論 文

# 確率的均衡配分の効率的計算法の開発

赤松 隆*
土屋 雄二**
川上 喜博***

確率的均衡配分モデルは，Wardrop 均衡配分モデルや確率配分法の長所を合わせもった優れたモデルであるが，計算量が他のモデルに比べて非常に大きくなるため実用的利用が難しかった。本研究は，この問題点を解消するために，計算量を大幅に減少することが可能なアルゴリズムを提案する。従来，このモデルを効率的に解くことが困難であるとされてきた理由は，等価な最適化問題が経路に関する変数によって定式化されているためである。そこで本研究では，エントロピーの分解原理を用いることによって，リンク変数のみを用いた等価最適化問題を導き，その問題に凸結合法を適用して均衡解を計算するアルゴリズムを開発した。数値実験の結果，このアルゴリズムは Wardrop 均衡モデルを Frank-Wolfe 法で解く場合よりもはるかに少ない繰り返し計算回数で収束することが確認された。

## 1. はじめに

道路交通網での交通量予測法としては，従来から，Wardrop 均衡配分モデル[15]（等時間原則配分，あるいは利用者均衡配分），時間比配分モデル，分担率モデル等，様々な手法が提案されてきた（例えば文献 8）参照)。これらの手法には，一長一短があるが，最近開発された確率的利用者均衡（Stochastic User Equilibrium：以下，SUE と呼ぶ）配分モデルは従来の手法の欠点の多くを改善しうる手法として注目すべきものであろう。

これは，利用者の行動から決まる交通需要条件と道路網の性能から決まる交通サービス供給条件の均衡状態として交通ネットワーク交通量を予測するという理論に基づいたモデルである。ただし，従来の Wardrop 均衡のようにすべての利用者が交通費用を最小化するような経路のみを選択すると仮定するのではなく，非集計行動モデルによって有効性の確認されているランダム効用理論（例えば文献 3）参照）に基づいた利用者行動モデルを採用している点に特徴がある。この結果，SUE 配分モデルでは，最小費用経路以外の経路も選択されることになり，利用者の持つ経路情報の不完全性や利用者の経路選択の不確定性を考慮でき，現実の利用者行動に近いモデルとなっている。実際，現実ネットワークへの適用計算においても，他の手法より適合度が良いことが報告されている[10),12)]。また，ランダム効用理論に基づいた利用者行動モデルをベースにしていることから，需要予測と計画案評価を理論的に整合性をもって行うことができる[16)]。さらに，このモデルは均衡モデルであるから，単なる確率配分モデルとは異なり，交通混雑現象を考慮することができる。

このように，SUE 配分モデルは，多くの優れた特性を持っているが，従来提案されている計算法では，膨大な計算時間を要するという点が，実用的に用いるためのネックとなっている。

そこで，本研究は，SUE 配分モデル実用化へむけて，計算時間を大幅に短縮可能な計算アルゴリ

* 野村総合研究所(株)システムサイエンス部
** 東京大学工学系大学院修士課程
*** 東京大学工学系大学院修士課程

ズムを開発することを目的とする。

本論文の構成は以下のとおりである。次章では，SUE 配分モデルについて，従来の主な研究の成果をまとめる。従来，このモデルが効率的に解くことができないとされてきた理由はモデルが経路に関する変数によって定式化されていたためである。そこで，第 3 章では，LOGIT モデルの持つ性質を解析することによって，リンク変数のみを用いた SUE 配分モデルの等価最適化問題を導く。第 4 章では，そのリンク変数のみによって定式化されたモデルを効率的に解くためのアルゴリズムを提案する。これは，凸結合法に基づいたアルゴリズムである。第 5 章では，このアルゴリズムの効率性を実際ネットワークへの適用計算によって確認する。最後に，本研究のまとめが示される。

## 2.　確率的利用者均衡配分モデル

### 2.1　定式化

SUE は，利用者のランダムな行動を考慮しうるように Wardrop 均衡をより一般化した概念であるが，その定義は，Daganzo and Sheffi[4]によって次のようになされている。

“自己の経路を変更することにより，そのトリップの所要時間を減少させることができないと，どの利用者も信じている状態”

これは，より具体的には，以下に述べるようなランダム効用理論に基づいた利用者行動モデルによって決まる需要条件，及び交通サービス供給条件の均衡状態として表現される。

まず，利用者行動モデルは以下のように表現される。利用者の知覚する交通費用は，確率的にばらついていると考える。より具体的には OD ペア $rs$ の第 $k$ 番目経路の知覚交通コスト $\tilde{C}_k^{rs}$ は，その経路の測定可能な交通費用 $C_k^{rs}$ と確率的な誤差項 $\xi_k^{rs}$ からなるとする：

$$\tilde{C}_k^{rs}=C_k^{rs}+\xi_k^{rs} \quad \cdots\cdots (1)$$

ただし，測定可能な交通経路費用 $C$ は，その経路上のリンクコスト $t$ の和からなる，すなわち：

$$C_k^{rs}=\sum_a t_a\delta_{ak}^{rs} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで $\delta_{ak}^{rs}=$ OD ペア $rs$ の $k$ 番目経路上にリンク $a$ があれば 1，そうでなければ 0。

利用者は知覚する交通費用が最小となる経路を選ぶとすれば，OD ペア $rs$ の第 $k$ 番目経路を選択する確率は，その経路の確率的な交通コストが最小値をとる確率：

$$P_k^{rs}=\mathrm{Prob}\,[\tilde{C}_k^{rs}<\tilde{C}_l^{rs},\ \forall l\neq k\mid \boldsymbol{t}] \quad \cdots\cdots (3)$$

によって与えられる。$\xi$ の確率分布型として互いに独立な Weibul 分布を仮定する場合，選択率 $P$ は，以下のような LOGIT 式となる。

$$P_k^{rs}=\frac{\exp[-\theta C_k^{rs}]}{\sum_m \exp[-\theta C_m^{rs}]} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで，$\theta$ は誤差項 $\xi$ のばらつきを示すパラメータである。いま，OD 交通量 $q$ を所与とすれば，経路交通量の期待値 $f$ は次式で与えられ，

$$f_k^{rs}=q_{rs}P_k^{rs} \qquad \forall\ k,r,s \quad \cdots\cdots (5)$$

リンク交通量 $x$ は，経路交通量から以下のように計算される。

$$x_a=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \qquad \forall\ a \quad \cdots\cdots (6)$$

交通サービス供給条件は，リンク交通量に関して単調増加なリンクコスト関数：

$$t_a=t_a(x_a) \quad \cdots\cdots (7)$$

によって表現される。以上の条件式を同時に満たした状態として SUE 配分モデルは定式化される。

### 2.2　等価な最適化問題

以上のように非線形連立方程式として定式化された SUE モデルを直接，解析，計算することは難しい。しかし，LOGIT 型選択確率を仮定する場合，SUE 配分モデルは，以下のような最適化問題と等価で，唯一の均衡解をもつことが Fisk[6]により示されている。

$$\min_{(f)}.\ ZP=\frac{1}{\theta}\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\ln f_k^{rs}+\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)d\omega \quad \cdots\cdots (8)$$

subject to

$$q_{rs}=\sum_k f_k^{rs} \qquad \forall\ r,s \quad \cdots\cdots (9)$$

$$x_a=\sum_{rs}\sum_k f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \qquad \forall\ a \quad \cdots\cdots (10)$$

$$f_k^{rs}\geqq 0 \qquad \forall\ k,r,s \quad \cdots\cdots (11)$$

この問題は $\theta\to 0$ とすると交通コストに関わりな

く全経路へ等確率でフローが流れる。逆に，$\theta\to+\infty$ とすれば，第1項のエントロピー関数項は消え，Wardrop 均衡の等価最適化問題と一致するから，Wardrop 均衡フローパターンを与える。したがって，SUE は，Wardrop 均衡をより一般化した概念であることが分かる。ただし，Wardrop 均衡では，リンク交通量 $\boldsymbol{x}$ に関しては唯一の均衡解が決まるが，経路交通量 $\boldsymbol{f}$ に関しては唯一に決まらないのに対し，SUE では経路交通量 $\boldsymbol{f}$ に関して唯一の解が決まることには注意が必要である。

### 2.3 従来の解法

SUE 配分モデルは，経路交通量を未知変数とした問題として定式化されている。しかし，実際的なネットワークにおいては，経路の本数は膨大になり，目的関数の値を計算することができず，従来の Wardrop 均衡モデルと同様のアルゴリズムを適用して解くことは難しい。そこで，経路交通量を変数とせずにリンク交通量を計算する方法として，Fisk[6]，Sheffi and Powell[13),14)]により逐次平均法（Method of Successive Averages：以下では，MSA と呼ぶ）が提案されている。この方法は，Frank-Wolfe アルゴリズム[7)]におけるリンク交通量改訂のためのステップサイズをあらかじめ決めた定数とするものである。しかし，この方法は収束が非常に緩慢であるとの指摘[10),13)]がなされており，また我々が行った数値計算実験[9)]においても，繰り返し計算を 1,000 回行った後ですら，均衡解と相当乖離した値となっているケースが確認されている。これは，MSA では，均衡状態で選択される経路集合と繰り返し計算の途中段階での経路集合が異なっていても，繰り返し回数が増えるに従って（均衡状態への接近度に関わりなく）ステップサイズを小さくするため，最終的に流れるべきフローパターンへ解ベクトルが改善されにくいためである。このような現象は，経路数が増えればしばしば生じうるから，現実ネットワークでの配分計算においては，実際的な繰り返し計算回数で収束させることは困難である。つまり，MSA は実用的な計算法とは言い難く，SUE 配分モデルを実用化するためには，新たな効率的計算法の開発が必要である。

## 3. 経路変数のリンク変数への分解

本章では，LOGIT 型確率配分モデルの持つ性質を解析し，それをもとに，リンク変数のみによって表現された SUE 配分モデルを導く。

### 3.1 リンク変数のみを用いた確率配分モデル

ここでは，フローインディペンデントなLOGIT 型確率配分モデルを考え，そのモデルの持つマルコフ連鎖的性質，及び，それから導かれるリンク変数のみによって表現された等価最適化問題を示す。ただし，記号の煩雑さを避け，議論の本質的な点を明確にするために，OD 交通量 $q=1$ の 1 OD ペアの場合について説明する。多重 OD ペアの場合には，あとで重ね合わせればよいので一般性は失われない。なお以下では，第 $p$ 番目経路の交通量 $f_p$，リンク $i\to j$ の交通量 $x_{ij}$ と各々，以下の関係にある経路選択率 $\boldsymbol{P}$，リンク選択率 $\boldsymbol{p}$ を，フローを表現する変数として用いる。

$$P_p=f_p/q \qquad (12)$$

$$p_{ij}=x_{ij}/q \qquad (13)$$

また，第 $p$ 番目経路の交通費用 $C_p$ はリンク $i\to j$ の交通費用 $t_{ij}$ と以下の関係にあるとする。

$$C_p\equiv\sum_{ij} t_{ij}\delta_{ij,p} \qquad (14)$$

ここで，$\delta_{ij,p}=$ リンク $i\to j$ が $p$ 番目経路上にあれば 1，そうでなければ 0。

**【定理 1】**

以下の式で定義されるロジット型確率配分モデル

$$P_p=\frac{\exp[-\theta C_p]}{\sum_{p'}\exp[-\theta C_{p'}]} \qquad (15)$$

$$p_{ij}=\sum_p P_p\delta_{ij,p} \qquad (16)$$

によって得られるリンク交通量パターンと経路交通量パターンは，次のような関係式を満たしている。

$$\prod_{ij}\left[\frac{p_{ij}}{\sum_m p_{mj}}\right]^{\delta_{ij,p}}=P_p \qquad (17)$$

**【定理 2】**

LOGIT 型確率配分モデルにより配分されたフローパターンにおいては，経路選択エントロピー *HP*，ノード選択エントロピー *HN*，リンク選択エントロピー *HL* の間に以下の関係式が成立して

いる。

$$HP=HL-HN \cdots\cdots (18)$$

ここで，$HP, HL, HN$ の定義は以下のとおり，

$$HP \equiv -\sum_p P_p \ln P_p \cdots\cdots (19)$$

$$HL \equiv -\sum_{ij} p_{ij} \ln p_{ij} \cdots\cdots (20)$$

$$HN \equiv -\sum_j \left\{ \left( \sum_i p_{ij} \right) \ln \left( \sum_i p_{ij} \right) \right\} \cdots\cdots (21)$$

以上の定理の証明は，筆者らの既往の研究[1)2)]において既に示されているため，ここでは省略する。

上の定理で経路選択エントロピー $HP$ の分解表現として現れた $HL$-$HN$ は以下のような重要な性質を持っている。

**【定理 3】**

関数 $HL(\boldsymbol{p})$-$HN(\boldsymbol{p})$ は，リンク選択率（交通量）$\boldsymbol{p}$ に関して狭義凹関数である。

証明：APPENDIX-1 参照

以上の定理をヒントに，以下では，リンク変数のみによって表現された確率配分モデルを導く。1 OD ペア，フローインディペンデントな場合の確率配分モデルは，経路選択率 $\boldsymbol{P}$ を決める式(15)，及び，経路選択率 $\boldsymbol{P}$ とリンク選択率 $p$ の関係を決めるフロー保存式(16)によって表現される。これらの式によって定義される $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p})$ は［定理 1］より式(17)の関係式を満たしている。これらの式から経路選択確率 $\boldsymbol{P}$ を消去すると，

$$\prod_{ij} \left[ \frac{p_{ij}}{\sum_m p_{mj}} \right]^{\delta_{ij,p}} = \frac{\exp[-\theta C_p]}{\sum_{p'} \exp[-\theta C_{p'}]} \cdots\cdots (22)$$

この式は，リンク交通量 $\boldsymbol{p}$ に関してはロジット型確率配分モデルと全く等価なフローパターン（経路交通量 $\boldsymbol{P}$ を含んでいないから，経路交通量パターンに関して等価であるとは言えないが）を定義している。したがって，リンク変数に関してロジット型確率配分モデルと等価な最適化問題を得るには，この式が最適性の必要十分条件となるような最適化問題を考えてやればよい。そこで，以下のような最適化問題を考えてみよう。

**【Program : SA-Arc】**

$$\min.\ Z(p) = \frac{1}{\theta}\{-HL+HN\} + \sum_{ij} p_{ij} t_{ij} \cdots\cdots (23)$$

subject to

$$g_k(p) = \sum_i p_{ik} - \sum_j p_{kj} + \delta_{rk} - \delta_{sk} = 0 \qquad \forall\ k \cdots\cdots (24)$$

$$p_{ij} \geqq 0 \qquad \forall\ ij \cdots\cdots (25)$$

ここで，$r, s$ は，各々，発・着ノードを示し，$\delta_{ij}$ は $i=j$ のとき 1，そうでないとき 0。

ここまでの考察を利用することにより，最適化問題［SA-Arc］は，以下のような性質をもっていることが分かる。

**【定理 4】**

最適化問題［SA-Arc］は，大域的に唯一の解を持つ。ただし経路としてサイクリックなものは含めない。

証明：APPENDIX-2 参照

**【定理 5】**

最適化問題［SA-Arc］は，LOGIT 型確率配分問題と等価なリンク交通量パターン $p$ を与える。

証明：APPENDIX-3 参照

### 3.2　リンク変数による確率的均衡配分の表現

以上の定理は，多重 OD ペアの場合にも，単に OD ペアを重ね合わせてゆくことにより容易に拡張できる。ただし，同一の発ノードを持つリンク交通量に関するエントロピー関数はすべて同一の値をもつ[1),2)]から，エントロピー関数は，発ノードについてのみ区別した形式とすればよい。また，リンクコストがフローディペンデントな場合には，Wardrop 均衡の場合と同様に，リンクコスト $t$ に関する項をリンクコスト関数の積分に置き換えてやればよい。したがって，リンク交通量のみによって表現された LOGIT 型多重 OD ペア SUE 配分モデルの等価最適化問題として以下の問題を得る。

**【Program : SUE-Arc】**

$$\min.\ Z(x) = \frac{1}{\theta} \sum_r \{-HL(x^r) + HN(x^r)\} + \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega \cdots\cdots (26)$$

subject to

$$\sum_i x_{ik}^r - \sum_j x_{kj}^r + \delta_{rk} \sum_s q_{rs} - q_{rk} = 0 \qquad \forall\ k\ ;\ r \cdots\cdots (27)$$

$$x_{ij}=\sum_r x_{ij}^r \quad \forall\ ij \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$x_{ij}^r \geqq 0 \quad \forall\ ij\ ;\ r \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

ここで，目的関数中に現われる $HL, HN$ は以下のように発地別リンク交通量を用いて定義されたエントロピー関数である。

$$HL(x^r)=-\sum_{ij} x_{ij}^r \ln x_{ij}^r \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$HN(x^r)=-\sum_j\left\{\left(\sum_i x_{ij}^r\right)\ln\left(\sum_i x_{ij}^r\right)\right\}\cdots(31)$$

$x_{ij}^r$：発地が $r$ でリンク $i\rightarrow j$ を通過する交通量

この最適化問題は，Fisk 型最適化問題においては経路交通量によって定義されていたエントロピー関数が発地別リンク交通量のみを用いた表現に置き換えられ，また，フロー保存則が，発地別リンク交通量によって表現された各ノードでのフローの連続条件式(27)となっている。したがって，目的関数値の計算，制約条件の取扱いが容易であり，従来の経路交通量によって表現された定式化よりも格段に解きやすい問題となっていることが分かる。

## 4. 効率的な計算アルゴリズム

前章で定式化した最適化問題［SUE-Arc］を解けば，SUE 交通量を得ることができる。この問題は，経路交通量ではなく発地別リンク交通量を未知変数とした問題となっており，経路の数え上げを必要としないため，種々のアルゴリズムの適用が可能である。以下では，必要とされる記憶容量と収束速度のバランスを考慮した上で，最も実際的と思われる凸結合法[8]を用いたアルゴリズムを示す。

凸結合法は，線形制約最適化問題に対する許容方向法の一種で，目的関数を近似して得られる補助問題の解ベクトル $\boldsymbol{y}$ と各繰り返しで得られている一時的な解 $\boldsymbol{x}$ から許容降下方向ベクトル $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ を求め，これと $\boldsymbol{x}$ の凸結合ベクトル $\boldsymbol{x}+\alpha(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ によって解を改訂することを繰り返し，最適解を求める方法である。各繰り返し計算での $\alpha$ は目的関数を最小化するような 1 次元探索を行う（ただし，$0\leqq\alpha\leqq1$）ことによって決定される。また，この方法では，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は許容解であるから，制約式が線形の場合，その凸結合である各繰り返し計算での解もまた許容解となっている。

問題［SUE-Arc］の場合，補助問題として目的関数の第 2 項のみを線形化した問題を考えれば，フローインディペンデントな確率配分問題となるから，Dial のアルゴリズム[5]を用いることによって，経路を列挙することなく効率的に解くことができる。また，目的関数は発地別リンク交通量及びリンクコスト関数のみによって表現されているから，一次元探索も容易に実行可能である。したがって，凸結合法によって SUE モデルを解くアルゴリズムは以下のようにまとめられる。

STEP 0：［初期化，初期許容解の計算］

$\boldsymbol{t}^1$：$\boldsymbol{t}(0)$ として，Dial のアルゴリズムを行い，初期許容リンク交通量 $x^1$ を求める。繰り返し計算回数 $n\leftarrow1$

STEP 1：［リンクコスト改訂］

$$\boldsymbol{t}^n\leftarrow\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^n)$$

STEP 2：［補助問題を解き勾配ベクトルを計算］

Dial のアルゴリズムをリンクコスト $\boldsymbol{t}^n$ に対して行い，そのリンク交通量を $\boldsymbol{y}^n$ とする。この計算は，発ノードごとに分解し，独立に行える。

STEP 3：［1 次元探索］

以下の 1 変数最適化問題を $\alpha$ について解く。

$$\min.\ Z[\boldsymbol{x}^n+\alpha(\boldsymbol{y}^n-\boldsymbol{x}^n)],\quad \text{s.t.}\ 0\leqq\alpha\leqq1$$

STEP 4：［リンク交通量改訂］

リンク交通量 $x$ を次式により改訂。

$$\boldsymbol{x}^{n+1}\leftarrow\boldsymbol{x}^n+\alpha(\boldsymbol{y}^n-\boldsymbol{x}^n)$$

STEP 5：［収束判定］

適当な収束条件により収束判定を行い，収束していなければ $n\leftarrow n+1$ とし，STEP 1 へ。

## 5. 数値計算実験

前章で開発したアルゴリズムの性能を数値計算実験によって確認した。適用計算は South Dakota 州，Sioux Falls 市の道路網を集約化した 76 リンク，24 ノード，529 OD ペアのネットワークで行った。これは，Leblanc et al[11]が需要固定型 Wardrop 均衡配分問題を解く Frank-Wolfe 法の性能検討に用いたもので，モデルの入力データと

**表-1** アルゴリズムの収束パターンの比較

| 繰返回数 | 平均誤差 $\varepsilon 1$ | | 最大誤差 $\varepsilon 2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | MSA | CCM | MSA | CCM |
| 1 | 41.322 | 25.325 | 221.835 | 82.328 |
| 2 | 22.039 | 14.864 | 114.557 | 58.643 |
| 3 | 16.032 | 8.613 | 69.852 | 27.221 |
| 4 | 11.281 | 4.341 | 35.882 | 17.932 |
| 5 | 8.212 | 2.485 | 19.309 | 11.160 |
| 6 | 6.721 | 0.567 | 17.060 | 2.485 |
| 50 | 4.917 | | 9.130 | |
| 100 | 5.361 | | 9.802 | |
| 1,000 | 5.771 | | 10.346 | |

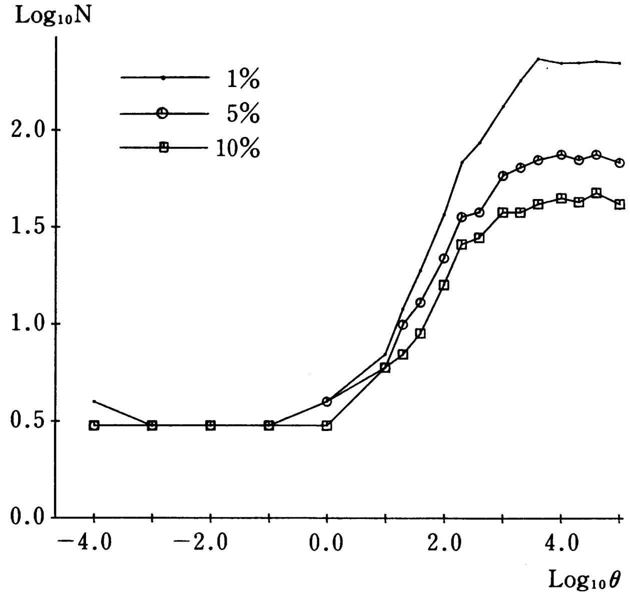


**図-1** パラメータ $\theta$ と収束計算回数との関係

なる OD 交通量及びリンク性能関数パラメータも Leblanc et al と全く同じものを用いた。

表-1 は凸結合法（CCM）と逐次平均法（MSA）の収束状況を比較するために，各繰り返し計算でのリンク交通量 $x$ と均衡リンク交通量 $x^*$ との乖離度の変化を平均誤差（$\varepsilon 1$）と最大誤差（$\varepsilon 2$）で見たものである。ただし，$\varepsilon 1$ と $\varepsilon 2$ の定義は以下のとおり。

$$\varepsilon 1 \equiv \sqrt{\sum_a (x_a^* - x_a)^2 \times \text{リンク数}} \Big/ \sum_a x_a^* \times 100$$

$$\varepsilon 2 \equiv \max_a \left\{ \{|x_a^* - x_a|/x_a^*\} \times 100 \right\}$$

また，SUE モデルのパラメータ $\theta$ の値は，10.0(1/Hr) とした。この値は従来の適用研究[10]から判断して，オーダー的には実際的な値と思われる。

この表から，従来解法の MSA では，繰り返し計算回数を増やしても完全には均衡解に収束しないのに対して，凸結合法では極めて速やかに収束することが分かる。

次に，SUE モデルのパラメータ $\theta$ の値と，凸結合法による収束までの繰り返し計算回数との関係を調べると，図-1 のような結果が得られた。ただし，収束は，最大誤差 $\varepsilon 2$ の値（1％，5％，10％）によって判定した。

この図から分かるように，$\theta$ の値が大きくなるにつれて，収束までの繰り返し計算回数が増えてゆく。このアルゴリズムは，$\theta \to \infty$ の場合には Wardrop 均衡配分問題を Frank-Wolfe 法で解いていることと同じであるから，Wardrop 均衡配分問題を解くのに必要な繰り返し計算回数は，$\varepsilon_2 = 5$％で約 50 回である。一方，実際的な $\theta$ の値（$0 < \theta < 100$）での SUE は数回～十数回で収束するから，Wardrop 均衡配分問題を解く場合に比べて非常に少ない繰り返し計算回数で収束することが分かる。

なお，このアルゴリズムでは，各繰り返し計算で Dial 配分を行うが，これは，従来解法の MSA でも必要な手続きである。このアルゴリズムにおいて MSA と比べて余分に必要な手続きは一次元探索である。しかし，これに必要な計算量は，実際規模のネットワークでは，Dial 配分に必要な計算量に比べればわずかである。一方，収束までに必要な繰り返し計算回数は，表-1 で見たように，MSA よりもはるかに少なくて済むから，全体の計算量は大幅に減らすことができることが分かる。

## 6. おわりに

本研究では，従来，解くことが困難とされてきた確率的均衡配分を効率的に計算する方法について考察した。その結論は以下のようにまとめられる。

（1） LOGIT 型確率配分モデルの持つマルコフ

連鎖的な性質，及び，それから導かれるエントロピーの分解原理等の一般的な性質が明らかになった。

(2)　(1)の結果をもとに，リンク変数のみを用いた確率的利用者均衡配分モデルの等価最適化問題が定式化された。

(3)　(2)の問題を効率的に解くアルゴリズムとして，凸結合法を用いたアルゴリズムが開発された。

(4)　(3)のアルゴリズムは，Wardrop 均衡配分問題を Frank-Wolfe 法によって解く場合よりも少ない繰り返し計算回数で収束することが確認された。

## 参考文献


1) 赤松隆，松本嘉司；"需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法"，土木学会論文集 第401号/IV-10，pp.109-118，1989
2) 赤松隆："確率的均衡概念に基づいた交通ネットワーク統合モデル"，東京大学博士論文，1990
3) Ben-Akiva, M., and Lerman, S. R.,; "Discrete Choice Models", MIT press, 1985
4) Daganzo, C. F. and Sheffi, Y.,: "On Stochastic Models of Traffic Assignment", Trans. Sci. 11(3), pp. 253-274, 1977
5) Dial, R. B.: "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm which Obviates Path Enumeration", Trans. Res. 5(2), pp. 83-111, 1971
6) Fisk, C. S.: "Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment", Trans. Res. 14B(3), pp. 243-255, 1980
7) Frank, M. and Wolf, P.,: "An Algorithm for Quadratic Programming", Naval Research Logistics Quarterly, 3, pp. 95-110, 1956
8) 加藤晃："交通量配分理論の系譜と展望"，土木学会論文集，No.389号/IV-8，pp.15-27，1988
9) 川上喜博；"確率的均衡配分の計算アルゴリズムの比較検討"，東京大学卒業論文，1990
10) 桑原雅夫；"交通量配分手法の実証的検討"，交通工学23(2)，pp.17-25，1988
11) LeBlanc, L. J., Morlok, E. K. and Pierskalla, W. P.; "An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem", Trans. Res. 9(5), pp. 309-318, 1974
12) 宮城俊彦，小川俊幸，小嶋幸則；"均衡確率配分法に関する事例研究"，土木学会第40回年次学術講演会概要集，第4部，pp.503-504，1985
13) Powell, W. B. and Sheffi, Y.; "The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predetermined Step Sizes", Trans. Sci. 16(1), pp. 45-55, 1982
14) Sheffi, Y. and Powell, W. B.,; "A Comparison of Stochastic and Deterministic Traffic Assignment over Congested Networks, Trans. Res. 15B(2), pp. 53-64, 1981
15) Wardrop, J. G.,; "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research", Proc. of the Institution of Civil Engineers, Part II, 1, pp. 325-378, 1952
16) Williams, H. C. W. L.,; "On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit", Environ. Plan. A9, pp. 285-344, 1978


## APPENDIX-1

[定理3の証明]：$E(p)\equiv HL(p)-HN(p)$ は以下のようにノード別の項に分解できる。

$$E(p)=\sum_j E_j\equiv\sum_j\{HL_j-HN_j\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{A-1})$$

ここで，$HL_j\equiv-\sum_i p_{ij}\ln p_{ij}$

$$HN_j\equiv-\left(\sum_i p_{ij}\right)\ln\left(\sum_i p_{ij}\right)$$

したがって，各 $j$ について $E_j$ が $p_{ij}$($j$ は $i$ へ流入するリンクの始点）に関して凹であることを言えばよい。以下では添字 $j$ を省略する。

$E$ の $p$ に関する Hessian の各要素は以下のようになる。

$$\frac{\partial E}{\partial p_i\partial p_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}\left\{-\ln p_i+\ln\sum_m p_m\right\}$$
$$=-\frac{1}{p_k}\delta[i,k]+\frac{1}{\sum_m p_m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{A-2})$$

ここで，$\delta$ はクロネッカーのデルタ関数。

したがって，$E(p)$ の Hessian の任意実数ベクトル $r$ ($r=[\cdots r_i\cdots]$) についての二次形式は，

$$r^t\nabla^2Er=-\sum_i\frac{r_i^2}{p_i}+\frac{\left(\sum_i r_i\right)^2}{\sum_i p_i}$$
$$=-\frac{1}{2\sum_i p_i}\sum_{ij}\frac{1}{p_ip_j}(r_ip_j-r_jp_i)^2$$
$$\leqq 0 \ (\text{等号は } r\propto p \text{ のとき}) \quad \cdots\cdots (\text{A-3})$$

となるから，$E$ は凹関数である。

次に，$E$ が狭義凹関数であることを示す。任意の2つのベクトル $p^0$, $p^1$(ただし，$p^0\neq kp^1$, $k$ は任意の定数）について，$\lambda$ をパラメータとする凸結合：

$$p\equiv\lambda p^0+(1-\lambda)p^1$$

を考え，$\lambda$ を変数とした $E$ の値を表す関数を以下のように定義する。

$$\tilde{E}(\lambda)\equiv E(\lambda p^0+(1-\lambda)p^1)$$

この関数の $\lambda$ に関する二階微分は，

$$\frac{d\tilde{E}}{d\lambda^2}=(p^0-p^1)^t\nabla^2E(p^0-p^1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{A-4})$$

となる。ここで $p^0\neq kp^1$ であるから，式(A-4)は常に負，すなわち，$\tilde{E}$ は $\lambda$ に関して狭義凹である。したがって，任意の2つのベクトルの凸結合に対して $E$ は同一の値をもつことはない。よって $E$ は狭義凹関数

であることが証明された。

（注）ノード $j$ への流入リンク $(i\rightarrow j)$ が1本しかない場合には，$E(\boldsymbol{p})$ は変数 $\boldsymbol{p}_{ij}$ を含まない。そのような場合，定理3では，フローベクトル $p$ の定義から $p_{ij}$ を除いて考えている。

## APPENDIX-2

［定理4の証明］：問題［SA-Arc］の目的関数式(23)の第1項は，［定理3］より，リンク選択率 $\boldsymbol{p}$ に関して狭義凸関数である。また，第2項は $\boldsymbol{p}$ に関して線形であるから，凸関数である。したがって，これらの和である目的関数 $Z$ はリンク選択率 $\boldsymbol{p}$ に関して狭義凸関数である。また，サイクリックなフローを考えない場合には，$\boldsymbol{p}$ の許容領域は有界であり，制約条件により決まる $\boldsymbol{p}$ の許容領域は閉凸な集合となる。よって，この最小化問題は狭義凸計画問題であり，解は大域的に唯一に決まる。

（注）サイクリックなフローを考える場合には，経路数が有限でないため，$\boldsymbol{p}$ の許容領域が有界であるとは必ずしも言えない。例えば，非常に小さなコストをもつループが組み合わさったサイクリックフローが考えられる場合には，リンクフローが無限大に発散することがある。

## APPENDIX-3

［定理5の証明］：［定理4］より，この問題は凸計画問題であるから，最適性の必要十分条件は，Lagrange関数：

$$L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu})=Z(\boldsymbol{p})+\sum_k \mu_k g_k(\boldsymbol{p}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\text{-}5)$$

ここで，$\boldsymbol{\mu}$ は Lagrange 乗数，

を用いて，以下のような Kuhn-Tucker 条件により与えられる。

$$\frac{\partial L}{\partial p_{ij}}\geqq 0, \quad p_{ij}\frac{\partial L}{\partial p_{ij}}=0 \qquad \forall\, ij \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A\text{-}6)$$

式(A-6)は，簡単な式の計算により，以下のように変形でき，

$$\frac{p_{ij}}{\sum_m p_{mj}}=\exp\left[-\theta\{t_{ij}-(\mu_i-\mu_j)\}\right] \qquad \forall\, ij\cdots\cdots (A\text{-}7)$$

この式の両辺を適当な経路について掛け合わせてゆくことにより，次の式を得る。

$$\prod_{ij}\left|\frac{p_{ij}}{\sum_m p_{mj}}\right|^{\delta_{ij,p}}=\exp\left[-\theta\{C_p-(\mu_r-\mu_s)\}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A\text{-}8)$$

一方，式(A-7)で，フローの保存を考えると，

$$\sum_i \exp\left[-\theta\{t_{ij}-(\mu_i-\mu_j)\}\right]=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A\text{-}9)$$

すなわち，

$$\exp\left[\theta\mu_j\right]=\sum_i\{\exp\left[-\theta t_{ij}\right]\exp\left[\theta\mu_i\right]\}\cdots (A\text{-}10)$$

式(A-10)は，ノード $j$ での $\boldsymbol{\mu}$ の値は，ノード $j$ に流入するリンクをもつノード（すなわち，ノード $j$ の「ひとつ手前」のノード）での $\boldsymbol{\mu}$ の値によって決められることを示している。そこで，すべてのノードを着ノード $s$ から発ノード $r$ へ適当な順番（$s, s-1, s-2, \cdots, r+1, r$）に並べ，このノードを順にたどってゆきながら，ノード $s$ での $\boldsymbol{\mu}$ の値の評価を行ってゆくと，

$$\begin{aligned}\exp\left[\theta\mu_s\right]&=\sum_{s-1}\{\exp\left[-\theta t_{s-1,s}\right]\exp\left[\theta\mu_{s-1}\right]\}\\&=\sum_{s-1}\{\exp\left[-\theta t_{s-1,s}\right]\\&\quad\times\sum_{s-2}\exp\left[-\theta t_{s-2,s-1}\right]\exp\left[\theta\mu_{s-2}\right]\}\\&=\cdots\\&=\sum_{s-1}\sum_{s-2}\cdots\sum_{r+1}\exp\left[-\theta(t_{s-1,s}+t_{s-2,s-1}\right.\\&\quad\left.+\cdots+t_{r+1,r}\right]\times\exp\left[\theta\mu_r\right]\\&=\sum_p\exp\left[-\theta C_p\right]\times\exp\left[\theta\mu_r\right]\end{aligned}$$

したがって，

$$\mu_r-\mu_s=-(1/\theta)\ln\sum_p\exp\left[-\theta C_p\right]\cdots\cdots (A\text{-}11)$$

結局，式(A-8)，(A-11)より，問題［SA-Arc］の最適条件はリンク変数により表現された確率配分式(22)となり，問題［SA-Arc］はロジット型確率配分モデルと等価なリンク交通量パターンを与える。

謝辞：本論文をまとめるに当たり，鉄道総合研究所の野末尚次氏には，定理3, 4の証明を始めとして種々の有益な指摘を頂いた。ここに心から謝意を表す次第である。また，本研究は文部省科学研究費補助金（総合研究A）による「確率的均衡原理による交通ネットワーク統合モデルに関する研究」の一部として実施されたものである。

（1990年3月26日受　付
1990年7月16日再受付）