不完備市場リスク要因を考慮したリアル・オプション評価

長江 剛志 [1]・赤松 隆 [2]

[1] 正会員　博士 (情報科学)　京都大学防災研究所 総合防災研究部門 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

[2] 正会員　工博　東北大学助教授　大学院情報科学研究科 (〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

本研究では，不完備市場下のリアル・オプション問題に対する新たなオプション評価手法を提案する．本手法は，権利行使時刻を選択可能なアメリカン・オプションを対象とし，リスク回避的な取引主体によって当該オプションが売買されるための “合理的な取引価格” を導出する．この価格は，a) 市場で取引される証券・資産でヘッジ可能なリスク要因の価格と，b) そうでないリスク要因の価格によって決定される．この内，a) は証券・資産価格情報に含まれるリスク評価と無裁定原理から推定され，b) は取引主体のリスク選好と効用最大化原理に基づいて評価される．本稿では，まず，資産市場価格情報と無裁定条件からリスク価格推定と最適権利行使時刻の選択を同時に行うモデルを提案する．次に，このモデルに対する理論的解析から，問題が時間分解可能であることを明らかにする．最後に，この性質を用いて現実的な問題に対してもオプション価格を計算可能な数値解法を開発する．

Key Words : *Real Options, Incomplete Markets, Asset Pricing Theory, Timing Choice*

1　はじめに

(1)　背景と目的

近年，不確実なキャッシュ・フローを発生させる不動産や事業の経済的価値の評価に対して，リアル・オプション理論を用いた研究が盛んに行われている．このアプローチでは，対象とする不動産や事業を市場取引が行われていない資産 (オプション) と見なし，その価値評価に従来の金融オプション理論をそのまま適用する．この評価方法は，完備市場，すなわち，当該オプションの取引がもたらすリスクが証券あるいは資産運用によって完全にヘッジできる (i.e. 市場で取引される証券・資産を組み合わせることで，キャッシュ・フローを完全に replicate できる) 場合には適切である．しかし，リアル・オプションを対象とする場合，この完備市場の仮定は不自然であることが多い．例えば，不動産から得られる地代収入は，市場で取引される証券・資産価格とある程度の相関を持つが，それだけで完全に説明できるわけではない．このような不動産の評価に従来手法を適用することは，資産取引によってヘッジできないリスク (およびその価値) を完全に無視するという，非常に大胆な (“危険な”) 仮定をおいていることに等しい．

これに対し，赤松・長江 [1)] は，市場の “不完備性” を明示的に考慮した上で，リアル・オプションの売買が現実に行われるための “合理的な取引価格” を計量化する枠組みを提案した．より具体的には，まず，当該オプション (i.e. 不動産，事業) が，① 確率的に変動する “状態変数” の関数として定義されたキャッシュ・フローを発生させ，② その状態変数の変動リスクが，市場で取引される証券・資産でヘッジ可能な “リスク要因” と，ヘッジ不可能な要因から構成されると考える．そして，オプション評価問題を，市場で観測される証券・資産価格情報に基づいて上述のリスク要因の “市場価格” を推計する逆問題ととらえ，その解法を示した．

上述の研究は，本章 (2) で述べるような多くの利点を有するが，対象とするオプションが，権利行使時刻を与件としたものに限られるという問題点がある．一般に，リアル・オプション分析において重要となるのは，オプションの所有者が権利を “行使するかしないか” だけでなく，“いつ行使するか” も選択できる点である [*1]．例えば，土地 (あるいは不動産開発権) の所有者は，契約として認められていればいつでも開発を開始できるのが一般的である．従って，このような土地の価格評価を行うには，市場の不完備性とタイミング選択の 2 つを明示的に考慮した手法が必要である．

そこで，本研究では，赤松・長江 [1)] の提案した枠組みの下で，分析対象を，権利行使時刻も選択可能なオプションへと拡張する．その具体的な内容と，本稿の構成は以下の通りである．まず，本章 (2) で，提案手法の基本的な考え方と関連研究を詳しく説明する．次に，第 2 章で基本的な枠組みと従来の金融オプション理論を概説し，第 3 章で，先行研究 [1)] の提案手法を異なる側面から概説する．続く第 4 章において，分析対象を権利行使時刻の選択を導入したモデルへと拡張し，モデル特性の分析および数値解法の開発を行う．最後に，第 5 章では，この提案手法の判りやすい適用例を示し，開発した数値解法の妥当性を検証する．

[*1] 金融オプションの分野においては，権利行使時刻を選択できるオプションは，“アメリカン・オプション” と呼ばれ，権利行使時刻を所与とした “ヨーロピアン・オプション” とは明示的に区別されている．本稿ではこれに習い，先行研究 [1)] の扱ったオプションをヨーロピアン・オプション，本研究で扱うタイミング選択可能なオプションを，アメリカン・オプションと呼ぶ．

(2) 従来研究と本研究の位置付け

完備市場を仮定した金融オプションの評価問題については，Black and Scholes[4), Merton[18) をはじめとする膨大な研究蓄積がある．そして，その結果として，資産取引における無裁定原理を基礎とした評価理論体系 (例えば Duffie[8)) がほぼ確立している．この理論を，不動産や事業の評価にそのまま適用したものがリアル・オプション理論である．このアプローチを採用した研究も非常に多く存在 (例えば，Dixit and Pindyck[7), Trigeorgis[21), Amram and Kulatilaka[2)) する．しかし，一般に，これらのリアル・オプション (e.g. 不動産，事業) から発生するキャッシュ・フローの確率的変動は，証券や資産の動的売買で完全には replicate できない．すなわち，リアル・オプションの取引は，その買手・売手の双方に市場取引ではヘッジできない不完備市場リスクをもたらす．さらに，この不完備市場リスクは，オプションの取引主体 (i.e. 買手，売手) の間で非対称的である．このため，オプションの買手と売手のそれぞれが当該オプションに付ける価格を，明示的に区別する必要があることが指摘されている [1)．特に，アメリカン・オプションを対象とする場合，取引主体間の行動の非対称性— 権利行使時刻を選択できるのはオプションの所有者 (i.e. 買手) のみであり，売手は，その買手の行動を与件としてしか自らの行動を決定できない— を明示的に導入することが必要不可欠である．従って，不完備市場リスクを明示的に考慮できず，取引主体間の行動および価格を明示的に区別できないリアル・オプション評価手法は，多くの場合，不適切である．

従来，オプションを含む資産評価問題に関しては，非常に多くの研究が存在し，それらは大きく分けて 2 つのアプローチ— 絶対価格評価と相対価格評価—に分類される．それぞれの研究の詳細は，赤松・長江 [1) 第 1 章 (2) で解説されているため，ここでは全体を概観するに留めよう．

絶対価格評価アプローチ (あるいは均衡アプローチ) は，Arrow-Debreu の一般均衡概念に基づいて任意の証券・資産価格を決定する方法である．このアプローチを採用した研究の多くは，完備市場における完全競争を仮定した (あるいは，ほぼ同義であるが代表的消費者による記述を用いた) モデルを用いる．しかし，このモデルの実証的妥当性に関しては，“Equity Premium Puzzle”[17) や “Risk-free Rate Puzzle”[22) に代表されるような，多くの否定的な結果が指摘されている．そして，その原因の一つとして，現実の市場が不完備であることが挙げられている．なぜなら，不完備市場においては，(比較的扱いが容易な) 完全競争状況でさえも，代表的消費者を用いたモデルでは表現できないことが理論的に明らかにされているためである．従って，代表的消費者モデルを用いるこのアプローチは，我々が対象とする不完備市場下でのオプション評価には適さない．

一方，相対価格評価アプローチは，市場で観測される証券・資産価格情報を与件とし，それに対するオプションの相対的な価格を求める方法である．このアプローチを採用した研究は，さらに，以下の 3 つに分類できる：1) 金融オプション理論の基礎となる無裁定原理に基づくアプローチ；2) 効用最大化原理に基づくアプローチ；3) 確率的割引ファクタ (SDF: Stochastic Discount Factor) を用いたアプローチ．しかし， 1) は，不完備市場下におけるオプション価格が不定となるため，現実の問題に対する定量的な分析を目的とするには不適切である．2) は，オプション価格の定義および効用関数の特定化が恣意的に行える，不完備市場下での無裁定条件を明示的に考慮することが困難である，などの問題点が指摘されている．3) は，1) 2) を統合したアプローチであり，Hansen and Jagannathan[10, 11) によって，資産価格モデルの実証的研究の枠組みとして導入された．不完備市場を前提として，このアプローチを採用した研究には，Cochrane and Saá-Requejo[6), Stutzer[19, 20) がある．前者は，無裁定条件に加えて，SDF の分散に上限を設けたオプション評価問題を提案している．しかし，この研究では，効用最大化アプローチとの対応関係が明示されていないという問題がある．後者は，SDF の Kullback-Leibler (KL) 情報量に着目し，無裁定条件下で KL 情報量を最大化する SDF の推定法を提案している．しかし，この研究は静的枠組にとどまっている上に，オプションの取引主体 (i.e. 買手/売手) の行動を明示的に扱えないという難点がある．

これら 2 つの研究の難点を解消する手法として，赤松・長江 [1) は，不完備市場でのオプション評価手法を提案した．この研究では，連続時間-連続状態の枠組で，無裁定条件と KL 情報量に関する制約を考慮した SDF 推定問題を定式化した．そして，その問題が，効用最大化アプローチに基づく動的リスク・ヘッジ問題と対応づけできることを明らかにした．さらに，これらの各取引主体の行動結果としてオプション価格が決定されるメカニズムを明らかにした．しかし，この研究で扱ったオプションは，権利行使時刻が与件とされたものに限られている．従って，多くのリアル・オプションが持つ “タイミング選択の価値” を評価できない．

なお，費用便益分析の分野における準オプション (Quasi-option；例えば，Henry[13), Arrow and Fisher[3)) は，対象から発生する便益をキャッシュ・フローと読み換えれば，アメリカン・オプションと見なす事ができる．しかし，準オプション理論を用いた研究の殆どは，2 期間モデルを用いた概念的な分析を指向しており，リスク計量化の枠組みを提示するものではない．従って，これらの研究は，動学リスクの計量化を目的とする我々の研究とは目的が異なる．特に，動学リスクの計量化を行うには連続時間-連続状態の枠組みが必要不可欠であるが，このような枠組みを扱った準オプ

ション理論の研究は皆無である．

上記の背景に鑑み，本研究では，市場の不完備性を明示的に考慮した上で，タイミング選択が可能なリアル・オプションの価格計量化のための枠組みを提案する．具体的には，赤松・長江 [1] の枠組みに基づき，タイミング選択行動を組み込んだモデルを定式化する．こうして定式化された問題に対して数理的解析を行い，モデルの数理的特性およびメカニズムを明らかにする．次に，現実的なリアル・オプション評価問題に対しても具体的かつ効率的な数値計算が行える解法を開発する．これらの点はいずれも本研究のオリジナルな貢献である．

2　基本的枠組みと無裁定原理

本章では，まず，本研究が対象とするモデルの基本的枠組みを示す．そして，その枠組み下で，無裁定原理のみに基づいた従来の金融オプション評価手法を概説する．

(1)　モデルの枠組み

対象期間 $[0,T]$，および時点 T における事象集合 Ω を考える．Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega)|\omega \in \Omega\}$ とし，Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t)|t \in [0,T]\}$ を定義する．これらの 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ で定義される確率空間上で，K 次元 $\mathcal{P}$-Wiener 過程 $\boldsymbol{Z}(t) \equiv [Z_1(t) \cdots Z_{\mathrm{K}}(t)]'$ を仮定し，その増分 $\mathrm{d}Z_k(t)$ が互いに独立であるとする．以下では，この $\boldsymbol{Z}$ を "リスク要因" と呼ぶ．また，確率測度 $\mathcal{P}$ の下での期待演算であることを明示するために，$\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot]$ なる記号を用いる．さらに，条件付期待値を $\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}[\cdot] \equiv \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot|\mathcal{F}(t)]$ と定義する．

確定的な利子率 $r(t)$ で成長する 1 種類の安全資産と，N 種類の危険資産が取引される資産取引市場を考える．時刻 t での安全資産価格，および n 番目の危険資産の価格を $B(t), \hat{S}_n(t)$ で表し，それぞれ，以下の確率微分方程式に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}B(t)/B(t) = r(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\hat{S}_n(t)/\hat{S}_n(t) = \hat{\alpha}_n(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_n(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t), \tag{2}$$

$$= \hat{\alpha}_n(t)\,\mathrm{d}t + \textstyle\sum_k \sigma_{n,k}(t)\,\mathrm{d}Z_k(t). \tag{3}$$

以降では，表記の簡便化，および概念の理解を容易にするため，安全資産をニューメレール資産とし，任意の資産価格 ($\hat{X}(t)$ と表記) を安全資産の価格で基準化した "割引価格"($X(t) \equiv \hat{X}(t)/B(t)$ と表記) を適宜用いる．また，割引済み危険資産価格を $\boldsymbol{S}(t) \equiv [S_1(t) \cdots S_{\mathrm{N}}(t)]'$ とベクトル表記し，以下の確率過程で表す：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)/\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t) \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{X}(t). \tag{4}$$

ここで，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)}{\boldsymbol{S}(t)} \equiv \left[\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)} \cdots \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{N}}(t)}{S_{\mathrm{N}}(t)}\right]'$ とし，$\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)$ を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(t) - r(t) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{\mathrm{N}}(t) - r(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \dots & \sigma_{1,\mathrm{K}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\mathrm{N},1}(t) & \dots & \sigma_{\mathrm{N},\mathrm{K}}(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

以下では，市場で取引されている安全資産，危険資産を総じて "市場資産" と呼ぶ．これに対し，確率動学的に変動するキャッシュ・フローを発生する不動産や事業など，市場で取引されていない資産と見なせるものを "非市場資産 (あるいはオプション)" と呼ぶ．

本稿で議論するオプションのキャッシュ・フローは，その満期 (事業の場合，契約の終了時点) $t = T$ に発生する終端ペイ・オフ $F(T) \equiv F(T, \boldsymbol{Z}(T))$ のみとする．これは，単に理論展開を簡潔に示すための便宜であり，本手法の本質的な仮定 (あるいは限界) を意味するものではない．例えば，期間 $[0,T]$ 中に毎時刻 (連続的に) キャッシュ・フロー ("配当") が発生する場合は，本モデルの分析に僅かな修正を加えるだけで容易に対応できる．また，期間 $[0,T]$ 中の適当な離散的時点に確率的キャッシュ・フローが発生する場合については，(終端ペイ・オフのみを持つ) 満期の異なった複数のオプションのポートフォリオとみなせば良い．

(2)　無裁定原理のみに基づいたオプション評価問題 [9]

上述の枠組みにおいて，裁定機会が存在しないとは，"N 個の市場資産をどのように組み合わせても，元手 0 で正の期待利潤を得ることができない" ことと定義する．従来，市場においてこの無裁定条件が成立することと，$\mathcal{P}$ に対する等価 martingale 測度 (EMM: Equivalent Martingale Measure) $\mathcal{Q}$ が存在することが等価であることが知られている [12]．ここで，EMM とは，任意の資産価格を martingale にするような，$\mathcal{P}$ と等価な確率測度である．すなわち，前節で定義した市場資産価格について，以下の無裁定条件が成立する：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \boldsymbol{S}(t), \forall (t,s) \in \{t, s \in [0,T]; t < s\}. \tag{7}$$

従来の金融オプション理論は，非市場資産 (オプション) が市場で取引された場合に，上述の市場資産と，当該オプションとの売買に裁定が存在しないための価格 (以下，無裁定価格) を求めるものである．このとき，当該オプションの無裁定価格 $\mathcal{C}(t)$ は，$\mathcal{Q}$ の下での終端ペイ・オフ $F(T)$ の期待現在価値 $\mathcal{C}(t) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[F(T)]$ で表される．すなわち，オプション評価問題は，無裁定条件式 (7) から，EMM $\mathcal{Q}$ を推定する逆問題の一つと見なせる．

本研究が対象とする不完備市場とは，Arrow-Debreu の不確実性下での一般均衡理論の枠組みにおいて，起こり得る全ての状態に対する条件付請求権 (contingent claim) が市場で取引されていない状況を指す．これは，本研究の枠組み

においては，各状態でのみ発生するキャッシュ・フローを市場資産の取引で replicate できないことを意味する．すなわち，市場が不完備であるとは，独立な市場資産の数 rank($\boldsymbol{\sigma}$) が，キャッシュ・フローの変動をもたらすリスク要因の数 K よりも少ない場合として表現される．

この不完備市場においては，市場で取引されている資産価格情報と，無裁定条件を与えるのみでは EMM $\mathcal{Q}$，ひいてはオプション価格が不定となる．すなわち，オプションの取引を行う投資家は，無裁定条件 (10) を満たす中で任意のオプション価格を主張できる．このような状況下では，オプション価格の最小/最大値 (i.e. bid/ask 価格) を議論することに十分な意義がある．無裁定条件下でオプション価格の上下限を求める問題は，以下の EMM 推定問題として定式化される (例えば，Luenberger[16])：

$$\text{[PB-NA]} \quad C_{\mathrm{B}}(0) \equiv \min_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T)\right], \ \text{s.t. (7)}.$$

$$\text{[PS-NA]} \quad C_{\mathrm{S}}(0) \equiv \max_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T)\right], \ \text{s.t. (7)}.$$

3　ヨーロピアン・オプション

無裁定原理のみに基づいたオプション評価問題 [PB-NA], [PS-NA] は，不完備市場においては，その解 (i.e. オプション価格) が発散し得ることが知られている．これは，問題 [PB-NA], [PS-NA] が線形逆問題であり，その最適性条件が特異となるためである．この発散問題を回避するため，赤松・長江 [1] は，無裁定条件に加えて，確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ の KL (Kullback-Leibler) 情報量に下限を設けた手法を提案した．本章では，この提案手法を概説する．より具体的には，(1) 節でオプション評価問題を定式化する．こうして定式化された問題の最適性条件を，(2) 節で導出する．続く (3) 節では，この最適性条件とオプション価格との関係を明らかにし，先行研究 [1] で用いたものとは異なる数値解法を示す．最後に (4) 節では，こうして得られるオプション価格が持つ意味を議論する．これらの内，いくつかの内容は，赤松・長江 [1] で既得の知見である．しかし，先行研究 [1] とは異なる視点からの分析を行っており，次章以降で展開される提案手法の説明および理解に必要不可欠であるため，ここに再掲する．

(1)　定式化

本節では，オプション評価問題の定式化を行う．そして，従来の金融オプション理論の基礎である無裁定原理と，経済学における効用最大化原理との隠れた関係を明らかにする．より具体的には，まず，無裁定原理のみを与えた EMM 推定問題 [PB-NA], [PS-NA] に，KL 情報量の下限制約を追加した問題を定式化する．次に，この問題の双対問題に着目することで，EMM 推定問題が，オプションの取引を行う主体 (i.e. 買手，売手) の効用最大化行動に帰着することを明らかにする．

(a)　主問題

無裁定原理のみに基づいたオプション評価問題 [PB-NA], [PS-NA] の，不完備市場における発散問題を回避するため，Cochrane[5] および Cochrane and Saá-Requejo[6] は，無裁定条件に加えて確率的割引ファクタ (SDF: Stochastic Discount Factor; 後述) の分散に上限を設けたオプション評価手法 (以下，分散アプローチ) を提案した．このアプローチは，確率測度客観的確率測度 $\mathcal{P}$ との乖離を制限した上で，EMM $\mathcal{Q}$ を推定する問題と見なせる．

これに対し，赤松・長江 [1] は，無裁定条件に加え，確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への KL 情報量 (相対エントロピーの符号を反転したもの)：

$$\mathcal{H}(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \equiv -\int \mathcal{Q}(\omega) \ln \frac{\mathcal{Q}(\omega)}{\mathcal{P}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega \qquad (8)$$

に下限を設けた手法を提案した．この KL 情報量は，2 つの確率測度 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ 間の乖離の指標として一般に用いられる指標である．従って，この提案手法は，客観的確率測度からの乖離を自然な (そして分散アプローチとは異なる) 指標で測った EMM 推定問題と見なせる．以下では，この手法を概説しよう．

まず，EMM 推定問題 (i.e. オプション価格評価問題) をより容易に扱うために，以下に定義される SDF $\Lambda(T)$ を用いた表現に書き直そう：

$$\Lambda(t) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\right], \qquad \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[f\right] \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} f\right] \qquad (9)$$

ここで，$\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}$ は確率測度 $\mathcal{P}$ に対する $\mathcal{Q}$ の Radon-Nikodym 微分，f は事象集合 Ω から実数空間への任意写像である．この SDF を用いれば，無裁定条件式 (7) は以下のように書き直される：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[\boldsymbol{S}(s)\right] = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\boldsymbol{S}(s)\right] \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right] = \boldsymbol{S}(t). \qquad (10)$$

同様に，オプション価格 $\mathcal{C}(t)$ は以下の式で表される：

$$\mathcal{C}(t,\Lambda(T)) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} F(T)\right]. \qquad (11)$$

これより，確率測度 $\mathcal{Q}$ を推定する問題は，SDF $\Lambda(T)$ を推定する問題に帰着する．ここで，SDF は，それ自身が確率過程であり，Arrow-Debreu 状態価格を連続時間-連続状態の枠組みに拡張したものと見なせることに注意されたい．

次に，オプション評価問題 [PB-NA], [PS-NA] の無裁定条件 (10) に加えて，確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への KL 情報量に対する以下の下限を設ける：

$$\mathcal{H}(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \mathcal{H}(0,\Lambda(T)) \equiv -\mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\Lambda(T)\ln\Lambda(T)\right] \geq \bar{H} \qquad (12)$$

この KL 情報量制約を付加したオプション評価問題は，それぞれ，以下のように定式化される：

$$\text{[PB-KL]} \quad \mathcal{C}_{\mathrm{B}}(0) \equiv \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(0, \Lambda(T)), \ \text{s.t. (10) and (12).}$$

$$\text{[PS-KL]} \quad \mathcal{C}_{\mathrm{S}}(0) \equiv \max_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(0, \Lambda(T)), \ \text{s.t. (10) and (12).}$$

本稿では，問題 [PB-KL] を解いて得られる目的関数をオプションの “買手価格” と呼び，問題 [PS-KL] のそれを “売手価格” と呼ぶ．その理由は，これらが，以下の合理的行動を行うオプション取引主体 (i.e. 買手，売手) によってつけられるオプション価格と解釈できるためである：オプションの買手は，無裁定条件 (10) と KL 情報量制約 (12) を満たす中で，最も安い価格 (買手価格) でオプションを購入しようとする．一方，売手は最も高い価格 (売手価格) で売却しようとする．ここで，KL 情報量の下限は，オプションの買手，売手がそれぞれ引き受けられる不完備市場リスクの上限に対応すると解釈できる．その理由は本節 (b) で述べる．一般に，$\bar{H}$ は問題 [PB-KL], [PS-KL] の間で異なっていても良いが，本稿では，記号の煩雑さを避けるために共通の $\bar{H}$ を用いた．

問題 [PB-KL], [PS-KL] に対しては，さらに以下の 2 つの解釈が行える：第 1 に，これらの問題は，無裁定条件を与えたのみでは不定逆問題となる SDF 推定問題 [PB-NA], [PS-NA] を，KL 情報量を用いて正則化したものと見なせる．この KL 情報量は，線形逆問題の正則化手法において，二次関数と同じく頻繁に用いられる関数である．第 2 に，問題 [PB-KL], [PS-KL] は，無裁定条件 (10) の下で，客観的確率を事前確率，EMM $\mathcal{Q}$ を事後確率とした Bayes 推定問題として解釈できる (例えば，Stutzer[19), Kapur[14)]) ．

(b) 双対問題

SDF 推定問題 [PB-KL], [PS-KL] は，実は，効用最大化原理に基づいたオプション取引主体のリスク・ヘッジ行動に帰着する．本節では，これを問題 [PB-KL], [PS-KL] の双対問題を用いて明らかにしよう．まず，問題 [PB-KL], [PS-KL] は，KL 情報量を目的関数に組み込んだ以下の問題と 1 対 1 の対応の関係にある：

$$\text{[PB]} \quad \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(0, \Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(0, \Lambda(T)), \ \text{s.t. (10).}$$

$$\text{[PS]} \quad \max_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(0, \Lambda(T)) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(0, \Lambda(T)), \ \text{s.t. (10).}$$

ここで，γ は，KL 情報量制約 (12) に対応する Lagrange 乗数であり，その下限値 $\bar{H}$ より決定される定数である．以下では，便宜上，問題 [PB] を “買手問題”，問題 [PS] を “売手問題” と呼ぶ．

これらの問題 [PB], [PS] の双対問題は以下のように定式化される[*2]：

$$\text{[DB]} \quad \max_{\{\boldsymbol{\beta}(t) | t \in [0,T]\}} -\frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma \mathcal{W}(0,T)\right]\right], \quad (13)$$

$$\text{s.t.} \ \ \mathrm{d}w(t) = \boldsymbol{\beta}(t)' \left\{\boldsymbol{\alpha}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\} \quad (14)$$

$$\mathcal{W}(0,T) \equiv F(T) - [w(T) - w(0)]. \quad (15)$$

$$\text{[DS]} \quad \min_{\{\boldsymbol{\beta}(t) | t \in [0,T]\}} \frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\gamma \mathcal{W}(0,T)\right]\right], \quad (16)$$

$$\text{s.t. (14) and (15).}$$

ここで，γ は，主問題 [PB], [PS] の KL 情報量制約に対応する Lagrange 乗数であり，KL 情報量の下限値より一意に決定される所与の定数である．以下では，これらの問題 [DB], [DS] が，危険回避度 γ の CARA (Constant Absolute Risk Aversion: 絶対危険回避度一定) 型効用関数を持つ取引主体の最適ポートフォリオ戦略問題と解釈できることを示す．

まず，時点 t で，オプションの取引主体が，$\theta_0(t)$ 円の安全資産および $\{\theta_n(t) | n \in N\}$ 枚の危険資産からなるポートフォリオを組むとする．そして，このポートフォリオの割引価格を

$$w(t) \equiv \theta_0(t) + \sum_n \theta_n(t) S_n(t) \quad (17)$$

とする．ここで，ポートフォリオ戦略は自己資金充足的—各瞬間で資金の追加的投入や引出しがない—とする．このとき，$w(t)$ は以下の確率微分方程式に従う：

$$\mathrm{d}w(t) = \sum_n \theta_n \,\mathrm{d}S_n(t). \quad (18)$$

ここで，式 (14) における Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}(t)$ が，各資産への投資金額を意味している (i.e. $\beta_n(t) \equiv \theta_n(t) S_n(t)$) と考えれば，式 (14) は，式 (18) に一致する．すなわち，式 (14) は自己資金充足条件を意味している．

次に，オプションの買手は，時刻 $t = 0$ において，ポートフォリオを空売りして得た収益でオプションを購入し，満期 T において，当該オプションの終端ペイ・オフ $F(T)$ からポートフォリオの運用収益 $w(T) - w(0) \equiv \int_0^t \mathrm{d}w(t)$ を支払うとする．このとき，期間 $[0, T]$ 間にオプション買手が得る利潤は，$\mathcal{W}(0,T) \equiv F(T) - w(T) + w(0)$ で表される．ここで，オプション買手が利潤 $\mathcal{W}$ に対して，絶対危険回避度 γ の CARA 型効用関数 $U(\mathcal{W}) \equiv -\exp\left[-\gamma\mathcal{W}\right]$ を持つと仮定しよう．このとき，問題 [DB] は，自己資金充足条件式 (14) の下で，満期での利潤に対する確実性等価を最大化するポートフォリオ運用 (リスク・ヘッジ) 問題と見なせる．売手についても同様の解釈が行える．

ここで，式 (13) は時刻 $t = 0$ での富 $w(0)$ の値に依存しないことに注意しよう．これは，取引主体ごとに富の初期

[*2] これらが [PB], [PS] の双対問題であることは，本章 (2) 節で示される．

保有量が異なっていても，robust な分析が行えることを意味している [15]．

また，この問題は，期末におけるヘッジ・エラー $\mathcal{E}(t) \equiv [W(T) - w(t)] - F(T)$ に対するヘッジ・ポートフォリオ問題としても解釈できる．ただし，ヘッジ・エラーの評価には CARA 型不効用関数 $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \equiv \exp[\gamma\mathcal{E}]$ の CE を用いる．ここで，$\gamma \to \infty$ としたとき，[DB] は以下の super-hedging 問題に帰着する：時刻 T において，決して損をしない (i.e. $\mathcal{W}(T) < 0$ とならない) という制約の下で，時刻 0 でのポートフォリオ価格 $w(0)$ を最大化する．この super-hedging 問題は，無裁定条件のみの下でのオプション価格最小/最大化問題 [PB-NA], [PS-NA] の双対問題であることが知られている (例えば，El Karoui and Quenez[9] 参照)．

以上より，KL 情報量に下限を設けた SDF 推定問題 [PB], [PS] は，CARA 型効用関数でヘッジ・エラーを評価したヘッジ・ポートフォリオ運用問題 [DB], [DS] に帰着することが明らかになった．ここで，以下の 2 点に注意されたい：第 1 に，双対問題 [DB], [DS] におけるオプション取引主体の絶対危険回避度 γ は，KL 情報量の下限 $\bar{H}$ と 1 対 1 対応関係にある．従って，KL 情報量の下限 $\bar{H}$ は，オプションの買手，売手が引き受けられる不完備市場リスクの限度を表すと解釈できる．第 2 に，主問題 [PB], [PS] での無裁定条件式 (10) は，双対問題 [DB], [DS] において，Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}(t)$ に対する自己資金充足条件式 (14) に置き換わる．これより，自己資金充足条件下での CARA 型関数を用いた効用最大化問題から出発する際には，無裁定条件を明示的に考慮する必要がないことが判った．

(2) 最適性条件

本節では，ここまでで定式化された問題の最適性条件を導出する．具体的には，$[0, T]$ 間の問題 [PB], [PS] を DP 分解する事で各瞬間 t における最適性条件を導出し，その性質を明らかにする．こうして最適性条件を導出することには，以下の 2 つの意義がある：第 1 に，オプション価格の計算に必要不可欠である；第 2 に，主問題 [PB], [PS] と双対問題 [DB], [DS] の等価性を証明する鍵となる．このうち，前者については本節 (a)，後者は本節 (b) で，それぞれ解説する．ただし，売手問題についての分析は買手のそれと同様であるため，以下では買手問題についてのみ議論する．

(a) 主問題

主問題 [PB] の最適値関数を以下のように定義する：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \min_{\Lambda(T)} \mathcal{C}(t, \Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t, \Lambda(T)), \ \text{ s.t. } (10). \tag{19}$$

ここで，終端条件は $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(T, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z})$ であり，

$$\mathcal{C}(t, \Lambda(T)) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} F(T)\right], \tag{20}$$

$$\mathcal{H}(t, \Lambda(T)) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \ln \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\right]. \tag{21}$$

とした．DP 原理を用いて式 (19) を分解・整理すれば，以下の HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式を得る：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \min_{\mathrm{d}\eta(t)} \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\,\mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t)\right\}\right] \tag{22}$$

$$\text{s.t. } \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\,\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

ここで，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)$ は式 (4) で定義される危険資産の収益率，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) \equiv \mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t) + \mathrm{d}\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$ である．また，$\mathrm{d}\eta(t)$ は以下の式で定義される SDF の変化率である：

$$\mathrm{d}\eta(t) \equiv \frac{\Lambda(t) + \mathrm{d}\Lambda(t)}{\Lambda(t)}. \tag{24}$$

時刻 t での制約条件式 (23) は，無裁定条件式 (10) を DP 分解することによって得られる (詳細は付録 A 参照)．ここで，問題 [PB] の無裁定条件は 2 時点 $t = 0, T$ でのみ定義されるため，各瞬間 t における最適性条件の導出には，無裁定条件もまた DP 分解する必要がある点に注意されたい．

無裁定条件式 (23) に対する Lagrange 乗数を $\boldsymbol{\beta}(t) \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}$ とすれば，HJB 方程式 (22) の最適性条件より，最適 SDF 変化率 $\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t)$ についての以下の Logit 式を得る：

$$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^{*}(t) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\right]\right]}. \tag{25}$$

ここで，Lagrange 乗数の最適値 $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{B}}^{*}(t)$ は以下の方程式の解として得られる：

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \boldsymbol{\beta}^{*}(t)'\boldsymbol{\sigma}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]\right] = \boldsymbol{0}. \tag{26}$$

式 (25), (26) は，(3) 節でのオプション価格導出法において重要な役割を果たす．

(b) 双対問題

双対問題 [DB] の最適値関数を以下のように定義する：

$$\mathcal{J}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\{\boldsymbol{\beta}(s)|s\in[t,T]\}} - \frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{W}(t, T)\right\}\right]\right], \tag{27}$$

$$\text{s.t. } \mathcal{W}(t, T) \equiv F(T) - [W(T) - w(t)], \text{ and } (14).$$

ただし，終端条件は $\mathcal{J}_{\mathrm{B}}(T, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z})$ である．DP 原理を用いて分解・整理すれば，以下の HJB 方程式を得る：

$$\mathcal{J}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z}) = \max_{\boldsymbol{\beta}(t)} - \frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{\mathcal{J}_{\mathrm{B}}^{+}(t) - \mathrm{d}w(t)\right\}\right]\right]. \tag{28}$$

ここで，$\mathcal{J}_{\mathrm{B}}^{+}(t) \equiv \mathcal{J}_{\mathrm{B}}(t) + \mathrm{d}\mathcal{J}_{\mathrm{B}}(t)$ である．

自己資金充足条件 (14) に対する Lagrange 乗数を $\mathrm{d}\eta(t)$ とする．このとき，HJB 方程式 (28) の最適性条件より，

Lagrange 乗数の最適値 $\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t)$ および，最適ポートフォリオ戦略 $\boldsymbol{\beta}^*_{\mathrm{B}}(t)$ について，主問題で得られた式 (25), (26) と同じ構造の式が得られる．こうして得られた式は，$\mathcal{J}^+_{\mathrm{B}}(t)$ を $\mathcal{I}^+_{\mathrm{B}}(t)$ と読み替えれば，式 (25), (26) と等価である．また，$\mathcal{I}(t)$ と $\mathcal{J}(t)$ の終端条件は $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(T) = \mathcal{J}_{\mathrm{B}}(T) = F(T)$ である．これより，主問題 [PB] と双対問題 [DB] の解は最適状態において一致する事が明らかにされた．

(3) アルゴリズム

主問題 [PB], [PS] および双対問題 [DB], [DS] の目的関数は，(1) 節 (a) で定義される買手価格 $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}(0)$，売手価格 $\mathcal{C}_{\mathrm{S}}(0)$ とは異なる．しかし，これらの問題の解を利用する事で，オプションの買手価格，売手価格を求めることができる．本節では，そのメカニズムおよび数値計算方法を示そう．ここでの解法は，先行研究 [1] で示したものとは異なるものであり，以下の 2 点で優れている．まず，SDF を直接求める手法であるため，オプション価格が決定されるメカニズムを直感的に理解しやすい．次に，第 4 章で示す提案モデルに対する解法への拡張が容易である．以下では，買手の主問題 [PB] からオプション価格を導出する方法を示す．双対問題，および売手問題についても，ほぼ同様の方法で価格が求められるため，ここでは解説を省略する．

オプションの買手価格 $\mathcal{C}_{\mathrm{B}}(t)$ は，主問題 [PB] の解 $\{\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t)\}$ より計算できる．これは，オプション価格の定義式 (11) を DP 分解して得られる以下の表現より明らかである：

$$\mathcal{C}(t) = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}_t \left[\mathrm{d}\eta(t) \left\{ \mathcal{C}(t) + \mathrm{d}\mathcal{C}(t) \right\} \right], \quad \mathcal{C}(T) = F(T). \tag{29}$$

従って，オプション価格の計算方法は，まず，問題 [PB] を解き，その解 $\{\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t)\}$ を用いてオプション価格を計算する，という 2 段階の手順に分解できる．これらの手順は，いずれも，問題の時間分解可能性に着目することで，逐次的に解くことができる．その詳細を以下で解説しよう．

まず，問題 [PB] は以下の手順で解くことができる．各状態 $(t, \boldsymbol{Z})$ において，次の瞬間の最適値関数 $\mathcal{I}^+_{\mathrm{B}}(t)$ を所与として，HJB 方程式 (22) を解けば，当該状態の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t, \boldsymbol{Z})$ が得られる．ここで，HJB 方程式 (22) は，SDF 変化率 $\mathrm{d}\eta(t)$ および Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}(t)$ についての最適性条件式 (25), (26) を用いて解くことができる．これより，最適値関数の終端条件 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(T, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z})$ から逐次的に上記の手順を繰り返すことで問題を解くことが出来る．

次に，オプション価格 $C_{\mathrm{B}}(t)$ は，DP 分解されたオプション価格式 (29) より計算できる．具体的には，問題 [PB] で得られた最適 SDF 変化率 $\{\mathrm{d}\eta^*_{\mathrm{B}}(t)\}$ を，終端条件 $C_{\mathrm{B}}(T, \boldsymbol{Z}) = F(T, \boldsymbol{Z})$ から，逐次的に式 (29) に代入して計算すれば，任意の時刻におけるオプション価格 $\{C_{\mathrm{B}}(t)\}$ が得られる．同様の手順を売手について繰り返せば，売手価格が求められる．

(4) オプション上下限価格の意味

本提案手法では，当該オプションの取引が行われるときに，その合理的な取引価格がとり得る値の上下限のみが求められる．これは，無裁定原理のみに基づくオプション評価問題 [PB-NA], [PS-NA] に対して，不完備市場での発散問題を回避するための最低限の仮定のみが与えられたためである．換言すれば，本提案手法は，オプション価格を一意に決定することに固執しない代わりに，誰もが市場で観測可能な証券・資産価格に基づき，恣意性をできるだけ排除した評価を行える手法と言える．従って，本手法を用いる事で，従来の期待現在正味価値 (ENPV: Expected Net Present Value) 法や，完備市場を仮定した金融/リアル・オプション理論を用いて得られたオプション価格の正当性を，誰もが観測可能な市場資産価格に基づき検証できる．例えば，これらの従来手法で求めたオプション価格が，本手法で得られた価格の上限 (下限) の外側にある場合，そのオプションは市場で取引される証券・資産に対して高すぎる (安すぎる) ため売買が成立しないと判断できる．

本研究の提案手法は，任意のオプションに適用可能な汎用的手法である．もちろん，本手法の条件に加えて，個別のオプションに応じた個別条件を追加的に導入する事で，オプション価格を一意に決める事もできる．例えば，オプションの売手 (買手) が独占的で，かつ買手 (売手) が競争的ならば，当該オプション価格は売手価格 (買手価格) に一致するだろう．しかし，こうした個別条件には無数のバリエーションが存在し，それぞれを詳細に議論することは本稿の範囲を超えるため，ここでは取り扱わない．

4 アメリカン・オプション

ここまでの分析を，権利行使時刻を選択できるアメリカン・オプションへと拡張しよう．前章と異なるのは，オプションの所有者 (i.e. オプションの買手) が，権利行使時刻 τ を決定できる点である．本章で対象とするオプションのキャッシュ・フローは，権利行使時刻 τ に発生するペイ・オフ $F(\tau) \equiv F(\tau, \boldsymbol{Z}(\tau))$ のみとする．第 2 章と同様，この仮定は議論を簡潔にするための便宜であり，本手法の限界を示すものではない．以下では，まず，第 2 章で示した枠組みの下で，オプション取引主体の行動を，主問題，双対問題として定式化し，それぞれの最適性条件を明らかにする．次に，そこで求めた最適性条件を利用したオプション価格の導出法を議論する．

(1) 定式化

(a) 主問題

当該オプションの権利行使時刻 τ がオプションの所有者 (i.e. 買手) によって決定された時，対象とするオプション

の無裁定価格は，SDF $\Lambda(T)$ を用いた以下の式で表される：

$$C(t,\tau,\Lambda(T)) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}F(\tau)\right] \tag{30}$$

前章において，SDF 推定問題 [PB], [PS] はそれぞれ，オプションの取引主体のリスク・ヘッジ行動に帰着することが示された．これに従い，本節では，KL 情報量制約つきの SDF 推定問題 [PB], [PS] に，オプション買手の権利行使時刻選択行動を導入することで，アメリカン・オプション価格の上下限を求める．

オプションの買手は合理的行動として，オプションを取得する前に SDF $\Lambda(T)$ (i.e. オプション価格) を選択し，オプションを取得した後に権利行使時刻 τ を選択する．この合理的選択行動は，後ろ向き帰納法 (backward-induction) により，以下の 2 段階行動として表現される：① ある SDF $\Lambda(T)$ の下でオプションを取得した後は，オプション価格 $\mathcal{C}(t,\tau,\Lambda(T))$ を最大にする権利行使時刻 $\tau^*(\Lambda(T))$ を決定する；② オプション取得前は，任意の SDF に対する最適権利行使時刻 $\tau^*(\Lambda(T))$ を与件として，オプションの購入価格 $\mathcal{C}(t,\tau^*(\Lambda(T)),\Lambda(T))$ を最小にする SDF $\Lambda^*_{\mathrm{B}}(T)$ を選択する．従って，オプション買手の行動は，最適 SDF $\Lambda^*_{\mathrm{B}}(T)$ と最適権利行使時刻 τ^* を同時に決定する以下の問題として定式化される：

$$[\text{PB-A}] \quad \max_{\tau\in[0,T]}.\min_{\Lambda(T)}. C(0,\tau,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(\Lambda(T)), \quad \text{s.t. } (10).$$

一方，オプションの売手は，買手が決定した権利行使時刻 τ^* においてペイ・オフを支払うことを与件とし，オプション価格を最大化する SDF $\Lambda^*_{\mathrm{S}}(T)$ を選択する．この行動は以下のように定式化される：

$$[\text{PS-A}] \quad \max_{\Lambda(T)}. C(0,\tau^*,\Lambda(T)) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(\Lambda(T)), \ \text{s.t. } (10).$$

(b) 双対問題

問題 [PB-A] の双対問題は，以下のように定式化される：

$$[\text{DB-A}]$$

$$\max_{\tau\in[0,T]}.\max_{\{\beta(t)\in[0,T]\}}. -\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\mathcal{W}(0,\tau,T)\right]\right], \tag{31}$$

$$\text{s.t. } \mathcal{W}(0,\tau,T) \equiv F(\tau) - [w(T)-w(0)], \quad \text{and } (14). \tag{32}$$

この問題は，従来モデルと同様，CARA 型効用関数を持つオプション取引主体のポートフォリオ運用問題と解釈できる．ここでの期間 $[0,T]$ 間に得られる富 $\mathcal{W}(0,\tau,T)$ は，オプションのペイ・オフ $F(\tau)$ とポートフォリオ収益 (買手の場合は費用) の和である．

主問題と同様，売手の双対問題は，買手が決定する最適権利行使時刻 τ^* を所与とした以下の問題として定式化される：

$$[\text{DS-A}] \quad \min_{\{\beta(t)|t\in[0,T]\}}. \frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\gamma\mathcal{W}(0,\tau^*,T)\right]\right], \quad \text{s.t. } (14) \text{ and } (32).$$

(2) 最適性条件

本節では，買手，売手のそれぞれの問題について最適性条件を示す．前章と同様，各主体の双対問題に対する分析は，主問題のそれと等価である．従って，以下では主問題のみを対象として分析を行う．

(a) 買手問題

ここでは，買手の最適権利行使時刻選択問題が，状態空間 $\{(t,\boldsymbol{Z})\}$ を “権利を行使する領域” と，“権利を行使しない領域” とに分割する問題に帰着することを示す．まず，買手問題 [PB-A] の最適値関数を以下のように定義しよう：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\tau\in[t,T]}.\min_{\Lambda(T)}. \mathcal{C}(t,\Lambda(T)) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad \text{s.t. } (23). \tag{33}$$

DP 原理を適用すれば，この問題は，各状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ において，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：1) 権利行使を行い，オプションのペイ・オフを獲得する; 2) 微小時間 $\mathrm{d}t$ だけ権利行使を待機する．以下では，それぞれが “仮に” 選ばれたとした時の最適値関数について議論する．

■権利が行使される場合　状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ において，1) が “仮に選択された” 時の最適値関数は，以下の式に従う：

$$\mathcal{I}^1_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv F(t,\boldsymbol{Z}) - \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^*(t,\boldsymbol{Z}). \tag{34}$$

ここで，$\mathcal{H}^*(t) \equiv \mathcal{H}^*(t,\boldsymbol{Z})$ は無裁定条件 (10) の下で最大化された KL 情報量であり，以下の式で定義される：

$$\mathcal{H}^*(t) \equiv \max_{\Lambda(T)}. \mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \ \text{s.t. } (10) \tag{35}$$

DP 原理を適用すれば，この式は以下のように分解できる：

$$\mathcal{H}^*(t) = \max_{\mathrm{d}\eta(t)}. \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[-\mathrm{d}\eta(t)\ln \mathrm{d}\eta(t) + \mathcal{H}^{*+}(t)\right], \quad \text{s.t. } (23). \tag{36}$$

ただし，$\mathcal{H}^{*+}(t) \equiv \mathcal{H}^*(t) + \mathrm{d}\mathcal{H}^*(t)$ とした．無裁定条件式 (23) についての Lagrange 乗数を $\boldsymbol{\beta}(t)$ とすれば，この問題の最適性条件より，最適 SDF 変化率 $\mathrm{d}\eta^*(t)$ および Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta^*(t)}$ について以下の式を得る：

$$\mathrm{d}\eta^*(t) = \frac{\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t) - \mathcal{H}^{*+}(t)\}\right]\right]} \tag{37}$$

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\left\{\boldsymbol{\beta}^*(t)'\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)-\mathcal{H}^{*+}(t)\right\}\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right]=\boldsymbol{0}. \quad (38)$$

式 (37), (38) は，本章 (3) で解説するオプション価格導出法において用いられる．

■権利行使が待機される場合　状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ において，2) が "仮に選択された" ときの最適値関数は，以下の式に従う：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z})\equiv\max_{\tau\in[t+\mathrm{d}t,T]}.\ \min_{\Lambda(T)}.\ \mathcal{C}(t,\Lambda(T))-\frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad (39)$$
$$\text{s.t. } (10).$$

DP 原理を適用して整理すれば，以下の HJB 方程式を得る：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z})=\min_{\mathrm{d}\eta(t)}.\ \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\,\mathrm{d}\eta(t)+\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t)\right\}\right], \quad (40)$$
$$\text{s.t. } (23).$$

ここで，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t)\equiv\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)+\mathrm{d}\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$ である．式 (40) は，前章で導出した HJB 方程式 (22) とほぼ等価である．従って，この問題の最適性条件より，最適 SDF 変化率 $\mathrm{d}\eta^*(t)$ および Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}^*(t)$ について式 (25), (26) と等価な式が得られる．

■変分不等式問題としての表現　ここまでで定義した $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1,\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0$ は，それぞれ，権利が行使された場合，権利行使が待機される場合に対する "仮の" 最適値関数である．以下では，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1,\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0$ を用いて，"真の" 最適値関数が従う条件について議論しよう．最適値関数の性質より，$(t,\boldsymbol{Z})$ において，1) が選択される場合，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z})=\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t,\boldsymbol{Z}),\quad \text{and}\quad \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t,\boldsymbol{Z})>\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z}) \quad (41)$$

となる．逆に，2) が選択される場合，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z})=\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z}),\quad \text{and}\quad \mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z})>\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t,\boldsymbol{Z}) \quad (42)$$

となる．これらは，以下の VIP (Variational Inequality Problem: 変分不等式問題) として表現できる：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z})=\max.\left\{\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t,\boldsymbol{Z}),\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z})\right\}. \quad (43)$$

このように VIP として表現される問題は，対象とする状態空間 $(t,\boldsymbol{Z})$ を，以下の 2 つの領域に分割する自由境界問題に帰着することが知られている：

$$\mathcal{D}^1\equiv\{(t,\boldsymbol{Z})|\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t,\boldsymbol{Z})>\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t,\boldsymbol{Z})\}, \quad (44)$$
$$\mathcal{D}^0\equiv\{(t,\boldsymbol{Z})|(t,\boldsymbol{Z})\notin\mathcal{D}^1\}. \quad (45)$$

ここで，$\mathcal{D}^1$ を権利行使領域，$\mathcal{D}^0$ を待機領域と呼ぶ．

(b)　売手問題

売手問題 [PS-A] の最適値関数を以下のように定義する：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}(t,\boldsymbol{Z})\equiv\max_{\Lambda(T)}.\ \mathcal{C}(t,\tau^*,\Lambda(T))+\frac{1}{\gamma}\mathcal{H}(t,\Lambda(T)), \quad (46)$$
$$\text{s.t. } (23).$$

DP 原理を適用すれば，買手によって決定された領域 $\mathcal{D}^1,\mathcal{D}^0$ を所与とした，以下の HJB 方程式を得る：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}(t,\boldsymbol{Z})=\begin{cases}F(t,\boldsymbol{Z})+\frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^*(t,\boldsymbol{Z}) & \text{if}\quad (t,\boldsymbol{Z})\in\mathcal{D}^1\\ \mathcal{I}_{\mathrm{S}}^0(t,\boldsymbol{Z}) & \text{if}\quad (t,\boldsymbol{Z})\in\mathcal{D}^0\end{cases}.$$

ここで，

$$\mathcal{I}_{\mathrm{S}}^0(t,\boldsymbol{Z})\equiv\min_{\mathrm{d}\eta(t)}.\ \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{-\frac{1}{\gamma}\ln\,\mathrm{d}\eta(t)+\mathcal{I}_{\mathrm{S}}^+(t)\right\}\right], \quad (47)$$
$$\text{s.t. } (23).$$

(3)　アルゴリズム

本節では，買手問題/売手問題を解き，その解を用いてオプション価格を導出する方法を解説する．ただし，前章と同様の理由から，ここでは，買手の主問題を用いた解法についてのみ議論する．

対象とするオプションの買手価格は，以下の 2 段階の手順によって求められる：まず，問題 [PB-A] を解く．次に，そこで得られる最適 SDF 変化率 $\{\mathrm{d}_{\mathrm{B}}^*(t)\}$ および権利行使領域 $\mathcal{D}^1$ を用いてオプション価格を計算する．前章と同様，これらはいずれも時間分解可能性に着目することで，逐次的に解くことができる．

まず，[PB-A] の解法を示す．各状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ について，次の瞬間の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^+(t)$ を所与として，式 (34) および式 (40) から，権利行使が行われる場合と，行使が待たれる場合の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t),\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t)$ をそれぞれ求める．ここで，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^1(t)$ を計算する場合，任意の状態についての $\{\mathcal{H}^*(t,\boldsymbol{Z})\}$ を予め計算しておくと良い．$\mathcal{H}^*(t)$ の計算には，DP 分解された式 (36)，および最適性条件式 (37), (38) を用いた逐次計算が適用できる．一方，$\mathcal{I}_{\mathrm{B}}^0(t)$ の計算には最適条件式 (25), (26) を用いる．こうして求めた最適値関数の間の条件式 (41) から，状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ が権利行使領域に含まれるかどうかを決定し，時刻 t の最適値関数 $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t)$ を求める．

次に，オプション価格 $C_{\mathrm{B}}(t)$ は，DP 分解された以下の式から計算できる：

$$C_{\mathrm{B}}(t,\boldsymbol{Z})=\begin{cases}F(t,\boldsymbol{Z}) & \text{if}\quad (t,\boldsymbol{Z})\in\mathcal{D}^1\\ \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t)C_{\mathrm{B}}^+(t)\right] & \text{if}\quad (t,\boldsymbol{Z})\in\mathcal{D}^0\end{cases}. \quad (48)$$

ここで，$\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*(t),\mathcal{D}^1$ は，それぞれ，最適 SDF 変化率，および権利行使領域であり，いずれも 1) の解として求められる．また，$C_{\mathrm{B}}^+(t)\equiv C_{\mathrm{B}}(t)+\mathrm{d}C_{\mathrm{B}}(t)$ である．これより，オプション価格の終端条件 $C_{\mathrm{B}}(T,\boldsymbol{Z})=F(T,\boldsymbol{Z})$ から逐次的に式 (48) を計算すれば，オプション価格 $\{C_{\mathrm{B}}(t)\}$ が得られる．

これらの手順は，最適 SDF 変化率 $\{\mathrm{d}\eta_{\mathrm{B}}^*\}$ および権利行使領域 $\mathcal{D}^1$ を導出する Step 1，オプション価格 $\{C_{\mathrm{B}}(t)\}$ を計算する Step 2 としてまとめられる．まず，Step 1 は，以下のように書き下せる：

Step 1-1. 満期における最適値関数を $\mathcal{I}_{\rm B}(T,\boldsymbol{Z}) := F(T,\boldsymbol{Z})$ とし，$t := T - {\rm d}t$, $\mathcal{I}_{\rm B}^{+}(t) := \mathcal{I}_{\rm B}(T)$ とする．

Step 1-2. 時刻 t において，権利行使を待機する場合の "仮の" 最適値関数 $\mathcal{I}_{\rm B}^{0}(t)$ を求める．まず，$\mathcal{I}_{\rm B}^{+}(t)$ を所与として式 (26) を解く．こうして得られた $\boldsymbol{\beta}_{\rm B}^{*}(t)$ を式 (25) に代入して，${\rm d}\eta_{\rm B}^{*}(t)$ を求める．この最適 SDF 変化率 ${\rm d}\eta_{\rm B}^{*}(t)$ および $\mathcal{I}_{\rm B}^{+}(t)$ を HJB 方程式 (40) に代入して $\mathcal{I}_{\rm B}^{0}(t)$ を求める．

Step 1-3. 時刻 t において，権利を行使する場合の "仮の" 最適値関数を $\mathcal{I}_{\rm B}^{1}(t) := F(t) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{H}^{*}(t)$ とする．

a) $\mathcal{I}_{\rm B}^{1}(t) \geq \mathcal{I}_{\rm B}^{0}(t)$ の場合, $\mathcal{I}_{\rm B}(t) := \mathcal{I}_{\rm B}^{1}(t)$ とし, $(t,\boldsymbol{Z})$ を権利行使領域 $\mathcal{D}^{1}$ に追加.

b) $\mathcal{I}_{\rm B}^{1}(t) < \mathcal{I}_{\rm B}^{0}(t)$ の場合，$\mathcal{I}_{\rm B}(t) := \mathcal{I}_{\rm B}^{0}(t)$ とする．

Step 1-4. $t = 0$ ならば終了．そうでなければ, $t := t - {\rm d}t$, $\mathcal{I}_{\rm B}^{+}(t) := \mathcal{I}_{\rm B}(t)$ として Step 1-2. へ.

次に，Step 2. は以下のように書き下せる：

Step 2-1. 満期におけるオプション価格を $C_{\rm B}(T,\boldsymbol{Z}) := F(T,\boldsymbol{Z})$ とし，$t := T - {\rm d}t$, $C_{\rm B}^{+}(t) := C_{\rm B}(T)$ とする．

Step 2-2. t において，状態 $(t,\boldsymbol{Z})$ が権利行使領域 $\mathcal{D}^{1}$ に含まれていれば，$C_{\rm B}(t) := F(t)$．そうでなければ，Step 1-2. で求めた最適 SDF 変化率 ${\rm d}\eta_{\rm B}^{*}(t)$ と $C_{\rm B}^{+}(t)$ を式 (29) に代入して $C_{\rm B}(t)$ を計算.

Step 2-3. $t = 0$ ならば終了．そうでなければ, $t := t - {\rm d}t$, $C_{\rm B}^{+}(t) := C_{\rm B}(t)$ として Step 2-2. へ.

また，Step 1-3. で用いる，無裁定条件のみの下での KL 情報量の最大値 $\mathcal{H}^{*}(t)$ は，以下の手順により予め計算しておくことができる：

Step 0-1. 満期における KL 情報量を $\mathcal{H}^{*}(T,\boldsymbol{Z}) := 0$ とし，$t := T - {\rm d}t$，$\mathcal{H}^{*+}(t) := \mathcal{H}^{*}(T)$ とする．

Step 0-2. t において, $\mathcal{H}^{*+}(t)$ を所与として式 (38) を解く．こうして得られた $\boldsymbol{\beta}^{*}(t)$ を式 (37) に代入して，最適 SDF 変化率 ${\rm d}\eta^{*}(t)$ を求める．${\rm d}\eta^{*}(t)$ および $\mathcal{H}^{*+}(t)$ を，DP 分解された $\mathcal{H}^{*}(t)$ の式 (36) に代入し，$\mathcal{H}^{*}(t)$ を求める．

Step 0-3. $t = 0$ ならば終了．そうでなければ, $t := t - {\rm d}t$, $\mathcal{H}^{*+}(t) := \mathcal{H}^{*}(t)$ として Step 0-2. へ.

5 数値計算例–不動産売却権の評価

本章では，第 4 章で示した提案手法の判りやすい適用例を示し，数値解法が適切に動作することを確認する．その評価対象として想定するオプションは，時々刻々価格が変動する不動産を，期間 $[0,T]$ 内の任意の時刻に一定額 K で売却できる権利 (不動産を原資産とするアメリカン・プット・オプション) である．本来，この不動産もまた不完備市場におけるオプションであり，その価格は提案手法を用いて算出される必要がある．しかし，ここでは計算例を簡潔に示し，従来の金融/リアル・オプション理論により求められる価格との性質を比較するために，不動産価格が幾何 Brown 運動に従うとする．さらに，ここでは，解の性質をより明らかにするために，分析対象とするモデルに対して以下の 2 つの条件を仮定する：a) リスク要因が 2 つしか存在しない (i.e. K = 2); b) 資産市場で取引される危険資産が，1 種類の "代表的資産" のみであり，その価格が幾何 Brown 運動に従う．これらの仮定は，いずれも本手法の本質的な限界を示すものではない．前章までで述べたように，本手法は任意数のリスク要因および危険資産が存在する場合に (理論上は) 適用可能である．以下では，このモデルの枠組みを示し，本手法の適用結果を示す.

(1) モデルの枠組み

(a) 資産価格と資産市場

1 種類の危険資産が取引される資産市場 (i.e. N = 1) を考え，危険資産資産の割引済み価格 $S(t)$ が以下の幾何 Brown 運動に従うとする：

$$
\begin{aligned}
{\rm d}S(t)/S(t) &= \alpha\,{\rm d}t + \sigma_1\,{\rm d}Z_1(t) + \sigma_2\,{\rm d}Z_2(t) && (49)\\
&= \alpha\,{\rm d}t + \boldsymbol{\sigma}\,{\rm d}\boldsymbol{Z}(t). && (50)
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha, \boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_1\ \sigma_2]$ は所与の定数とする．

問題の性質をより明らかにするために，リスク要因を，資産取引によって完全にヘッジできるものと，全くヘッジできないものとに分解しよう．まず，$Z_1(t), Z_2(t)$ を合成した，以下の 2 つの確率過程 $z(t), \bar{z}(t)$ を定義する：

$$
z(t) \equiv \frac{\sigma_1 Z_1(t) + \sigma_2 Z_2(t)}{\sigma}, \quad \bar{z}(t) \equiv \frac{\sigma_2 Z_1(t) - \sigma_1 Z_2(t)}{\sigma} \tag{51}
$$

ただし，$\sigma \equiv ||\boldsymbol{\sigma}|| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ である．ここで，${\rm d}z, {\rm d}\bar{z} \sim \mathcal{N}(0,1)$，かつ ${\rm E}^{\mathcal{P}}\left[\{{\rm d}z\}\{{\rm d}\bar{z}\}\right] = 0$ より，$z(t), \bar{z}(t)$ は，互いに独立な増分を持つ $\mathcal{P}$-Wiener 過程である．次に，資産価格過程を，${\rm d}z$ を用いて

$$
{\rm d}S(t)/S(t) = \alpha\,{\rm d}t + \sigma\,{\rm d}z(t) \tag{52}
$$

と書き直す．これより, $z(t)$ は資産取引によって完全にヘッジ可能なリスク要因, $\bar{z}(t)$ は，全くヘッジ不可能なリスク要因と見なせる．以下では，$z(t), \bar{z}(t)$ を，それぞれ，市場リスク要因，非市場リスク要因と呼ぶ.

(b) 不動産価格とオプション収益

時刻 t での不動産価格を $P(t)$ で表し，以下の幾何 Brown 運動に従うとする：

$$
\begin{aligned}
{\rm d}P(t)/P(t) &= \mu\,{\rm d}t + v_1\,{\rm d}Z_1(t) + v_2\,{\rm d}Z_2(t) && (53)\\
&= \mu\,{\rm d}t + \boldsymbol{v}\,{\rm d}\boldsymbol{Z}(t). && (54)
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha, \boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_1\ \sigma_2]$ は所与の定数とする．もしくは，式 (51) で定義されるリスク要因を用いて，

$$\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu\,\mathrm{d}t + v\left\{\rho\,\mathrm{d}z(t) + \bar{\rho}\,\mathrm{d}\bar{z}(t)\right\}. \tag{55}$$

と表せる．ここで，

$$v \equiv ||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \quad \rho \equiv \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v}/\sigma v, \quad \bar{\rho} \equiv \sqrt{1-\rho^2}.$$

である．時刻 t における対象オプションのペイ・オフを，不動産価格を原資産と見なしたプット型として，以下のように仮定する：

$$F(t,P) = \max.\{K-P, 0\}. \tag{56}$$

(2) 時間と状態の離散化

本数値計算では，時間 $[0,T]$ を T 個の時間帯に分割し，$\Delta T = T/T$ とする．これに伴い，Wiener 過程 $(z(t), \bar{z}(t))$ の増分を，4 項過程 $(\mathrm{d}z(t), \mathrm{d}\bar{z}(t)) \approx \{(\sqrt{\Delta T}, \sqrt{\Delta T}), (-\sqrt{\Delta T}, \sqrt{\Delta T}), (\sqrt{\Delta T}, -\sqrt{\Delta T}), (-\sqrt{\Delta T}, -\sqrt{\Delta T})\}$ で近似する．ただし，いずれの生起確率も 1/4 とした．こうして離散化した時間と状態の枠組みにおいて，第 4 章で解説したアルゴリズムを適用する．

感度分析のベース・ケースとして使用したパラメタは，以下の通りである：

$$\begin{array}{cccc} T=5, & \gamma=1, & K=2, & P_0=1, \\ \alpha=8\%, & \sigma=20\%, & \mu=2\%, & v=15\%. \end{array} \tag{57}$$

ただし，第 2 章と同様，ここでは，安全資産をニューメレール資産にとっており，その利子率を $r = 4\%$ とした．従って，式 (57) のうち，α, μ は，本来の (観測される) 値から利子率 r を引いたものである．

(3) 数値計算結果

(a) 不動産価格とオプション価格

図 1 は，初期 (i.e. 時刻 $t=0$ での) 不動産価格を横軸，オプション価格を縦軸にとり，同じペイ・オフ関数の下でアメリカン・オプションと，ヨーロピアン・オプションについてプロットしたものである．ここでは，証券価格と不動産価格の相関係数を $\rho = 0.25$，初期不動産価格を $P_0 \in [0,3]$ とし，その他のパラメタには式 (57) を用いた．

この図より，1) アメリカン・オプション買手価格，売手価格は共に intrinsic value (i.e. $\max\{K-P_0, 0\}$) 以上であり，2) ヨーロピアン・オプションの売手価格を，アメリカン・オプションの買手価格が上回っている，という 2 点が判る．1) は，買手価格は intrinsic value 以上であり，売手価格は常に買手価格以上であることから，ほぼ自明である．2) は，権利行使時刻が選択できることが，買手により大きな価値をもたらし，売手により高いヘッジ費用を要求することが原因である．

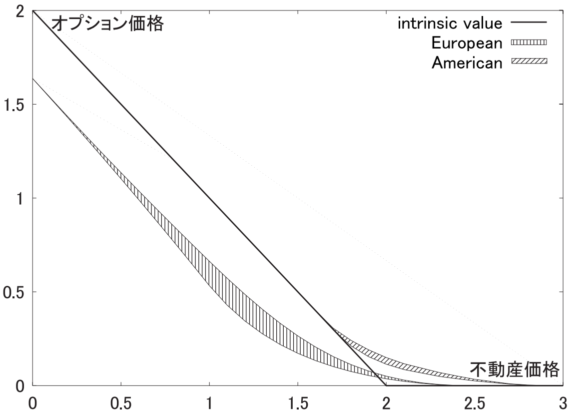

図 1: 不動産価格とオプション価格

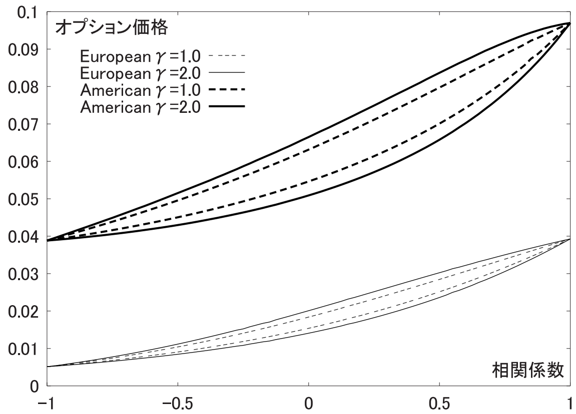

図 2: 相関係数とオプション価格

(b) 相関係数とオプション価格

図 2 は，危険資産 (市場資産) 価格と不動産価格の相関係数を横軸に，オプション価格を縦軸にプロットしたものである．ここでは，$K=1$ とし，$\gamma = 1, 2$ のケースについてそれぞれプロットした．それ以外のパラメタには式 (57) を用いた．

この図より，以下の 3 つのことが判る．第 1 に，アメリカン・オプションの買手価格は，常にヨーロピアン・オプションの売手価格を上回っている．このことは，前節で述べた理由からも明らかであり，任意の相関係数に対して robust な結果であることが示された．第 2 に，完備市場 (i.e. $\rho = 1$) を仮定した，従来のリアル・オプション評価手法は，市場の不完備性を考慮した本手法に対し，過大評価となる傾向にある．これを説明するために，オプション価格が，1) ペイ・オフに対するヘッジ費用 (買手にとってはポートフォリオ空売り価格) と，2) ヘッジ・エラーに対して主体が “感じる” 費用の和からなると解釈しよう．1) は，相関係数 ρ が小さくなるほど減少し，2) は，相関係数の絶対値 $||\rho|| \equiv \sqrt{\rho^2}$ が小さくなるほど増加する．特に，この例では，前者の効果が後者の効果よりも大きいため，結果として相関係数が小さいほど，オプション価格が減少している．第 3 に，相関係数の絶対値 $||\rho||$ が小さく，絶対危険回避度 γ が大きいほ

ど，オプションの価格幅は増加する．これは，$||\rho||$ が小さいほど，ヘッジ・エラーが増加し，γ が大きいほど，ヘッジ・エラーに対して感じる費用が大きくなるためである．

(c) 権利行使領域

最後に，不動産売却権に対する権利行使領域を示そう．図 3 は，横軸に時刻を，縦軸に不動産価格をとり，権利行使を行う領域と，行わない領域の境界 (不動産価格がこの境界を下回ったときに権利行使を行う) をプロットしたものである．ここでは，$K = 1$ とし，$\gamma = 0.5, 1.0, 2.0$ のそれぞれのケースに対する結果を示した．それ以外のパラメタには式 (57) を採用した．

この図より，満期が近づくほど，権利行使に対するインセンティブが強まることが判る．この結果は，完備市場下での金融オプションに対する分析と整合的である．また，絶対危険回避度 γ が大きいほど，早期の権利行使に対して慎重であることが判る．これは，オプション所有者のリスク回避性向が高いほど，権利行使によって得られる確定的なペイ・オフの価値よりも，権利行使以降のポートフォリオ運用がもたらす不確実な収益の価値が高くなるためである．

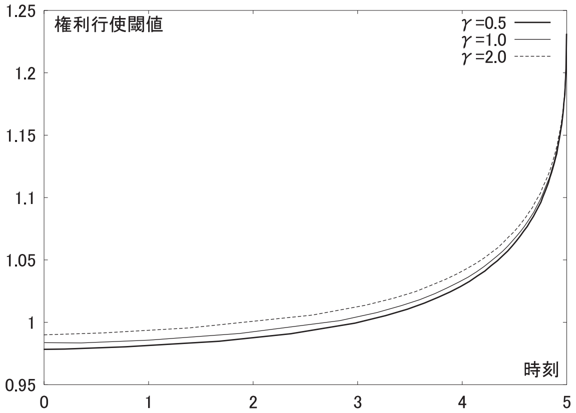

図 3: 権利行使領域

6 おわりに

本研究では，赤松・長江 [1] が提案した手法を，権利行使時刻を選択可能な (アメリカン) オプションへと拡張した．具体的には，まず，無裁定条件，資産価格情報および KL 情報量に関する制約から，SDF(Stochastic Discount Factor) を推定すると同時に，最適権利行使時刻を決定するモデルを定式化した．次に，この問題が，CARA 型効用関数に基づいた最適リスク・ヘッジ問題に最適停止問題を組み合わせた問題と双対関係にあることを明らかにした．また，その最適戦略から最適な SDF を直接計算できることを示し，この特性を利用したオプション価格の効率的数値計算法を開発した．最後に，本提案手法の判りやすい適用例を示し，提案したアルゴリズムを用いて，不完備市場におけるアメリカン・プット・オプション価格を計量できることを明らかにした．

本手法により，従来手法では扱えなかった，“タイミング選択の価値” を明示的に考慮した不完備市場下のリアル・オプション評価が可能となる．例えば，任意の時刻に開発を開始できる不動産開発権の評価や，市場からの撤退オプション価値を考慮したプロジェクトの財務的価値評価などが行える．また，本手法において，満期 T を十分に大きくすることで，Dixit and Pindyck[7] “無限満期モデル” を用いた分析結果の妥当性を検証できる．

当然ながら，本手法は，赤松・長江 [1] の手法が持つ以下の長所を継承している：① 市場でのリスク価格に関する情報を活用できる無裁定価格理論と整合的であると同時に，効用最大化アプローチとも整合的で不完備市場リスクを考慮できる; ② 誰もが観測可能な市場資産価格情報に基づき，可能な限り恣意性を排除した評価が行える; ③ 任意のオプションに適用可能な汎用的手法であると同時に，個別のオプションに応じて特定の条件を導入した拡張が容易である．

本研究のアプローチを利用した今後の研究課題の一つとして，複合オプションへのモデル拡張が挙げられる．リアル・オプション問題の多くは，権利行使を何度も行えるのみならず，あるオプションを行使する事で別のオプションを獲得/喪失し得る，複合オプションを対象とする．例えば，駐車場として運用していた土地は，いつでも賃貸オフィスや賃貸住宅といった用途に変更できるが，その逆の用途変更は非常に困難である．このようなリアル・オプションを評価するには，権利行使の相互依存関係をシステマティックに取り扱える枠組みが必要である．このような方向の拡張には，本研究と同じく問題の分解可能性に着目したアプローチが有効である．この拡張については，別の機会に報告したい．

付録 A　式 (22) の導出

式 (20) および (21) を DP 分解すれば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(t) &= \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda(t)}\mathrm{E}_{t+\,\mathrm{d}t}^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda^+(t)}F(T)\right]\right] \\
&= \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\left\{\mathcal{C}(t)+\,\mathrm{d}\mathcal{C}(t)\right\}\right] \\
\mathcal{H}(t) &= -\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda^+(t)}\ln\left\{\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda^+(t)}\right\}\right] \\
&= -\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\ln\,\mathrm{d}\eta(t)+\,\mathrm{d}\eta(t)\left\{\mathcal{H}(t)+\,\mathrm{d}\mathcal{H}(t)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

ただし，$\Lambda^+(t) \equiv \Lambda(t) + \mathrm{d}\Lambda(t)$ である．これらを最適値関数の定義式 (19) に代入すれば，HJB 方程式 (22) を得る．同様に，無裁定条件式 (10) を DP 分解すれば，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\left\{\boldsymbol{S}(T)-\boldsymbol{S}(t)\right\}\right] \\
&= \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(t^+)}{\Lambda(t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)+\mathrm{E}_{t^+}^{\mathcal{Q}}\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t^+)}\left\{\boldsymbol{S}(T)-\boldsymbol{S}(t^+)\right\}\right]\right] \\
&= \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\mathrm{d}\eta(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)\right] = 0
\end{aligned}
$$

これより，時刻 t で成立するべき無裁定条件式 (23) を得る．

参考文献

1) 赤松隆, 長江剛志: 経済リスクを考慮した社会基盤投資プロジェクトの動学的財務評価, 土木学会論文集, (投稿中), 2002.
2) Amram, M. and Kulatilaka, N.: *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Harvard Buisiness School Press, 1999.
3) Arrow, K. J. and Fisher, A. C.: Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility, Quarterly Journal of Economics, Vol. 88, pp. 312–319, 1974.
4) Black, F. and Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economiy, Vol. 81, pp. 637–659, 1973.
5) Cochrane, J. H.: *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001.
6) Cochrane, J. H. and Saá-Requejo, J.: Beyond arbitrage: Good-deal asset price bounds in incomplete markets, Journal of Political Economy, Vol. 108, No. 1, pp. 79–119, 2000.
7) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
8) Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, 2nd edition, 1996.
9) El Karoui, N. and Quenez, M. C.: Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incompletej market, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 33, No. 1, pp. 29–66, 1995.
10) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Implications of security market data for models of dynamic economies, Journal of Political Economiy, Vol. 99, pp. 225–262, 1991.
11) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Assessing specification errors in stochastic discount factor models, The Journal of Finance, Vol. 52, No. 2, 1997.
12) Harrison, J. M. and Pliska, S. R.: Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stochastic Process and Their Applications, Vol. 11, pp. 215–260, 1981.
13) Henry, C.: Investment decisions under uncertainty: The irreversibility effect, American Economic Review, Vol. 64, pp. 1006–1012, 1974.
14) Kapur, J. N. and Kesavan, H. K.: *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, 1992.
15) Luenberger, D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, NY, 1998.
16) Luenberger, D. G.: Arbitrage and universal pricing, Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 26, pp. 1613–1628, 2002.
17) Mehra, R. and Prescott, E.: The equity premium puzzle, Journal of Monetary Economics, Vol. 15, pp. 145–161, 1985.
18) Merton, R. C.: The theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, pp. 141–183, 1973.
19) Stutzer, M.: A Bayesian approach to diagnosis of asset pricing models, Journal of Econometrics, Vol. 68, pp. 367–397, 1995.
20) Stutzer, M.: A simple nonparametric approach to derivative security valuation, The Journal of Finance, Vol. 51, No. 5, pp. 1633–1651, 1996.
21) Trigeorgis, L.: *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press, Cambridge, 1996.
22) Weil, P.: The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, Journal of Monetary Economics, Vol. 24, No. 2, pp. 401–421, 1989.

(2003.1.15 受付)

Pricing of Real Options in Incomplete Markets

Takeshi NAGAE and Takashi AKAMATSU

We present an approach for pricing "real options" in an incomplete market, which bridges the gap between arbitrage-free pricing and utility maximization analysis. In our approach, the pricing of real options is formulated as a problem of estimating equivalent martingale measures under Kullback-Leibler information criteria restrictions. Our analysis reveals that the problem reduces to a dynamic portfolio problem with CARA utility function. We further extend the pricing method to options with a timing choice (i.e. American option): the problem is formulated as a two-person dynamic stochastic game, in which a buyer of the option chooses an optimal exercise strategy whereas an option writer hedges risks due to the option liability. Exploiting the stochastic DP principle, we develop an efficient algorithm for computing the equilibrium price.