【土木計画学研究・論文集 No.15 1998年9月】

変分不等式アプローチによる多地域一般均衡モデル*

Variational Inequality Approach to Multi-Regional Computable General Equilibrium Modeling

赤松 隆**・半田正樹***・長江 剛志****
by Takashi AKAMATSU, Masaki HANDA, and Takeshi NAGAE

1. はじめに

広域的な経済波及効果を持つ社会基盤整備プロジェクトの（地域・主体別）経済便益評価を行なうためには，経済現象の空間的広がりを考慮したモデルが必要である．従来，空間的な経済システムを扱うモデルとして，空間的価格均衡モデル，地域間産業連関モデル，立地均衡モデル，交通ネットワーク均衡モデル等の研究がなされてきた．しかし，これらは，いずれも部分均衡モデルである．

一方，経済システム全体を統一的に扱った一般均衡理論に整合的で，かつ各種政策の便益評価等に利用可能なCGE(Computable General Equilibrium)モデルを構築するという一連の研究（例えば1),2),3)）がある．しかし，そこでは空間は完全に捨象されている．

最近になって，複数の地域間の相互作用を考慮したCGE モデルがいくつか提案されている（例えば，1),4),5)）．しかし，それらの研究は，a)かなり限定的な状況のみを扱っている，b)モデルの特性に関する数理的解析が不明確，あるいは，c) 均衡解への収束が保証されたアルゴリズムが提案されていない等の多くの課題が残されているようである．

このような従来の研究の問題点に鑑み，本研究は多地域一般均衡モデルの表現・特性解析・解法開発等をsystematicに行なう枠組を示す．より具体的には，変分不等式の理論を用いて，それを実現する．

本論文の構成は以下の通りである．まず，第２節では，本研究で扱う多地域CGEモデルの基本的枠組を示す．第３節で，その定式化を示した後，第４節で，その等価変分不等式の導出及び解の特性の解析法を示す．第５節では，一般的な解析法の応用例として，生産関数等を実用的な形式に特定化すれば，このモデルが凸計画問題に帰着することを示す．

2. モデルの枠組み

本稿では，空間をN個の要素を持つノード集合NとL個の要素を持つ有向リンク集合Lからなるネットワーク$G(N,L)$ によって離散的に表現する．ノードは地域を表し，地域間での財の移動はリンク上のフローとして表される．

本稿のモデルでは，消費者，企業，輸送販売業者，地主の行動が明示的に記述される．全ての主体は市場で決定される価格を与件として行動する．消費者の行動は効用最大化，企業/輸送販売業者/地主の行動は利潤最大化原則により記述される．企業は，M種類の産業のいずれかに属し，N個の地域の何れかに立地する．各産業は１種類の財のみを生産する．消費者は各地域のいずれかに居住し，その居住地域の企業に労働力を提供する．輸送販売業者は，財を生産地で購入し他地域へ輸送した後，消費者に販売する．土地は全て各地域別の地主によって所有され，地主は消費者・企業に土地を賃貸する．各産業r に属する企業の総数H^r，消費者総数G は与件とする．

各地域には，M種の財，労働力および土地の市場が存在し，価格は市場で（各地域・各市場ごとに）１つの価格が決定される．ただし，財市場には，生産地市場と消費地市場があり，各々，生産地価格と消費地価格が決定される．各市場での需要・供給主体の関係は図-1のようにまとめられる．

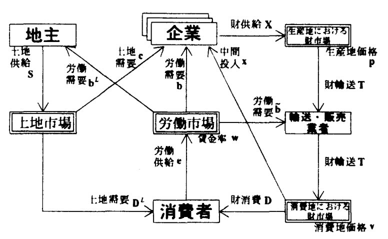

図-1 経済主体間の関係と各種市場

---

* Keywords:多地域一般均衡，変分不等式 空間的価格均衡
** 正会員 工博 豊橋技術科学大学 知識情報工学系
(〒441豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1
E-mail:akamatsu@tutkie.tut.ac.jp)
*** 正会員 工修 H&A (Professional Systems Engineer)
****学生会員 豊橋技術科学大学大学院 知識情報工学専攻

3. 定式化

本章では，各経済主体の行動モデルおよび市場均衡条件を順に定式化する．

(1) 消費者(地域別)

消費者は，価格を与件として，効用を最大化するような労働供給量，財・土地の消費量の決定，および居住地域の選択という２段階の選択行動を行なう．

まず，財の消費・労働供給量の選択については，もし消費者が地域d に居住するなら，以下の問題によって表現される：

$$\phi_d = \max_{\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d} \{u(\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d) | w_d e_d = \sum_r v_d^r D_d^r + \rho_d D_d^L\} \quad (1)$$

ここで $u(\mathbf{D}_d, D_d^L, e_d)$は消費者の効用関数，$e_d$は労働量，$w_d$は賃金率，$D_d^L$は土地需要量，$\rho_d$ は地代，D_d^r は財r の需要量，v_d^r は財r の消費地価格である．この問題の解は価格変数(v,w,r)の関数であり，地域dの（消費者１人当りの）財・土地の需要関数および労働供給関数となる．それらは，Royの恒等式より，以下のように表現される：

$$D_d^r = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial v_d^r} \ \forall d,r, \quad D_d^L = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial \rho_d} \ \forall d$$
$$e_d = \beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial w_d} \quad \forall d \quad (2)$$

ここで$\beta_d = 1 \Big/ \frac{\partial \phi_d}{\partial Y_d}$，$Y_d$ は消費者の所得（$= w_d e_d$）．

また，消費者は，以下の効用最大化行動により居住地d を決定する：

$$\max_d . \{\phi_d(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d) + \tilde{\varepsilon}_d\} \quad (3)$$

ここで，$\tilde{\varepsilon}_d$ は消費者の異質性を考慮するために付加したランダム項である．このランダム項が I.I.D. Gumbel分布に従うとすれば，ランダム効用理論により，居住地d を選択する消費者数は,

$$q_d = G \frac{\exp[\theta \phi_d(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]}{\sum_d \exp[\theta \phi_d(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d)]} \quad (4)$$

で与えられる．ここで，θ は居住地選択の分散パラメータ，G は消費者の総数（所与）である．

(2) 企業(地域・産業別)

産業r に属する企業は，生産関数$L(\mathbf{x}_o^r, b_o^r, c_o^r)$，価格を与件として，利潤を最大化するような生産量・中間要素投入パターン決定および立地地域の選択という2段階の選択行動を行う．

まず，生産量・中間要素投入パターンの選択については，もし企業が地域 o に立地するなら，以下の問題によって表現される：

$$\Pi_o^r = \max_{X_o^r, \mathbf{x}_o^r, b_o^r, c_o^r} \left\{ p_o^r X_o^r - \sum_s v_o^s x_o^{sr} - w_o b_o^r - \rho_o c_o^r \ \middle| \ X_o^r = L(\mathbf{x}_o^r, b_o^r, c_o^r) \right\} \quad (5)$$

ここで，p_o^r は生産地価格，$X_o^r, \mathbf{x}_o^r, b_o^r, c_o^r$ は，各々，地域 o における産業r の生産量，中間投入財の需要量ベクトル，労働需要量，土地需要量である．この問題の解は価格変数（$\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \rho$）の関数であり，地域$d$の（１企業当りの）財の供給関数および労働・土地の需要関数となる．それらは，Hotellingの補題より，以下のように表現される：

$$X_o^r = \frac{\partial \Pi_o^r}{\partial p_o^r} \ \forall o,r, \quad x_o^{sr} = -\frac{\partial \Pi_o^r}{\partial v_o^s} \ \forall o,r,s$$
$$c_o^r = -\frac{\partial \Pi_o^r}{\partial \rho_o} \ \forall o,r, \quad b_o^r = -\frac{\partial \Pi_o^r}{\partial w_o} \ \forall o,r \quad (6)$$

また，産業r に属する企業は，以下の利潤最大化行動により立地点o を決定する：

$$\max_o . \{\Pi_o(p_o^r, \mathbf{v}_o, \rho_o, w_o) + \tilde{\varepsilon}_o^r\} \quad (7)$$

ここで，$\tilde{\varepsilon}_o^r$ は消費者の場合と同様，企業の異質性を考慮するために付加したランダム項である．このランダム項が I.I.D. Gumbel分布に従うとすれば，地域d を選択する産業r の企業数は

$$z_o^r = H^r \frac{\exp[\xi^r \Pi_o^r(p_o^r, \mathbf{v}_o, \rho_o, w_o)]}{\sum_o \exp[\xi^r \Pi_o^r(p_o^r, \mathbf{v}_o, \rho_o, w_o)]} \quad (8)$$

で与えられる．ここで ξ^r は立地選択の分散パラメータ，H^r は産業rに属する企業の総数(所与)である．

(3) 地主(地域別)

各地域の地主は地代ρ_d，賃金率w_dを与件として利潤を最大化するような土地供給量・労働投入量を選択する．これは以下の問題によって表現される：

$$\Pi_d^L = \max_{S_d, b_d^L} \{\rho_d S_d - w_d b_d^L | S_d = L^L(b_d^L)\} \quad (9)$$

ここで，S_d は土地供給量，$L^L(b_d^L)$ は土地生産関数，

b_d^L は労働需要量である．これらはHotellingの補題より，以下のように表現される：

$$S_d = \frac{\partial \Pi_d^L}{\partial \rho_d} \ \forall d, \quad b_d^L = -\frac{\partial \Pi_d^L}{\partial w_d} \ \forall d \tag{10}$$

(4) 輸送販売業者

輸送販売業者は，各地域での生産地・消費地価格を与件として，利潤を最大化するような輸出地を選択する．(1), (2)の議論と同様，業者の異質性を考慮すると，地域oより財rを輸出する輸送販売業者の地域dへの輸出量は以下の式で表わされる：

$$T_{od}^r = z_o^r X_o^r \frac{\exp\left[\sigma_o^r\left(v_d^r - p_o^r - w_o \tilde{b}_{od}^r\right)\right]}{\sum_d \exp\left[\sigma_o^r\left(v_d^r - p_o^r - w_o \tilde{b}_{od}^r\right)\right]} \tag{11}$$

で与えられる．ここで，σ_o^r は輸出地選択の分散パラメータ，$\tilde{b}_{od}^r$ は財１単位を地域oからdへ輸送するのに必要な労働力である．

(5) 市場均衡条件

各種市場での市場清算条件（需給均衡 or 無裁定条件）は，全て相補性条件式で表わされる．例えば，生産地財市場の清算条件は以下の式で表わされる：

$$\begin{cases} z_o^r X_o^r = \sum_d T_{od}^r & \text{if } \ p_o^r \geq 0 \\ z_o^r X_o^r > \sum_d T_{od}^r & \text{if } \ p_o^r = 0 \end{cases} \tag{12'}$$

ここで，p_o^r は財rの生産地oにおける価格である．これは，以下の様な相補性条件として表現できる：

a) 生産地財市場（財rの生産地oにおける価格p_o^r）

$$\begin{cases} p_o^r \cdot \left\{ z_o^r X_o^r - \sum_d T_{od}^r \right\} = 0 \\ z_o^r X_o^r - \sum_d T_{od}^r \geq 0, p_o^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall o,r \tag{12}$$

これと全く同様に，他の市場清算条件も全て以下のような相補性条件式として表現できる：

b) 消費地財市場（財rの消費地dにおける価格v_d^r）

$$\begin{cases} v_d^r \cdot \left\{ \sum_o T_{od}^r - \sum_s z_d^s x_d^{rs} - q_d D_d^r \right\} = 0 \\ \sum_o T_{od}^r - \sum_s z_d^s x_d^{rs} - q_d D_d^r \geq 0, v_d^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall d,r \tag{13}$$

c) 土地市場（地代ρ_d）

$$\begin{cases} \rho_d \cdot \left\{ S_d - \sum_r z_d^r c_d^r - q_d D_d^L \right\} = 0 \\ S_d - \sum_r z_d^r c_d^r - q_d D_d^L \geq 0, \rho_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \tag{14}$$

d) 労働市場（賃金率w_d）

$$\begin{cases} w_d \cdot \left\{ q_d e_d - \sum_r z_d^r b_d^r - b_d^L - \sum_{o,r} \tilde{b}_{do}^r T_{do}^r \right\} = 0 \\ q_d e_d - \sum_r z_d^r b_d^r - b_d^L - \sum_{o,r} \tilde{b}_{do}^r T_{do}^r \geq 0, w_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \tag{15}$$

以上の条件(1)～(15)を同時に満たした状態を，以下では多地域一般均衡([MRCGE])と呼ぶ．

4. 等価な変分不等式問題と解の特性

(1)等価な変分不等式問題

[MRCGE]は，そのままでは，非線型の連立等式・不等式系であり，正確な解析や収束の保証されたアルゴリズムの開発は難しい．そこで，変分不等式問題(VIP: *Variational Inequality Problems*)への変換を考える．まず，式(4)は，形式的に，以下の様な相補性条件として表現しても等価である：

$$\begin{cases} q_d \cdot \left\{ \Omega - \phi_d + \dfrac{\ln q_d}{\theta} \right\} = 0 \\ \Omega - \phi_d + \dfrac{\ln q_d}{\theta} \geq 0, \ \ q_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \tag{4a}$$

$$\begin{cases} \Omega \cdot \left\{ G - \sum_d q_d \right\} = 0 \\ G - \sum_d q_d \geq 0, \ \ \Omega \geq 0 \end{cases} \tag{4b}$$

ここで，Ω は変数であるが，式(4a),(4b)を連立して解析的に解けば，期待最大効用関数と等価であることが容易に確認できる．全く同様に，式(8),(11)も，各々，以下のような相補性条件として表現できる：

$$\begin{cases} z_d^r \cdot \left\{ \Psi^r - \Pi_d^r + \dfrac{\ln z_d^r}{\zeta^r} \right\} = 0 \\ \Psi^r - \Pi_d^r + \dfrac{\ln z_d^r}{\zeta^r} \geq 0, \ \ z_d^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall d,r \tag{8a}$$

$$\begin{cases} \Psi^r \cdot \left\{ H^r - \sum_d z_d^r \right\} = 0 \\ H^r - \sum_d z_d^r \geq 0, \ \ \Psi^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall r \tag{8b}$$

$$\begin{cases} T_{od}^r \cdot \left\{ p_o^r + w_o \tilde{b}_{od}^r - v_d^r + \dfrac{\ln T_{od}^r}{\sigma_o^r} \right\} = 0 \\ p_o^r + w_o \tilde{b}_{od}^r - v_d^r + \dfrac{\ln T_{od}^r}{\sigma_o^r} \geq 0,\ T_{od}^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall o,d,r \quad (11a)$$

and (12)

ここで，Ψ^r は解析的に解けば，企業 r の期待最大利潤関数に対応していることが確認できる．

結局，全ての均衡条件(1)-(15)は相補性条件式として表現される．そして，標準形の相補性問題はVIPの特殊ケースであるので，[MRCGE]はVIPとして表現できることが判る．すなわち，[MRCGE]は以下の様な変分不等式問題と等価である：

[VIP-MRCGE]

$$\textit{Find}\ \mathbf{Y}^* \in \mathbf{K}\ \textit{such that}$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}^*) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \geq 0\ \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{K} \quad (16)$$

where

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{w}, \Omega, \Psi, \mathbf{T}, \mathbf{q}, \mathbf{z}]^T \in \mathbf{K} = R_+^{N^2M+3NM+3N+M+1}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{X}(\mathbf{P}_f) - \mathbf{E}_1\mathbf{T} \\ \mathbf{E}_2\mathbf{T} - \mathbf{Z}_1\mathbf{x}(\mathbf{P}_f) - \mathbf{Q}_1\mathbf{D}(\mathbf{P}_u) \\ \mathbf{S}(\mathbf{P}_o) - \mathbf{E}_3\mathbf{Z}\mathbf{c}(\mathbf{P}_f) - \mathbf{Q}_2\mathbf{D}^L(\mathbf{P}_u) \\ \mathbf{Q}_2\mathbf{e}(\mathbf{P}_u) - \mathbf{E}_3\mathbf{Z}\mathbf{b}(\mathbf{P}_f) - \mathbf{b}^L(\mathbf{P}_o) - \mathbf{B}\mathbf{T} \\ G - \mathbf{E}_4^T\mathbf{q} \\ \mathbf{H} - \mathbf{E}_5^T\mathbf{z} \\ \mathbf{E}_1^T\mathbf{p} - \mathbf{E}_2^T\mathbf{v} + \mathbf{B}^T\mathbf{w} + \Lambda(\mathbf{T}) \\ \mathbf{E}_4\Omega - \Phi(\mathbf{P}_u) + \Theta(\mathbf{q}) \\ \mathbf{E}_5\Psi - \Pi(\mathbf{P}_f) + \Xi(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \begin{matrix} (17a) \\ (17b) \\ (17c) \\ (17d) \\ (17e) \\ (17f) \\ (17g) \\ (17h) \\ (17i) \end{matrix}$$

$\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in R^{NM}$:各々 p_d^r, v_d^r, z_d^r に対応した列ベクトル

$\boldsymbol{\rho}, \mathbf{w}, \mathbf{q} \in R^N$:各々 ρ_d, w_d, q_d に対応した列ベクトル

$\Psi \in R^M$: Ψ^r に対応した列ベクトル

$\mathbf{T} \in R^{N^2M}$: T_{od}^r に対応した列ベクトル

この写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の各行は以下に示すように，[MRCGE]の各均衡条件に対応している：

式(17a)は生産地財市場均衡条件(12)に対応し，

$\mathbf{P}_f = (\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{w}),\ \mathbf{Z} = diag[z_d^r],\ \mathbf{X}(\mathbf{P}_f) = [\cdots, X_d^r(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{E}_1$ は $NM \times N^2M$ 行列で，その $(or, od'r')$ 要素は $d = d'$ の場合のみ1(他は0)である．

式(17c)は土地市場均衡条件(14)に対応し，

$\mathbf{P}_o = (\rho, \mathbf{w}),\ \mathbf{S}(\mathbf{P}_o) = [\cdots, S_d(\cdot), \cdots]^T,\ \mathbf{c}(\mathbf{P}_f) = [\cdots, c_d^r(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{D}^L(\mathbf{P}_u) = [\cdots, D_d^L(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{Q}_2 = diag[q_d]$ （$N \times N$ 対角行列）

$\mathbf{E}_3$ は $N \times NM$ 行列で，その $(d, d'r)$ 要素は $d = d'$ の場合のみ1(他は0)である．

式(17b)は消費地財市場均衡条件(13)に対応し，

$\mathbf{P}_u = (\mathbf{v}, \rho, \mathbf{w}),\ \mathbf{x}(\mathbf{P}_f) = [\cdots, x_d^{sr}(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{D}(\mathbf{P}_u) = [\cdots, D_d^r(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{Z}_1$ は $NM \times NM^2$ 行列で，その $(dr, d'r's)$ 要素は $d = d'$ かつ $r = r'$ の場合のみ z_d^r (他は0)， $\mathbf{E}_2$ は $NM \times N^2M$ 行列で，その $(or, o'dr')$ 要素は $o = o'$ の場合のみ1(他は0), $\mathbf{Q}_1$ は $N \times NM$ 行列で， $\mathbf{Q}_1 = [\cdots, \mathbf{Q}_2, \cdots]$ である．

式(17d)は労働市場均衡条件(15)に対応し，

$\mathbf{e}(\mathbf{P}_u) = [\cdots, e_d(\cdot), \cdots]^T,\ \mathbf{b}(\mathbf{P}_f) = [\cdots, b_d^r(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{b}^L(\mathbf{P}_o) = [\cdots, b_d^L(\cdot), \cdots]^T$,

$\mathbf{B}$ は $N \times N^2M$ 行列で，その $(d, od'r)$ 要素は $d = d'$ の場合のみ $\tilde{b}_{od}^r$ (他は0)である．

式(17e)は消費者保存則(4b)に対応し， $\mathbf{E}_4$ は全ての要素が1の $N \times 1$ 列ベクトルである．

式(17f)は企業数保存則(8b)に対応し，

$\mathbf{H} = [\cdots, H^r, \cdots]^T$ (定数ベクトル),

$\mathbf{E}_5$ は $NM \times M$ 行列で，その (dr, r') 要素は $r = r'$ の場合のみ1(他は0)である．

式(17g)は輸送・販売業者の輸出地選択行動(11a)に対応し， $\Lambda(\mathbf{T}) = \left[\cdots, \dfrac{\ln T_{od}^r}{\sigma_o^r}, \cdots\right]^T$ である．

式(17h)は消費者の立地選択行動(4a)に対応し，

$\Phi(\mathbf{P}_u) = [\cdots, \phi_d(\cdot), \cdots]^T,\ \Theta(\mathbf{q}) = \left[\cdots, \dfrac{\ln q_d}{\theta}, \cdots\right]^T$ である．

式(17i)は企業の立地選択行動(8a)に対応し，

$\Pi(\mathbf{P}_f) = [\cdots, \Pi_d^r(\cdot), \cdots]^T,\ \Xi(\mathbf{z}) = \left[\cdots, \dfrac{\ln z_d^r}{\xi^r}, \cdots\right]^T$ である．

(2)解の存在と一意性

標準的な VIPの理論を適用すれば，[VIP-MRCGE]の解の存在および一意性を解析することができる．

まず，解の存在は，式(17)の写像 $\mathbf{F}(\cdot)$ が強単調(strongly montone)：

$$(\mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{F}(\mathbf{Y})) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) > \alpha |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2\ \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$$

であれば保証される．ただし，本稿では，紙面の制約により，より詳細な条件の導出は割愛する．

解の一意性については，式(17)の写像$\mathbf{F}(\cdot)$が狭義単調 (strictly monotone)，すなわち，

$$(\mathbf{F}(\mathbf{X})-\mathbf{F}(\mathbf{Y}))\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{Y})>0 \quad \forall \mathbf{X},\mathbf{Y}\in K, \mathbf{X},\mathbf{Y}\neq \mathbf{0}$$

であれば保証される．この条件を，式(17)の写像に適用すれば，本稿のモデルの均衡解は，以下の条件下で，一意に決まることがわかる（条件導出の詳細については**付録**を参照）：*供給量の自己価格効果が交差価格効果の総和以上であり，需要量の自己価格効果が交差価格効果の総和以下*であるならば，均衡生産地価格$\mathbf{p}$，均衡消費地価格$\mathbf{v}$，均衡地代ρ，均衡賃金率$\mathbf{w}$，均衡効用Ω，均衡利潤Ψは一意に決まる．ただし，輸送量$\mathbf{T}$，居住パターン$\mathbf{q}$，立地パターン$\mathbf{z}$の一意性は必ずしも保証されない（これらの一意性を保証するためには，さらに付加的な条件が必要である．その詳細については**付録1**を参照）．

(3) 解の安定性

一般に，凸集合KからKへの写像$\mathbf{F}$によって定義されたVIP(K,$\mathbf{F}$)は，ベクトル$-\mathbf{F}(\mathbf{Y})$を$\mathbf{Y}$における「力」とみなせば，K上にベクトル場$-\mathbf{F}$を考えたときの場の安定点を求める問題と解釈できる（**図-2**を参照）．従って，ある状態$\mathbf{Y}$はその点に働く力$-\mathbf{F}(\mathbf{Y})$の方向へ変化すると考えるのは自然である．

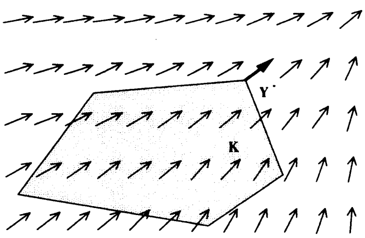

図-2 変分不等式問題とベクトル場

しかし，ある状態$\mathbf{Y}$からそのような調整過程 (adjustment process)によって写された状態$\mathbf{Y}-\alpha\mathbf{F}(\mathbf{Y})$が許容領域$K$上にあるとは限らない（古典的な経済学でよく知られた一般均衡モデルの価格調整Tatonament processは，許容領域が限定されていない特殊な場合のみを想定している．しかし，我々の扱っている空間的CGEモデルでは，その定式化と変換によっては，調整過程の間においても物理的に常に満たされていると考えるのが自然な方程式群がKに含まれるという事態がしばしば生じる）．そこで，必ずK内でのみ状態変化をするような調整過程を考えてみよう．

そのような要請を満たした過程は，無数にありうるが，ここでは，最も単純で自然（パラメータ等を含まない）と考えられる“正射影 (normal projection)”の概念に基づいたプロセスを示す．まず，K上への射影演算$\mathrm{Proj}_{K,Q}(\cdot)$を以下のように定義しよう：

$$\mathrm{Proj}_{\Omega,Q}\mathbf{x}=\arg.\min_{\mathbf{z}}.\{(\mathbf{z}-\mathbf{x})\cdot Q(\mathbf{z}-\mathbf{x}) \;\; s.t. \;\; \mathbf{z}\in\Omega\} \tag{18}$$

ただしQは適当な正定値行列．つまり，点$\mathbf{x}$から（ユークリッド距離で測って）最も近いK上の点$\mathbf{z}$が$\mathrm{Proj}_{\Omega,Q}\mathbf{z}$である（幾何学的には，点$\mathbf{x}$から$K$へ“垂線”を下ろすことに相当する）．

次に，かりに，状態$\mathbf{Y}$がその点に働く力$-\mathbf{F}(\mathbf{Y})$の方向に移動できたとした場合の点$\mathbf{Y}-\alpha\mathbf{F}(\mathbf{Y})$を$K$上へ射影した点を以下のように定義する：

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y})\equiv\mathrm{Proj}_{K,Q}\left(\mathbf{Y}-Q^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Y})\right) \tag{19}$$

K上にその動きを拘束された点$\mathbf{Y}$が「力」$-\mathbf{F}(\mathbf{Y})$を受けている場合，この$\mathbf{H}(\mathbf{Y})$の方向へ状態が変化すると考えるのは極めて自然である（**図-3**を参照）．

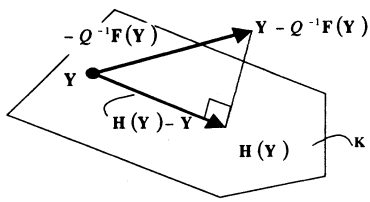

図-3 状態変化プロセス

そこで，以下の調整過程を考えてみよう：

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{H}(\mathbf{Y}(t))-\mathbf{Y}(t) \tag{20}$$

すると，この調整過程は，$\mathbf{F}$*が単調なら*（大域的に）Lyapunov安定であることが保証される．これは，次の関数：

$$\begin{aligned}G_Q(\mathbf{Y})&=\max_{Z\in\Omega}.\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\cdot Q(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\\&=\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{H}(\mathbf{Y}))-\frac{1}{2}(\mathbf{H}(\mathbf{Y})-\mathbf{Y})\cdot Q(\mathbf{H}(\mathbf{Y})-\mathbf{Y})\end{aligned} \tag{21}$$

が，$\mathbf{F}$の単調性条件下では，Lyapunov関数となることから証明できる（証明の詳細は**付録2**を参照）．

なお，上記の調整過程は，一般的に均衡解へ向かうことは保証されているものの，必ずしも経済主体の“自然な”行動結果としての経済状態変化を表して

いると解釈できるとは限らない（もちろん，モデルによっては，直接的に経済的な解釈が可能なものもありうる）．しかし，各経済主体の“自然な”経済活動を記述したより実証的な調整過程の構築，あるいはその安定性を判定する際にも，何らかの“ベンチマーク”が必要である．特に，任意の動的システムに対してLyapunov 関数を構築する（i.e. 安定性を保証する）理論的な方法は現在まで知られていないことに注意しよう．新たな／より実際的な調整過程の安定性を判定・考察する際には，既に安定性条件が明らかになっている調整過程とその Lyapunov関数が導かれていることは極めて有用である．

また，この関数は，従来，一般的な VIPの計算アルゴリズムの研究において Fukushima(1992) が提案した “merit関数”と同一形式である．このことからも明らかなように，この調整プロセスと Lyapunov関数は [VIP-MRCGE]に対する大域収束的な数値計算法の開発に応用することも可能である．

5. より具体的なモデルの解析例

第4節までで示したモデルは，生産関数・効用関数等を適宜特定化すれば，大規模問題でも計算可能でより実際的取扱いの容易な問題に変換できる．本節では，そのような（一般モデルの特殊化の）具体例として，以下の仮定をおいた場合（以下 [MRCGE-L]と呼ぶ）を考える：

- 企業，地主の生産関数は Leontief型
- 消費者の効用関数は準線形
- 輸送・販売業者の行動は確定論的
- 消費者，企業の立地選択は内生化しない

なお，立地選択を明示的に導入した場合，さらに何らかの強い仮定をおかなければ，以下で示すような等価最適化問題を構成することはできない（この点についての解説は**付録３**を参照）．

(1) 定式化

式(1)の消費者の効用関数は，以下のような準線形の式で表わされるとする：

$$u(\mathbf{D}_d, e_d) = \sum_r u^r\left(D_d^r\right) + u^L\left(D_d^L\right) + u^W\left(e_d\right) \qquad (1')$$

ここで，$u^r(\cdot), u^L(\cdot), u^W(\cdot)$は，各々，財$r$の消費，土地消費，労働供給による効用関数である．このとき，家計の需要/供給関数は以下のように表わされる：

$$D_d^r = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial v_d} = D_d^r\left(v_d^r\right), D_d^L = -\beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial \rho_d} = D_d^L\left(\rho_d\right)$$

$$e_d = \beta_d \frac{\partial \phi_d}{\partial w_d} = e_d\left(w_d\right) \quad \forall r \qquad (2')$$

$$\text{where } \beta_d = 1\Big/\frac{\partial \phi_d}{\partial Y_d}, \; Y_d = w_d e_d$$

式(4), (7)の各企業および地主の生産関数は以下のような Leontief型の式で表わされるとする：

$$L_o^r\left(\mathbf{x}_o^r, b_o^r, c_o^r\right) = \min\left[\frac{x_o^{1r}}{\gamma_{o,r}^1}, \cdots, \frac{x_o^{Mr}}{\gamma_{o,r}^M}, \frac{b_o^r}{\gamma_{o,r}^W}, \frac{c_o^r}{\gamma_{o,r}^L}\right], \qquad (5')$$

$$L_d^L\left(b_d^L\right) = \frac{b_d^L}{\alpha_d^L}, \qquad (9')$$

where $\gamma_s^{o,r}, \gamma_W^{o,r}, \gamma_L^{o,r}, \alpha_o^L$ ：パラメータ

よって，企業および地主の需要/供給関数はそれぞれ以下のように表わされる：

$$x_o^{sr} = \gamma_{o,r}^s X_o^r \;\; \forall s, \; b_o^r = \gamma_{o,r}^W X_o^r, \; c_o^r = \gamma_{o,r}^L X_o^r \qquad (6'a)$$

$$b_d^L = \alpha_d^L S_d \qquad (10'a)$$

ここで，各企業の生産量は以下の相補性条件式：

$$\begin{cases} X_o^r \cdot \left(\sum_s \gamma_{o,r}^s v_o^s + \gamma_{o,r}^W w_o + \gamma_{o,r}^L \rho_o - p_o^r\right) = 0 \\ \sum_s \gamma_{o,r}^s v_o^s + \gamma_{o,r}^W w_o + \gamma_{o,r}^L \rho_o - p_o^r \geq 0, \; X_o^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall o, r \qquad (6'b)$$

および，生産地の財市場均衡条件(12)により決定される．また，土地の供給量は以下の相補性条件式：

$$\begin{cases} S_d \cdot \left(\alpha_d^L w_d - \rho_d\right) = 0 \\ \alpha_d^L w_d - \rho_d \geq 0, \; S_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \qquad (10'b)$$

および土地の市場均衡条件(14)により決定される．

消費者および企業の立地選択行動を考えないため，$q_d(\forall d), z_d^r(\forall d, r)$は所与の定数とする．

輸送・販売業者の行動は確定的であるため，以下の相補性条件式で表わされる：

$$\begin{cases} T_{od}^r \cdot \left(p_o^r + w_o \tilde{b}_{od}^r - v_d^r\right) = 0 \\ p_o^r + w_o \tilde{b}_{od}^r - v_d^r \geq 0, \; T_{od}^r \geq 0 \end{cases} \quad \forall o, d, r \qquad (11')$$

式(1’),(2’),(5’),(6’),(9’),(10’),(11’),(12)～(15)を満たす状態が[MRCGE-L]である．これは，4.1節の考え方を用いれば，以下のようなVIPとも等価である：

[VIP-MRCGE-L]

Find $\mathbf{Y}^* \in \mathbf{K}_L$ *such that*

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}^*) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \geq 0 \;\; \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{K}_L \qquad (22)$$

ここで，$\mathbf{Y}=[\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w},\mathbf{T},\mathbf{S},\mathbf{X}]^T$，$\mathbf{K}_L=R_+^{N^2M+3NM+3N}$，

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y})=\begin{bmatrix} \mathbf{ZX}-\mathbf{E}_1\mathbf{T} \\ \mathbf{E}_2\mathbf{T}-\mathbf{A}_1^T\mathbf{X}-\mathbf{Q}_1\mathbf{D}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{S}-\mathbf{E}_3\mathbf{ZA}_1^L\mathbf{X}-\mathbf{Q}_2\mathbf{D}^L(\boldsymbol{\rho}) \\ -\mathbf{BT}-\mathbf{E}_3\mathbf{ZA}_1^W\mathbf{X}-\mathbf{A}_2^T\mathbf{S}+\mathbf{Q}_2\mathbf{e}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{E}_1^T\mathbf{p}-\mathbf{E}_2^T\mathbf{v}+\mathbf{B}^T\mathbf{w} \\ -\boldsymbol{\rho}+\mathbf{A}_2\mathbf{w} \\ -\mathbf{p}+\mathbf{A}_1\mathbf{v}+\mathbf{A}_1^W\mathbf{w}+\mathbf{A}_1^L\boldsymbol{\rho} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}_1^W=diag\left[\gamma_{o,r}^W\right],\mathbf{A}_1^L=diag\left[\gamma_{o,r}^L\right]$($NM\times NM$ 対角行列),
$\mathbf{A}_2=diag\left[\alpha_d^L\right]$($N\times N$ 対角行列),
$\mathbf{A}_1$は$NM\times NM^2$行列で，その$(or,o'r's)$要素は$o=o'$かつ $r=r'$の場合のみ$\gamma_{o,r}^s$(他は0)である．

式(22) の様な標準形のVIP は，一般に，写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ が積分可能であれば，以下の形式の最適化問題：

$$\min_{\mathbf{Y}}.\oint\mathbf{F}(\mathbf{Y})d\mathbf{Y}\ \ subject\ to\ \ \mathbf{Y}\in\mathbf{K}_L$$

と等価であることが知られている．この事実を利用して均衡モデルを系統的に最適化問題に帰着させる（あるいは，その様な変換の可否を調べる）には，問題構造に適した変数／許容領域の変換を行うと便利なことが多い．より具体的には，[VIP-MRCGE-L]は，以下に示される様に Price変数，あるいはQuantity変数のみを未知変数としたVIPに変換でき，それにより等価な凸計画問題 (CP) を導出できる．そして，その CPは，モデルの性質の解析や均衡解の効率的計算法を開発する際に極めて有効である．

なお，上記のような等価最適化問題の利点に着目し，均衡モデルとCPとの関係を議論した研究は，従来から数多く存在する（例えば，(8)〜(11)）．ここで示す方法は，VIP の枠組を用いることによって，それらをより一般化したものと位置づけられる．

(2) Price変数表示の等価最適化問題

[MRCGE-L]は未知変数をPrice変数に限定した以下のVIPと等価である．

[VIP-MRCGE-L-Dual]

Find $(\mathbf{p}^*,\mathbf{v}^*,\boldsymbol{\rho}^*,\mathbf{w}^*)\in\mathbf{K}_{LD}$ *such that*

$$\begin{aligned}&-\mathbf{Q}_1\mathbf{D}(\mathbf{v}^*)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}^*)-\mathbf{Q}_2\mathbf{D}^L(\boldsymbol{\rho}^*)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}^*)\\ &\quad+\mathbf{Q}_2\mathbf{e}(\mathbf{w}^*)\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{w}^*)\geq 0\quad\forall(\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w})\in\mathbf{K}_{LD}\end{aligned}\tag{23}$$

$$\mathbf{K}_{LD}=\left\{(\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w})\left|\begin{array}{l}\mathbf{E}_1^T\mathbf{p}-\mathbf{E}_2^T\mathbf{v}+\mathbf{B}^T\mathbf{w}\geq 0,\\ \mathbf{A}_2\mathbf{w}-\boldsymbol{\rho}\geq 0,\\ \mathbf{A}_1\mathbf{v}+\mathbf{A}_1^L\boldsymbol{\rho}+\mathbf{A}_1^W\mathbf{w}-\mathbf{p}\geq 0,\\ \mathbf{p}\geq 0,\mathbf{v}\geq 0,\boldsymbol{\rho}\geq 0,\mathbf{w}\geq 0\end{array}\right.\right\}\tag{24}$$

ここで，写像$\mathbf{D}(\mathbf{v}),\mathbf{D}^L(\boldsymbol{\rho}),\mathbf{e}(\mathbf{w})$の各要素は，Royの恒等式により，間接効用関数と式(2')の関係にある．いま，簡単のため，*所得の限界効用β_dが（これは，一般には価格の関数であるが）定数であると仮定できる*なら，式(23)左辺の写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ に相当する項は，地域毎に分解して積分可能である．よって，[VIP-MRCGE-L-Dual]は以下の凸計画問題に帰着する：

[CP-MRCGE-L-Dual]

$$\min_{\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w}}.Z_D(\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w})=\sum_d\beta_d q_d\phi_d(\mathbf{v}_d,\rho_d,w_d)\tag{25}$$

$$subject\ to\quad p_o^r+\tilde{b}_{od}^r-v_d^r\geq 0\qquad\forall o,d,r\tag{26}$$

$$\sum_s\gamma_{d,r}^s v_d^r+\gamma_{d,r}^W w_d+\gamma_{d,r}^L\rho_d-p_d^r\geq 0\ \forall d,r\tag{27}$$

$$\alpha_d^L w_d-\rho_d\geq 0\quad\forall d\tag{28}$$

$$\mathbf{p}\geq 0,\mathbf{v}\geq 0,\boldsymbol{\rho}\geq 0,\mathbf{w}\geq 0\tag{29}$$

ここで，制約条件式(26), (27), (28)は，各々，輸送業者の輸出地選択条件，企業の利潤ゼロ条件，地主の利潤ゼロ条件を意味している．目的関数は効用の総和を利潤換算したものと解釈される．

(3) Quantity変数表示の等価最適化問題

[MRCGE-L]の需要/供給関数$D_d^r(p_d^r),D_d^L(\rho_d),e_d(w_d)$には逆関数$D_{d,r}^{-1}(D_d^r),D_{d,L}^{-1}(D_d^L),e_d^{-1}(e_d)$が存在する．これを用いると，[MRCGE-L]は未知変数をQuantity変数に限定した以下のVIPにも変換できる：

[VIP-MRCGE-L-Primal]

Find $(\mathbf{X}^*,\mathbf{D}^*,\mathbf{D}^{L^*},\mathbf{e}^*,\mathbf{S},\mathbf{T})\in\mathbf{K}_{LP}$ *such that*

$$\begin{aligned}&-\mathbf{Q}_1\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}^*)\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}^*)-\mathbf{Q}_2\mathbf{D}_L^{-1}(\mathbf{D}^{L^*})\cdot(\mathbf{D}^L-\mathbf{D}^{L^*})\\ &\quad+\mathbf{Q}_2\mathbf{e}^{-1}(\mathbf{e}^*)\cdot(\mathbf{e}-\mathbf{e}^*)\geq 0\quad\forall(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{D}^L,\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T})\in\mathbf{K}_{LP}\end{aligned}\tag{30}$$

$$\mathbf{K}_{SP}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{D}^L,\\ \mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T}\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\mathbf{ZX}=\mathbf{E}_1\mathbf{T},\\ \mathbf{E}_2\mathbf{T}=\mathbf{A}_1^T\mathbf{X}+\mathbf{Q}_1\mathbf{D},\\ \mathbf{S}=\mathbf{E}_3\mathbf{ZA}_1^L\mathbf{X}+\mathbf{Q}_2\mathbf{D}^L,\\ \mathbf{Q}_2\mathbf{e}=\mathbf{E}_3\mathbf{ZA}_1^W\mathbf{X}+\mathbf{A}_2^T\mathbf{S}+\mathbf{BT},\\ \mathbf{X}\geq 0,\mathbf{D}\geq 0,\mathbf{D}^L\geq 0,\mathbf{e}\geq 0,\mathbf{S}\geq 0,\mathbf{T}\geq 0\end{array}\right.\right\}\tag{31}$$

5 (2) と同様，式(30)中の写像 $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}),\mathbf{D}_L^{-1}(\mathbf{D}^L),\mathbf{e}^{-1}(\mathbf{e})$ は地域ごとに分離した上で積分可能である．従って，上記 VIPは以下の凸計画問題に帰着する：

[CP-MRCGE-L-Primal]

$$\max_{\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{D}^L,\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T}} Z_P\left(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{D}^L,\mathbf{e},\mathbf{S},\mathbf{T}\right)=\sum_{d,r} q_d \int_0^{D_d^r} D_{d,r}^{-1}(\omega)d\omega + \sum_d q_d \int_0^{D_d^L} D_{d,L}^{-1}(\omega)d\omega - \sum_d q_d \int_0^{e_d} e_d^{-1}(\omega)d\omega \tag{32}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_d T_{od}^r = z_o^r X_o^r \qquad \forall o,r \tag{33}$$

$$\sum_o T_{od}^r = \sum_s z_d^r \gamma_{d,r}^s X_d^r + q_d D_d^r \quad \forall d,r \tag{34}$$

$$S_d = \sum_r z_d^r \gamma_{d,r}^L X_d^r + q_d D_d^L \quad \forall d \tag{35}$$

$$q_d e_d = \sum_r z_d^r \gamma_{d,r}^W X_d^r + \alpha_d^L S_d + \sum_r \sum_o \tilde{b}_{do}^r T_{do}^r \quad \forall d \tag{36}$$

$$\mathbf{X} \geq 0, \mathbf{D} \geq 0, \mathbf{D}^L \geq 0, \mathbf{e} \geq 0, \mathbf{S} \geq 0, \mathbf{T} \geq 0 \tag{37}$$

制約条件式(33),(34),(35),(36)は，各々，生産地における財の需給均衡，消費地における財の需給均衡，土地の需給均衡，労働の需給均衡条件を意味している．また，最適状態での目的関数は，社会的余剰を意味することとなる．

(4) アルゴリズム

[MRCGE-L]は上記の結果を用いると，さまざまな効率的アルゴリズムを容易に構成することができる．大枠としては，1) 一般的な凸計画問題に対して既に確立されている効率的アルゴリズムを活用，2)安定性に関する考察で議論した均衡解への調整過程を離散時間化して利用；という2つの方向がありうる．

本稿では，紙面に制約があるため，比較的単純でimplementation の簡単な方法として，[CP-MECGE-Primal] に Frank-Wolfe法を適用する例のみを示す．そのアウトラインは以下の通りである：

Step.0: 繰返し回数$n := 0$，初期許容解$\mathbf{Y}^{(0)}$を求める．

Step.1: 元の問題を線形近似した補助問題を解き，その解$\hat{\mathbf{Y}}$を用いて解の改訂vector $\mathbf{d}^{(n)} = \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}^{(n)}$を求める．

Step.2: 以下の1次元最適化問題を解き，step size αを求める：
$\min Z_O\left(\mathbf{Y}^{(n)} + \alpha\,\mathbf{d}^{(n)}\right) \quad \text{s.t.}\ 0 \leq \alpha \leq 1$
ここで $Z_o(\cdot)$：式(32)で表わされる目的関数．

Step.3: 以下の式により解を改訂する：
$\mathbf{Y}^{(n+1)} := \mathbf{Y}^{(n)} + \alpha\,\mathbf{d}^{(n)}$

Step.4: 収束判定条件を満たしていれば終了．そうでなければ$n := n+1$としてStep.1へ．

ここで$\mathbf{Y}^{(k)} = \left[\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{D}^{(k)}, \mathbf{D}^{L^{(k)}}, \mathbf{T}^{(k)}\right]^T$は$k$回目の繰返しにおける解である．

Step.1の補助問題は，[CP-MRCGE-Primal]の目的関数を線形近似して得られる線形計画問題である．ただし，[CP-MRCGE-Primal]は，制約条件(35)と(36)の関係を用いると変数 $\mathbf{S}, \mathbf{e}$ を消去でき，明示的な未知変数を$\mathbf{X}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^L, \mathbf{T}$のみに限定できる．従って，具体的な補助問題は以下のようになる：

[CP-MRCGE-Primal-sub]

$$\min_{\hat{\mathbf{Y}}} \hat{Z}_P\left(\hat{\mathbf{Y}}\right) = -\sum_r \sum_d c_{r,d}^X \hat{X}_d^r + \sum_r \sum_d c_{d,r}^D \hat{D}_d^r - \sum_r \sum_{od} c_{od,r}^T \hat{T}_{od}^r + \sum_d c_d^L \hat{D}_d^L \tag{38}$$

subject to

$$\sum_d \hat{T}_{od}^r = z_o^r \hat{X}_o^r \tag{39}$$

$$\sum_o \hat{T}_{od}^r = \sum_s z_d^r \gamma_{d,r}^s \hat{X}_d^r + q_d \hat{D}_d^r \tag{40}$$

$$\hat{\mathbf{X}} \geq 0, \hat{\mathbf{D}} \geq 0, \hat{\mathbf{D}}^L \geq 0, \hat{\mathbf{T}} \geq 0 \tag{41}$$

ここで，$\hat{\mathbf{Y}} = \left[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{D}}^L, \hat{\mathbf{T}}\right]^T$，

$$c_{r,d}^X = z_d^r\left(\gamma_{d,r}^W + \alpha_d^L \gamma_{d,r}^L\right) e_d^{-1}\left(e_d^{(n)}\right), \quad c_{r,d}^D = q_d D_{d,r}^{-1}\left(D_{d,r}^{(n)}\right)$$

$$c_d^L = q_d \left\{D_{d,L}^{-1}\left(D_{d,r}^{L(n)}\right) - \alpha_d^L e_d^{-1}\left(e_d^{(n)}\right)\right\}, \quad c_d^L = \tilde{b}_{od}^r e_d^{-1}\left(e_d^{(n)}\right)$$

$$e_d^{(n)} = \frac{1}{q_d}\left\{\sum_r z_d^r \gamma_{d,r}^W X_d^{r(n)} + \alpha_d^L\left(\sum_r z_d^r \gamma_{d,r}^L X_d^{r(n)} + q_d D_d^{L(n)}\right) + \sum_r \sum_o \tilde{b}_{do}^r T_{do}^{r\,(n)}\right\}$$

この問題は制約条件も比較的少ない単純な線形計画化問題であるため，相当大規模な問題でも極めて速やかに解くことができる．従って，[MRCGE-L] は，大規模な問題でも，このFrank-Wolfe法によって，均衡解を効率的に求められることがわかる．

6. おわりに

本研究では，空間的部分均衡モデルと空間を捨象した一般均衡モデルを統合した空間的多地域一般均衡モデルのプロトタイプを示した．そして，変分不等式アプローチにより，それをシステマテックに扱うことのできる枠組みを示し，解の解析を行った．

さらに，一般的な解析法の応用例として，生産関数等を実用的な形式に特定化すれば，このモデルが凸計画問題に帰着することを示した．また，凸計画問題に対する解法を利用すれば，モデルに対する効率的な求解アルゴリズムを構築できることを示した．

以下の課題は，本稿ではとりあげなかったが，本研究あるいは多地域CGEモデル全般に関連する重要課題である：

1) [MRCGE] あるいは [MECGE-L] の実用性を検証するための実証的分析

2) 射影を用いた調整過程や，その修正過程によるより具体的・詳細な安定性解析

3) 立地に集積効果がある，あるいは企業の生産関数に収穫逓増特性がある等の状況での複数均衡に関する特性解析

これらの課題については，本研究の成果を活用することによって，今後，さらに研究を進めて行きたい．

参考文献

1) Shoven, J.B. and J.Whalley, "Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey" *Journal of Economic Literature* **22**, pp.1007-1051, 1984.

2) Shoven, J.B., and J.Whalley, *応用一般均衡分析*, 東洋経済新報社, 1993.

3) 宮田譲 他, "地域経済の一般均衡モデル" 土木計画学研究・講演集 **13**, pp.45-52, 1990.

4) 奥田隆明, "確率論に基づく多地域一般均衡モデル" 地域学研究 **24**(1), pp.117-131, 1994.

5) 宮城俊彦, 本部賢一, "応用一般均衡分析を基礎にした地域間交易モデルに関する研究" 土木学会論文集530/IV-30, pp.31-40, 1996.

6) Fukushima, M., "Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems" *Mathematical Programming* **53**, pp.99-110, 1992.

7) 半田正樹, *変分不等式アプローチによる多地域一般均衡モデル*, 豊橋技科大・修士論文 (指導教官:赤松隆), 1997.

8) Variant, H.A., *ミクロ経済分析*, 第7章, 勁草書房, 1986.

9) Anas, A., "Taste Heterogeneity and Urban Spatial Structure: The Logit Model and Monocentric Theory Reconciled", Journal of Urban Economics **28**, pp.318-335, 1990.

10) 上田孝行, "拡張された立地余剰を用いた一般均衡モデル", 土木計画学研究・論文集 **10**, pp.183-190, 1992.

11) Smith,T. and Bernstein,D., "Programmable Network Equilibria" in *Structure and Change in the Space Economy*, (eds.) Laksmann,T.and Nijkamp,P., pp.91-130, Springer, 1993.

付録1. 解の一意性の証明

解の一意性は，写像 $\mathbf{F}$ の単調性（あるいは，そのJacobanの正定値性）を調べることで確認できる．ここでは，より強い条件：

$$[\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})]_i \geq \sum_{j \neq i}[\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})]_j \qquad \forall i \qquad \text{(A-1)}$$

を用い，さらに利潤関数/間接効用関数毎に条件式を分解する．式(2)および(5)を用いれば，分解した条件式は以下のような需要関数/供給関数の条件となる：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_d^L}{\partial(\rho_d)^2} \geq \dfrac{\partial^2 \Pi_d^L}{\partial \rho_d \partial w_d} \forall d \\ \dfrac{\partial^2 \Pi_d^L}{\partial(w_d)^2} \geq \dfrac{\partial^2 \Pi_d^L}{\partial w_d \partial \rho_d} \forall d \end{cases} \qquad \text{(A-2)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial(v_d^r)^2} \geq \sum_s \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial v_d^r \partial v_d^s} + \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial v_d^r \partial \rho_d} + \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial v_d^r \partial w_d} \forall d, r \\ \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial(\rho_d)^2} \geq \sum_r \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial \rho_d \partial v_d^r} + \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial \rho_d \partial w_d} \forall d \\ \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial(w_d)^2} \geq \sum_r \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial w_d \partial v_d^r} + \dfrac{\partial^2 \phi_d}{\partial w_d \partial \rho_d} \forall d \end{cases} \qquad \text{(A-3)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_d^r}{\partial p_d^r} \geq \sum_s \dfrac{\partial X_d^r}{\partial v_d^s} + \dfrac{\partial X_d^r}{\partial \rho_d} + \dfrac{\partial X_d^r}{\partial w_d} \forall d, r \\ \dfrac{\partial x_d^{rt}}{\partial v_d^r} \leq \dfrac{\partial x_d^{rt}}{\partial p_d^r} + \sum_s \dfrac{\partial x_d^{rt}}{\partial v_d^s} + \dfrac{\partial x_d^{rt}}{\partial \rho_d} + \dfrac{\partial x_d^{rt}}{\partial w_d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall d, r \neq t \\ \dfrac{\partial c_d^r}{\partial \rho_d} \leq \dfrac{\partial c_d^r}{\partial p_d^r} + \sum_s \dfrac{\partial c_d^r}{\partial v_d^s} + \dfrac{\partial c_d^r}{\partial w_d} \forall d, r \\ \dfrac{\partial b_d^r}{\partial w_d} \leq \dfrac{\partial b_d^r}{\partial p_d^r} + \sum_s \dfrac{\partial b_d^r}{\partial v_d^s} + \dfrac{\partial b_d^r}{\partial \rho_d} \forall d, r \end{cases} \qquad \text{(A-4)}$$

よって，(A-1)～(A-4)が満たされるなら，条件式(A-1)は満たされ（逆は成立しない），$\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ のJacobianは半正定値行列である．

付録2. 安定性の証明

$V(\cdot)$ が Lyapnov関数となるのは，以下の3つの条件が満たされる場合である：

(i) $V(\mathbf{Y}) \geq 0 \; \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{K}$

(ii) $\mathbf{Y}$ が均衡解である($\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$)$\Leftrightarrow V(\mathbf{Y}) = 0$

(iii) $\mathbf{Y}$ が均衡解でない($\dot{\mathbf{Y}} \neq \mathbf{0}$)$\Rightarrow \nabla V(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y}) < 0$

まず，式(21)であらわされる関数は，許容解に関して非負であり，また式(16)を満たした $\mathbf{Y}^* \in \mathbf{K}$ に対してのみ $G_Q(\mathbf{Y}^*) = 0$ である．よって，$G_Q(\cdot)$ は条件(i)，(ii)を満たす．さらに，写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の Jacobianが正定値ならば，条件(iii)も満たす．これは，以下のようにして証明できる．

まず，$G_Q(\mathbf{Y})$ の勾配は

$$\nabla G_Q(\mathbf{Y}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \{\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - Q\} \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}) \qquad \text{(B-1)}$$

となり，したがって

$$\nabla G_Q(\mathbf{Y})\cdot \mathbf{F}\ (\mathbf{Y}) = \{\mathbf{F}(\mathbf{Y}) + Q(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y})\}\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}) - \{\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y})\}\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}) \tag{B-2}$$

である．この式の右辺第１項の符号は常に非正，すなわち

$$\{\mathbf{F}(\mathbf{Y}) + Q(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y})\}\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}) \le 0 \tag{B-3}$$

である．なぜなら，射影演算 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{K},Q}\mathbf{Y}$ には，任意の $\mathbf{Y}\in\mathbf{K}$ に対して

$$(\mathbf{Y} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{K},Q}\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{Z} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{K},Q}\mathbf{Y}) \le 0\ \forall\mathbf{Z}\in\mathbf{K} \tag{B-4}$$

となり，これと $\mathbf{H}(\mathbf{Y})$ の定義により

$$(\mathbf{Y} - Q^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}))\cdot Q(\mathbf{Z} - \mathbf{H}(\mathbf{Y})) \le 0\ \forall\mathbf{Z}\in\mathbf{K} \tag{B-5}$$

となるからである． $\mathbf{F}\ (\mathbf{Y})$ の定義と式(B-2),(B-3)を組み合わせれば，

$$\nabla G_Q(\mathbf{Y})\cdot \mathbf{F}\ (\mathbf{Y}) \le -\{\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y})\}\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}) = -\{\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})\mathbf{F}\ (\mathbf{Y})\}\cdot \mathbf{F}\ (\mathbf{Y}) \tag{B-6}$$

となり，写像 $\mathbf{F}$ のJacobianが正定値ならLyapunov関数の条件(iii)も成立する．

付録3．立地選択行動を入れた場合の解析

多地域一般均衡モデルにおいて立地選択を導入する場合，何らかの追加的な条件・仮定を付加しない限り，等価な凸計画問題を構成することはできない．これは，立地選択を導入した一般均衡モデルでは，そのVIPの写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ のJacobian が対称行列となること（i.e. 積分可能性）が保証できないためである．

本節ではまず，[MRCGE-L]に確率的な立地選択行動を導入したモデルを示し，それに対してある条件の下では，解の一意性が保証されることを示す．さらに，その条件の下では（立地選択行動の入ったモデルに対しても）等価な最適化問題を構築できることを示す．

[MRCGE-L]に，[MRCGE]と同様，利用者および企業のランダム効用理論に基づいた確率的な立地選択行動（式(4)および(8)）を導入したモデル（以下，[MRCGE-L++]と呼ぶ）を考えよう．このモデルは，４章 (1) および，５章 (1)の結果を用いれば，以下の変分不等式問題 [VIP-MRCGE-L++]に帰着することが容易にわかる：

Find $\mathbf{Y}^*\in\mathbf{K} = \mathbf{R}_+^{N^2M+4NM+4N+M+1}$ *such that*

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}^*)\cdot(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*) \ge 0\ \forall\mathbf{Y}\in\mathbf{K} \tag{C-1}$$

ここで

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix},\ \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_1(\mathbf{Y})\\ \mathbf{F}_2(\mathbf{Y})\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{q},\mathbf{z},\Omega,\Psi]^T,\ \mathbf{Y}_2 = [\mathbf{p},\mathbf{v},\rho,\mathbf{w},\mathbf{T},\mathbf{S},\mathbf{X}]^T$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix}\mathbf{E}_4\Omega - \Phi(\mathbf{P}_u) + \Theta(\mathbf{q})\\ \mathbf{E}_5\Psi - \Pi(\mathbf{P}_f) + \Lambda(\mathbf{z})\\ G - \mathbf{E}_4^T\mathbf{q}\\ \mathbf{H} - \mathbf{E}_5^T\mathbf{z}\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_2(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{X} - \mathbf{E}_1\mathbf{T}\\ \mathbf{E}_2\mathbf{T} - \mathbf{A}_1^T\mathbf{X} - \mathbf{Q}_1\mathbf{D}(\mathbf{v})\\ \mathbf{S} - \mathbf{E}_3\mathbf{Z}\mathbf{A}_1^L\mathbf{X} - \mathbf{Q}_2\mathbf{D}^L(\rho)\\ -\mathbf{B}\mathbf{T} - \mathbf{E}_3\mathbf{Z}\mathbf{A}_1^W\mathbf{X} - \mathbf{A}_2^T\mathbf{S}\\ \mathbf{E}_1^T\mathbf{p} - \mathbf{E}_2^T\mathbf{v} + \mathbf{B}^T\mathbf{w}\\ -\rho + \mathbf{A}_2\mathbf{w}\\ -\mathbf{p} + \mathbf{A}_1\mathbf{v} + \mathbf{A}_1^W\mathbf{w} + \mathbf{A}_1^L\rho\end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}_1$ および $\mathbf{F}_1(\mathbf{Y})$ は，それぞれ立地選択に関する未知変数，および対応する写像である． $\mathbf{Y}_2$ および $\mathbf{F}_2(\mathbf{Y})$ は立地選択に関連しない未知変数，および対応する写像である．

(1) 解の一意性

[VIP-MRCGE-L++]の解の一意性は，式(C-1)の写像 $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ が狭義単調であれば保証される．また， $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の Jacobian $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ が正定値行列であれば，$\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の狭義単調性が保証される．そこで，以下では $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の正定値性を確認する．

式 (C-1)の $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ に対する $\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ は以下のような形式で書ける：

$$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22}\end{bmatrix}\ \text{where}\ \mathbf{U}_{ij} = [\nabla_{\mathbf{Y}_j}\mathbf{F}_i] \tag{C-2}$$

ここで，$\mathbf{U}_{11},\mathbf{U}_{22}$ はともに bisymmetric（正方行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ がbisymmetricであるとは，$\mathbf{A}$の要素に以下の関係が成り立つことを言う：$a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i \ne j$）で，かつ，対角要素が非負の行列である．具体的には，$\mathbf{U}_{11}$ には対角要素が存在せず，$\mathbf{U}_{22}$ の対角要素は以下の条件の下では正となる：

$$\frac{\partial D_d^r(v_d^r)}{\partial v_d^r} < 0 \qquad \forall d,r \tag{C-3}$$

$$\frac{\partial D_d^L(\rho_d)}{\partial \rho_d} < 0,\ \frac{\partial e_d(w_d)}{\partial w_d} > 0 \qquad \forall d \tag{C-4}$$

従って，以下の自然な条件：

労働の供給関数は賃金率に対して狭義単調増加であり，財および土地の需要関数は対応する価格に対して狭義単調減少である

のもとで，$\nabla\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22}\end{bmatrix}$ は任意の $\mathbf{Y}\in\mathbf{K}$（ただし $\mathbf{Y}\ne\mathbf{0}$）に対して，$\mathbf{Y}^T\nabla\mathbf{F}_1\mathbf{Y} > 0$ となる．しかし，一般に，$\mathbf{U}_{12},\mathbf{U}_{21}$ は，非ゼロ・負定値行列であるから，一般には，$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ の正定値性は保証されない．

いま，所得の限界効用が地域によらず一定でかつ価格等の関数ではない，すなわち，

$$\bar\beta = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_N \tag{C-5}$$

という条件を仮定してみよう．この条件の下では，式(4)は以下のような表現と等価である：

$$\begin{cases} q_d \cdot \left\{ \bar{\beta}\Omega - \bar{\beta}\phi_d(\cdot) + \bar{\beta}\dfrac{1}{\theta}\ln q_d \right\} = 0 \\ \bar{\beta}\Omega - \bar{\beta}\phi_d(\cdot) + \bar{\beta}\dfrac{1}{\theta}\ln q_d \geq 0,\ q_d \geq 0 \end{cases} \quad \forall d \quad (4'a)$$

$$\begin{cases} \Omega \cdot \left\{ \bar{\beta}G - \bar{\beta}\sum_d q_d \right\} = 0 \\ \bar{\beta}G - \bar{\beta}\sum_d q_d \geq 0,\ \Omega \geq 0 \end{cases} \quad (4'b)$$

この表現に対応して$\mathbf{U}_{12}$と$\mathbf{U}_{21}$を計算すると,両者は互いに bisymmetricとなることが確かめられる．従って，

$$\mathbf{Y}^T \nabla \mathbf{F} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \nabla \mathbf{F}_1 \mathbf{Y} > 0 \quad \forall\, \mathbf{Y} \in \mathbf{K} \quad (\text{ただし } \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}).$$

よって，条件(C-5)の下では式(C-1)の写像$\mathbf{F}(\mathbf{Y})$は狭義単調であり，解が一意に決まることが保証される．

(2) 等価な最適化問題

[MRCGE-L++]は，(C-3)の条件がなければ，$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$が対称ではないため，写像$\mathbf{F}(\mathbf{Y})$を積分することができず，等価最適化問題に変換できない．しかし，条件(C-3) の下では，$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y})$が bisymmetric となるため，変数を価格変数のみに限定した VIP を構成でき，さらに，その VIP の写像の Jacobian は対称となる（紙面の制約により，具体的な式の展開は省略）．従って，その価格変数のみに限定した VIP の写像を積分することによって，以下の様な等価最適化問題を構成できる：

$$\min_{\mathbf{p},\mathbf{v},\boldsymbol{\rho},\mathbf{w}} = \bar{\beta}\, G \frac{1}{\theta} \ln \sum_d \exp\left[\theta\, \phi_d\left(\mathbf{v}_d, \rho_d, w_d\right)\right]$$
$$+ \sum_r H^r \frac{1}{\zeta^r} \ln \sum_o \exp\left[\zeta^r \Pi_o^r\left(p_o^r, \mathbf{v}_o, \rho_o, w_o\right)\right] \quad (\text{C-6})$$

$$\textit{subject to} \quad p_o^r - v_d^r + \tilde{b}_{od}^r \geq 0,\ \forall o,d,r \quad (\text{C-7})$$

$$\alpha_d^L w_d - \rho_d \geq 0,\ \forall d \quad (\text{C-8})$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{\rho} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (\text{C-9})$$

この問題の目的関数の第1項は消費者の効用の総和を利潤換算したものであり，第2項は企業の利潤の総和である．このように，立地選択行動を明示的に導入した問題に対しても，「所得の限界効用が地域によらず等しい（かつ価格によらず一定)」という条件 (C-3)の下では，等価な最適化問題が構築できる．

変分不等式アプローチによる多地域一般均衡モデル

赤松 隆，半田 正樹，長江 剛志

本研究は，変分不等式問題 (VIP: *Variational Inequality Problems*)の理論に基づき，多地域 CGE (*Computable General Equilibrium*) モデルをシステマティックに表現，解析でき，さらに，効率的でかつ収束の保証されたアルゴリズムを開発可能な枠組みを示すものである．これにより，従来の CGEモデル研究において問題となっていた a) 解の特性の厳密な解析，b) 収束の保証された解法の構築，c) 各種モデル間の整合性･比較の困難等が解消される．本稿ではまず，プロトタイプとなる多地域CGEモデルを定式化する．次に，それを VIPに変換する一般的方法を示す．そして，VIP 理論に基づいた解の解析法（解の存在，一意性，安定性）を示す．最後に，応用例として一般モデルにおける生産関数等を特定化すれば，凸計画問題に帰着し，様々なメリットが得られることが示される．

Variational Inequality Approach for Multi-Regional Computable General Equilibrium Modeling

By Takashi AKAMATSU, Masaki HANDA, and Takeshi NAGAE

This paper proposes a general framework for analyzing multi-regional CGE models. The framework is based on the theory of Variational Inequality Problems, which gives us the systematic methods for two indispensable works in developing the CGE models: analyzing the properties of the models such as existence, uniqueness and stability of equilibria; developing the efficient and convergent algorithms for solving equilibria of the large scale models. In this paper, we first show the framework using a prototype multi-regional CGE model, and then consider a particular model that reduces to a convex programming, which demonstrates a typical example of the merit obtained by employing this framework.