であればこれは

$$\Delta C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) \quad = \quad C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) - \mu \tag{21}$$

と書き直せる。

$\Delta C^{+'}()$ を用いて系の挙動がどうなるかを記述しよう。式 (12) に式 (17) を代入し，さらに式 (2) によって $w'_a()$ を $A'()$ に置き換えると，渋滞中であれば

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta A'}{\partial x} \\ &\quad = \ C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) A'(t_a, x)/\mu - \Delta A'(t_a, x) - A'_e(t_a) \\ &\quad = \ \left\{C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x))/\mu - 1\right\} \{A'_e(t_a) + \Delta A'(t_a, x)\} \\ &\quad = \ \Delta C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x)) A'_e(t_a)/\mu \end{aligned} \tag{22}$$

と記述できる。なお摂動の２次の項は無視した。これを形式的に解くと

$$\Delta A'(t_a, x) \quad = \quad \mu^{-1} A'_e(t_a) \int \Delta C^{+'}(t_d; w_a(t_a, x^*)) dx^* \tag{23}$$

となる。

式 (15) と (23) を比較して分かることは，式 (15) は指数関数になっておりなおかつ x の増加に従って減衰する要素 $(\exp(-x))$ が入っているが，式 (23) にはそのような要素は入っていないということである。このことはすなわち
「出発地基準では一般に系は均衡状態に収束する」
「到着地基準では系が均衡状態に収束するかどうかはわからないが，一般には出発地基準に比べると収束しづらい」
ということを意味している。

このことを確認するためにある特定のケースにおける数値計算を行った。ここでは，利用者は費用最小化原理にのっとって t_a または t_d を選択するとし，その費用は到着地基準では

$$p = w_d(t_d) + \gamma(t_w - t_d) \tag{24}$$

と（$w_d(t_d)$ は t_d を基準に測った待ち時間），また出発地基準では

$$p = w_a(t_a) + \gamma(t_w - t_a) \tag{25}$$

で計算されるとしている。ここで t_w は希望出発時刻または希望到着時刻，γ は定数で，これら 2 つの値は各利用者に固有かつ外性的に与えられるパラメータである。なおここでは $t_w < t_d$ または $t_w < t_a$ となることはないとしている。

図 3，図 4 に計算結果を示す。この図のように，出発地基準ではある特定の状態に収束する一方，到着地基準では渋滞開始時刻からしばらくの時間帯をのぞいて特定の待ち時間に収束しないことがわかる。

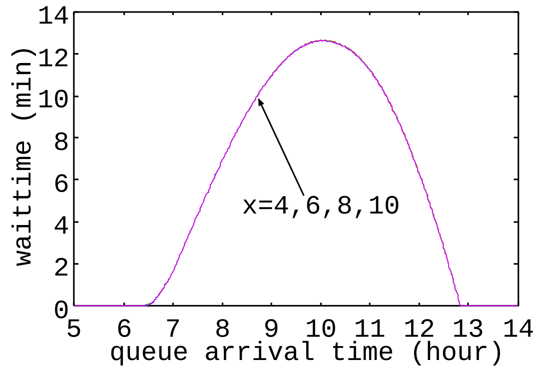

図３　出発地基準の時の待ち時間の変動

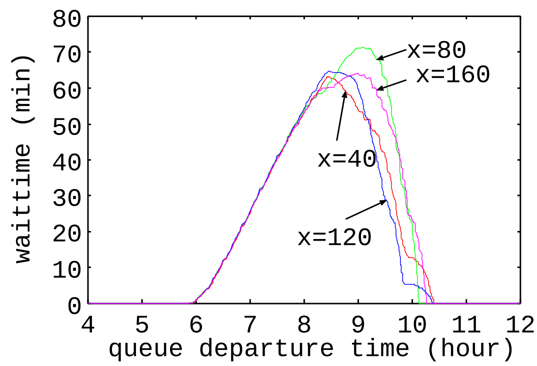

図４　到着地基準の時の待ち時間の変動

５．考察

以上で示したとおり，出発時刻選択問題では，利用者が t_a を選択する（出発地基準）か，t_d を選択する（到着地基準）かで，系が収束するかどうかに差が出ることがわかった。このことは，渋滞現象においては利用者が「どの地点での」時刻を目標にするか，ということが系の振る舞いに大きく影響を与えることを示している。

このような「系が均衡状態に収束しない」ということは，現実の世界において，例えば，毎日発生する渋滞のパターンが同一条件（曜日など）の日であっても一定のものにならない，ということを生起させる可能性がある。このことは，旅行時間予測などの実務的問題を考える際に重要な要素となる可能性がある。

なお，到着地基準について数値計算の結果を見ると，渋滞の開始時刻付近では系が収束する一方，それ以降では収束しないことがわかった。到着地基準については，筆者の過去の報告において，渋滞の開始時刻付近とそれ以降では，利用者の行動決定のメカニズムに差があることが指摘されており，このことが渋滞の開始時刻付近に限って系が収束するという現象と関連があると思われる。

参考文献

1) 桑原雅夫:道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集,No.604/IV-41,pp73-84,1998.1
2) 井料隆雅, 桑原雅夫:出発時刻選択問題における「疑似均衡」概念の導入, 第 24 回土木計画学研究・講演集,2001.11