

応用確率統計学（林担当分） 演習問題

答案の提出について 本演習問題はレポートではないので、答案の提出の義務はない*1。しかし、本演習問題を解いて、答案を1/30の深夜までに提出した者は、試験の成績（林担当分のみ）がギリギリ不合格だった場合に限り、救済措置*2を講ずる。よって、試験で合格点を取れる自信の無い者は、試験前にすべて解いて提出することを推奨する。また、自信のある者も、試験対策として本演習問題を事前に解いておくことを薦める。）

提出方法（希望者のみ） ファイル名を「応用確率統計学_学籍番号_氏名.拡張子」とした Word または PDF ファイルを添付し、メールの件名を「応用確率統計学レポート」とした上で、s_hayashi@plan.civil.tohoku.ac.jp宛に電子メールで送付すること。（紙ベースで提出したい場合は、人間・環境系研究教育棟 408-A 室（林居室）まで直接持参のこと。林が不在の場合は、408-A 室のドアの前のポスト（白色金網型）に入れておいても構わない。なお、408-A 室は 408 室の中に有るので注意。）

質問など 質問が有る場合は、できるだけ事前にメールでアポを取って来室すること。

以下の問題にすべて答えよ。ただし、少数は適当なところ（少数第 2 位程度）で打ち切ってよい。また、必要に応じて電卓や分布表を用いて構わない。

問題 1. (1) 母数と統計量の違いを説明せよ。

(2) 不偏推定量と一致推定量の意味を書け。

(3) 平均 μ 、分散 σ^2 の確率分布に従う母集団から無作為に抽出した標本を X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$) とする。このとき、標本平均 \bar{X} と標本分散 s^2 を求めよ。（ここでいう標本分散とは分散の不偏推定量である不偏分散を指す。以降の問題も同様。）

(4) (3) で求めた標本平均 \bar{X} と標本分散 s^2 がそれぞれ平均 μ と分散 σ^2 の不偏推定量になっていることを示せ。

問題 2. (1) 以下の文章の【ア】～【エ】に適当な文章、数式、数値を入れよ。

互いに独立な確率変数 X_1, \dots, X_n がそれぞれ平均 μ 、分散 σ^2 であるような同一の確率分布（正規分布とは限らない）に従うとする。さらに、 $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。このとき、 $Y_n :=$ 【ア】で定義される確率変数は、 $n \rightarrow \infty$ とすると平均 0、分散 1 の正規分布（すなわち標準正規分布）に分布収束する。これがいわゆる【イ】定理である。したがって、 n が十分大きいとき、 Y_n は近似的に標準正規分布に従うとみなせる。すなわち、 \bar{X}_n は平均【ウ】、分散【エ】の正規分布に近似的に従うとみなすことができる。

(2) 平均 μ 、分散 σ^2 （いずれも未知）の確率分布に従う母集団から 1000 個の無作為標本 $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ を取り出したとき、その標本値が表 1 のように得られた。

表 1: 標本値

X_1	X_2	X_3	...	X_{999}	X_{1000}
3	1	2	...	3	3

ただし、 X_i ($i = 1, \dots, 1000$) のうち、 $X_i = 1$ となったものは 239 個、 $X_i = 2$ となったものは 332 個、 $X_i = 3$ となったものは 429 個であった。このとき、得られた標本値を用いて、平均 μ の値を 99% の信頼度で区間推定せよ。ただし、得られた標本は大標本とみなせるものとする。

問題 3. 平均 μ 、分散 σ^2 （いずれも未知の値）の正規分布に従う母集団から 8 個の無作為標本 X_1, \dots, X_8 を取り出したとき、その標本値が表 2 のように得られた。

(1) 表 2 の標本値に対して、標本平均 \bar{X} と標本分散 s^2 を計算せよ。

(2) 平均 μ の値を 95% の信頼度で区間推定せよ。（標本数が少ないので大標本とはみなせない。）

*1 林担当分（統計）の成績は（基本的には）試験のみで付けるので、答案を提出しなくても試験の成績が合格点に達していれば合格となる。

*2 あくまで林担当分のみ。赤松先生担当分の成績が著しく悪いと、不合格になるので注意。

表 2: 標本値

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
12.2	15.1	16.4	17.8	18.9	15.2	11.3	13.1

問題 4. 指数分布とは、確率密度関数が正のパラメータ $\lambda > 0$ を用いて $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ で与えられるような確率分布である。指数分布に従う母集団から 6 個の無作為標本 X_1, \dots, X_6 を取り出したとき、その標本値が表 3 のように得られた。このとき、未知のパラメータ (母数) λ の値を最尤法を用いて推定したい。

表 3: 標本値

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0.1	0.3	1.1	0.1	0.5	0

- (1) 尤度関数 $L(\lambda)$ と対数尤度関数 $l(\lambda)$ を求めよ。
- (2) 対数尤度関数 $l(\lambda)$ を最大化することにより、 λ の最尤推定量を求めよ。

問題 5. ある飲料メーカーが発売している缶ジュースに (平均) 果汁含有量が 30% と表示されていた。これについて、表示が妥当であるかどうか調べるため、缶ジュースを無作為にいくつか選んで果汁含有量を測定し、

帰無仮説 H_0 : 缶ジュース全体の平均果汁含有量は 30% ($\mu = 30$) である。

対立仮説 H_1 : 缶ジュース全体の平均果汁含有量は 30% 未満 ($\mu < 30$) である。

について優位水準 0.05 で検定する。ただし、この缶ジュースの (真の) 果汁含有量を $X(\%)$ としたとき、 X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、 $\sigma^2 = 0.3$ であることが分かっているものとする。

- (1) 缶ジュースを無作為に 10 個選んだ結果、それらの平均果汁含有量は 29.8% であった。仮説 H_0 が棄却されるかされないかについて理由とともに述べよ。
- (2) 缶ジュースを無作為に 100 個選んだ結果、それらの平均果汁含有量は 29.8% であった。仮説 H_0 が棄却されるかされないかについて理由とともに述べよ。

問題 6. 被説明変数 y_i と説明変数 x_i, w_i の関係が $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, 5$) であるような線形回帰モデルを考える。ただし、 ε_i は攪乱項であり期待値 0、分散 σ^2 、共分散 0 の正規分布に従うものとする。このとき、以下の表 4 に得られた観測データをもとに線形モデルの係数 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ の最小二乗推定量を求めよ。(Google などで“逆行列”と“計算サイト”で複合検索をかければ、逆行列を計算してくれるウェブサイトに通る着ける。)

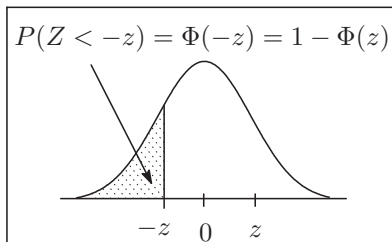
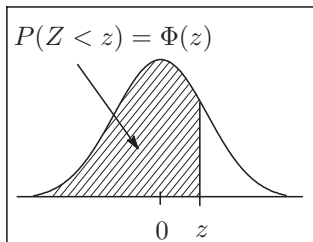
表 4: 観測データ

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
y_i	21.5	-2.4	-13.3	-9.1	7.7
x_i	8.6	-3.0	-6.1	-5.0	2.3
w_i	-0.5	-3.0	6.6	1.7	1.0

標準正規分布表

学籍番号: _____

名前 _____



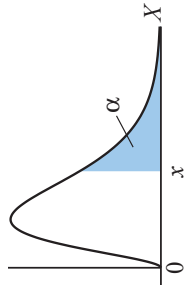
$Z \sim N(0, 1), P(Z < z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

χ²分布表

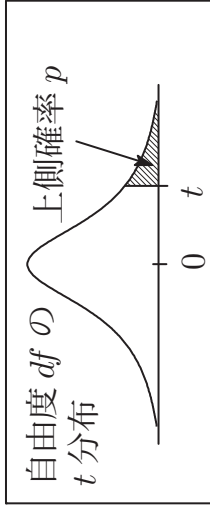
表の見方の例:

自由度 ν が 3 のとき, 斜線部分の面積 α が 0.5 になるような x の値は 2.366 である。



α	0.995	0.975	0.95	0.9	0.5	0.025	0.01	0.005
$\nu = 1$	0.000393	0.000982	0.00393	0.0158	0.455	3.841	5.024	6.635
$\nu = 2$	0.010	0.051	0.103	0.211	1.386	5.991	7.378	9.210
$\nu = 3$	0.072	0.216	0.352	0.584	2.366	7.815	9.348	11.345
$\nu = 4$	0.207	0.484	0.711	1.064	3.357	9.488	11.143	13.277
$\nu = 5$	0.412	0.831	1.145	1.610	4.351	11.071	12.833	15.086
$\nu = 6$	0.676	1.237	1.635	2.204	5.348	12.592	14.449	16.812
$\nu = 7$	0.989	1.690	2.167	2.833	6.346	14.067	16.013	18.475
$\nu = 8$	1.344	2.180	2.733	3.490	7.344	15.507	17.535	20.090
$\nu = 9$	1.735	2.700	3.325	4.168	8.342	16.919	19.023	21.666
$\nu = 10$	2.156	3.247	3.940	4.865	9.342	18.307	20.483	23.209
$\nu = 11$	2.603	3.816	4.575	5.578	10.341	19.675	21.920	24.725
$\nu = 12$	3.074	4.404	5.226	6.304	11.340	21.026	23.337	26.217
$\nu = 13$	3.565	5.009	5.892	7.041	12.340	22.362	24.736	27.688
$\nu = 14$	4.075	5.629	6.571	7.790	13.339	23.685	26.119	29.141
$\nu = 15$	4.601	6.262	7.261	8.547	14.339	24.996	27.488	30.578
$\nu = 16$	5.142	6.908	7.962	9.312	15.338	26.296	28.845	32.000
$\nu = 17$	5.697	7.564	8.672	10.085	16.338	27.587	30.191	33.409
$\nu = 18$	6.265	8.231	9.390	10.865	17.338	28.869	31.526	34.805
$\nu = 19$	6.844	8.906	10.117	11.651	18.338	30.144	32.852	36.191
$\nu = 20$	7.434	9.591	10.851	12.443	19.337	31.410	34.170	37.566
$\nu = 21$	8.034	10.283	11.591	13.239	20.337	32.670	35.479	38.932
$\nu = 22$	8.643	10.982	12.338	14.041	21.337	33.924	36.781	40.289
$\nu = 23$	9.260	11.688	13.090	14.848	22.337	35.172	38.076	41.638
$\nu = 24$	9.886	12.401	13.848	15.659	23.337	36.415	39.364	42.980
$\nu = 25$	10.520	13.120	14.611	16.473	24.336	37.652	40.646	44.314
$\nu = 26$	11.160	13.844	15.379	17.292	25.336	38.885	41.923	45.642
$\nu = 27$	11.807	14.573	16.151	18.114	26.336	40.113	43.194	46.963
$\nu = 28$	12.461	15.308	16.928	18.939	27.336	41.337	44.461	48.278
$\nu = 29$	13.121	16.047	17.708	19.768	28.336	42.557	45.722	49.588
$\nu = 30$	13.787	16.791	18.493	20.599	29.336	43.773	46.979	50.892
$\nu = 31$	14.458	17.539	19.280	21.433	30.336	44.985	48.232	52.191
$\nu = 32$	15.134	18.291	20.072	22.270	31.336	46.194	49.480	53.486
$\nu = 33$	15.815	19.047	20.866	23.110	32.336	47.400	50.725	54.775
$\nu = 34$	16.501	19.806	21.664	23.952	33.336	48.602	51.966	56.061
$\nu = 35$	17.192	20.569	22.465	24.797	34.336	49.802	53.203	57.342
$\nu = 36$	17.887	21.336	23.269	25.643	35.335	50.998	54.437	58.619
$\nu = 37$	18.586	22.106	24.075	26.492	36.335	52.192	55.668	59.892
$\nu = 38$	19.289	22.878	24.884	27.343	37.335	53.383	56.895	61.162
$\nu = 39$	19.996	23.654	25.695	28.196	38.335	54.572	58.120	62.428
$\nu = 40$	20.706	24.433	26.509	29.050	39.335	55.758	59.342	63.691
$\nu = 50$	27.991	32.357	34.764	37.089	49.335	67.505	71.420	76.154
$\nu = 60$	35.534	40.482	43.188	46.459	59.335	79.082	83.298	88.379
$\nu = 80$	51.172	57.153	60.391	64.278	79.334	101.88	106.63	112.33
$\nu = 90$	59.20	65.65	69.13	73.29	89.33	113.15	118.14	124.12
$\nu = 100$	67.33	74.22	77.93	82.36	99.33	124.34	129.56	135.81
								140.17

t分布表



df	p	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1		1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2		0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3		0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4		0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5		0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6		0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7		0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8		0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9		0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10		0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11		0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13		0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14		0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15		0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16		0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17		0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18		0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19		0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20		0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21		0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22		0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23		0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24		0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25		0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26		0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27		0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28		0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29		0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30		0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40		0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50		0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60		0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70		0.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80		0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90		0.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100		0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
110		0.677	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621
∞		0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576