社会基盤整備・運用事業の経済リスク管理問題に対するファイナンス工学的アプローチ[1]

A Financial Engineering Approach to Managing Infrastructure Project Risks[1]

赤松 隆[2]，長江 剛志[3]
By Takashi AKAMATSU[2] and Takeshi NAGAE[3]

1. はじめに

社会基盤施設の整備・運用プロジェクト (以下，IP と書く) は，一般に，社会・経済的側面と財務的側面の 2 つの観点から評価される．前者は，従来から土木計画学分野の重要課題と認識され，その代表的方法である経済的便益費用分析に関する多くの研究が，理論・実証の両面から，蓄積されてきた．一方，後者は，通常，IP に限らない一般的な実物投資プロジェクトでも実施される．そのためか，土木計画分野では，財務的な分析・評価法に関しては，研究の必要性すら顧みられてこなかったきらいがある．

しかし，近年，IP においても，財務的観点からの分析と評価の重要性が高まりつつある．その背景は，先進諸国で，IP への民間・市場からの資金・ノウハウの導入，及びリスク管理の必要性が要請され始めたことにあろう．実際，わが国でも，IP の民営化 (e.g., 道路公団)，PFI や証券化スキーム (e.g., 熱海観光道路) による事業実施が始まりつつある．また，リスク管理についても，’90 年代のバブル経済破綻や経済のグローバル化進展といった事業環境の変化を経験し，その必要性の認識が高まっている．このような潮流は今後も続くと考えられ，そのための方法論を体系的に構築してゆくことは，土木計画学においても重要な課題である．

財務 (ファイナンス) 論的にみれば，IP は，その事業から発生するキャッシュ・フロー流列を受け取る権利に過ぎない．この一見単純な権利の財務的評価は，実は，みかけほど易しいものではない．もちろん，仮に一定の経済条件下での確定的なキャシュ・フローが保証されるなら，その評価・分析は極めて単純である．しかし，現実には，事業をとりまく経済環境 (e.g., . 金利・為替・景気) は一定ではなく，長期にわたって発生するキャシュ・フローも確実な予測の困難な確率過程である．これらの不確実性から発生する動的な “経済リスク” を適切に分析・評価するためには，首尾一貫した理論的枠組みが必要である．また，社会基盤施設の安定的な運用のためには，経済環境の変化に応じたフィードバック的意志決定によって，経済リスクを制御 (“リスク・ヘッジ”) する方法も求められるであろう．

このような経済リスクを考慮した IP の財務的分析・評価の方法論は，その必要性にも関わらず，未だ確立・普及しているとは言い難い．実際，IP における財務的評価は，古典的な会計学の枠組での分析にとどまり，リスクの考慮は，期待純現在価値法や修正割引率法といった素朴な手法で対処しているのが現状である．これらは，アド・ホックな便法に過ぎず，事業が抱える動学的なリスクをシステマティックに評価しうる論理構造を備えていない．さらに，従来手法は，市場で観測される資産・証券価格に含まれている “リスクの市場価格” に関する情報を十分に活用していない．そのため，主観的・恣意的な評価に陥りやすいのみならず，例えば，事業契約に含まれる “オプション価値” の計量，あるいは金利変動リスクの計量といった動学的な問題を市場情報と矛盾無く扱うことは難しい．

一方，ファイナンス分野では，証券 (金融・資本) 市場で取引される金融資産を対象として，その合理的評価および投資・運用に伴う動学的リスク制御のための理論が発展してきた．その代表的理論がオプション (条件付請求権) 価格理論である．また，この理論を中心とする金融リスク管理法の研究は，数学，情報科学，計算工学等の諸分野と融合し，ファイナンス工学 (Financial Engineering) と呼ばれる一大分野を形成している．そして，そこで開発されたリスク計量化・制御技術の普及は，世界中の金融・資本市場構造やファイナンス実務を劇的に変化させるに至っている．

金融資産であれ，IP(あるいは一般の実物投資事業) であれ，ファイナンス論的には，確率的キャッシュ・フローを受取る権利契約である．従って，IP のリスク評価・管理法として，ファイナンス工学的アプローチを検討してみることは，極めて自然である．ただし，従来のファイナンス工学は，(主に) 証券市場で取引される資産を対象とした方法論であり，IP のような複雑・大規模な実物投資プロジェクトに，そのままナイーブに適用できるものではない．実際，2 章で説明するように，

---

[1] キーワーズ：ファイナンス工学，不完備市場，一般化相補性アプローチ，オプション・グラフ

[2] 工博　東北大学大学院情報科学研究科
(〒 980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 06)
[3] 博士 (情報科学)　神戸大学大学院自然科学研究科
(〒 657-8501　神戸市灘区六甲台町 1-1)

IP の財務的評価のためには，従来のファイナンス理論をいくつかの方向に拡張／一般化した理論が必要である．本稿では，そのために筆者らが行なった研究を簡潔に紹介し，今後の研究課題・展望を議論する．

本稿の構成は以下の通りである．まず，第 2 章では，従来の (金融・リアル) オプション理論を IP 評価へ応用することの可能性と限界を議論する．次に，第 3 章および第 4 章では，これら理論の融合と拡張を企図した筆者らの研究を紹介し，今後の研究課題を述べる．より具体的には，第 3 章では，実物投資プロジェクトの "不完備市場リスク" を考慮した上で，その財務的価格を動学的に評価する方法を示す．第 4 章では，実物投資プロジェクトの特徴である "意思決定の柔軟性と連鎖性" を一般的に扱うことのできる "オプション・グラフ理論" を紹介する．最後に，第 5 章は，まとめである．

2. 従来研究と本研究の考え方

(1) 従来のオプション理論の特徴と限界

オプション価格理論，及び，それを含む金融資産価格理論全般の体系的内容は，膨大な数の出版物 (例えば，付録に記した様々なレベル・観点から書かれた教科書・専門書) において，既に詳細に解説されている．従って，以下では，ファイナンス理論における初等的用語・概念に関する予備知識は与件とした上で，IP の評価に関連する点のみに限定したオプション理論の特徴と限界を簡潔に議論する．

Black and Sholes[1], Merton[2]に始まる金融オプション理論は，市場資産取引における無裁定条件のみに依拠して，オプション価格を決定する．この理論では，通常の均衡理論とは異なり，経済主体の選好条件 (e.g., 効用関数) や市場の需給均衡条件は不要である．そのようなことが可能となる理由は，このアプローチが，オプション価格を (観測されている) 原資産価格の関数として表現する，すなわち，"相対価格の理論" となっているからである．経済学的な意味の理解しやすい別の表現をすれば，このアプローチは，Arrow-Debreu の (不確実性下に拡張された) 一般均衡理論における条件付請求権 ("Arrow-Debreu 基本証券") の価格を，観測される資産価格から "逆推定" する具体的な手続きを与えているのである．この事情は，古典的な Black- Sholes 理論であれ，より一般化・抽象化されたマルチンゲール・アプローチ (e.g., Harrison-Kreps[3]，Harrison-Pliska[4], Heath-Jarrow-Morton[5),6)]) であれ，同じである．

このアプローチによってオプション価格を一意的に決定できるのは，観測資産価格から Arrow-Debreu 基本証券価格を一意に推定できる場合である．これは，離散的な状態空間なら，将来起こりうる状態の数が，線形独立なペイ・オフ・ベクトルを持つ資産の個数と同じか小さい場合，すなわち，"完備市場" の条件が満たされる場合に限られる．具体的な資産取引 (リスク・ヘッジ) 操作と関係付けて言えば，当該オプションの取引がもたらすリスクが，資産取引によって完全にヘッジできる (i.e. 市場で取引される証券・資産を組み合わせた動的ポートフォリオ運用によって，キャッシュ・フローを完全に replicate できる) 場合を意味している．

このことは，標準的なオプション理論の適用限界を意味している．すなわち，当該オプションがもたらすリスクを資産取引によって完全にヘッジすることが不可能な "不完備市場" では，この理論のみでオプション価格を一意に決定することはできない．このオプション理論の限界が IP のリスク評価に与える問題点については，以下の (2) で，より具体的に説明する．

なお，相対価格アプローチと対になる "絶対価格アプローチ" は，市場の需給均衡概念に基づいて資産・証券価格を説明する需給均衡理論 (e.g., CAPM: *Capital Asset Pricing Model*[7),8),9)] や，その動学版である ICAPM: *Intertemporal CAPM*[10)], CCAPM: *Consumption-based CAPM*[11)]) である．そこでは，市場取引されている全資産の価格は，経済主体の基本条件 (e.g., 効用関数, 生産関数，初期財産等) のみで表現されることになる．この均衡アプローチは，不完備市場における資産価格や経済厚生状態の本質的特性を解明するためには必須であり，また，純粋理論的な枠組みとしては優れている．しかし，現在までに確立している代表的消費者による記述を用いた均衡理論は，その実証的妥当性に関しては，"Equity Premium Puzzle[12)]" や "Risk-free Rate Puzzle[13)]" に代表される多くの否定的結果が指摘されている．従って，均衡理論アプローチは，現時点では，IP のリスク計量化といった問題に適用できる段階にはないと思われる．

さて，上記の金融オプション理論や動的ポートフォリオ理論に見られるように，ファイナンス分野では，(対象は金融資本市場に限定されているものの) 確率過程としての状態表現や確率的制御理論をベースとする動学的なリスク管理手法が定着している．このようなアプローチを実物投資問題に適用する試みの一つとして，従来から知られているのが，リアル・オプション理論である．この初期の研究 (e.g., Brennan and Schwartz[14)], McDonald and Siegel[15),16)]) は，不可逆な実物投資問題において，投資を延期するオプションの価値と投資タイミングの決定法を与えている (これは，概念的には，金融オプション理論におけるアメリカン・オプション問題，あるいは，費用便益分析における準オプション価値[17),18)] 問題とほぼ同様の問題である)．その後，様々な研究と応用が進展し (例えば，Dixit and Pindyck[19)]参

照)，最近では，土木計画分野においても，IP を念頭に置いた理論の拡張が進められている．

しかし，従来のリアル・オプション研究の大半は，プロジェクト・リスクと金融市場の完備性・不完備性に関しては，乱暴／無頓着な扱いをしている．すなわち，プロジェクトのキャッシュ・フロー変動が，①完備市場リスクか，②完全に不完備リスク; という両極端な仮定の場合しか扱っていない．前者は，金融市場で完全にリスク・ヘッジできる，つまり，実物投資プロジェクトと金融オプションとの間に (理論的には) 何ら相違がない場合である．後者は，プロジェクトのリスクは，金融資産の取引では全くヘッジできない場合である．いずれも，IP の定量的リスク分析を考える上では，結局，金融オプション理論以上に有用な情報を与えているとは言い難い．

これに加え，従来のリアル・オプション理論を IP の定量的リスク分析に適用しようとすると，モデル化されている意思決定構造の限界に遭遇するだろう．従来研究の大半は，概念的分析 (モデルの定性的性質や経済学的解釈の導出) を指向しているため，非常に限定的な仮定下での “toy model” を扱ったものが大半である．すなわち，解析解が得られるような極端に簡略化された問題のみを対象としているため，その理論は，多くの IP で重要となる連鎖的な意思決定構造を明示的に考慮できない．この問題点については，以下の (3) で，より詳しく説明する．

(2)　プロジェクトの経済リスクと不完備市場

IP におけるキャッシュ・フローの確率的変動は，金融・資本市場で取引されている資産価格・経済状態変数と何らかの相関を持つ場合が多い．しかし，その確率変動は，市場でヘッジできない経済リスク要因にも依存するのが普通である．例えば，IP で受け取ることのできるキャッシュ・フロー $P(t)$，および市場取引されているある資産の価格 $S(t)$ が，各々，

$$\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu_P\,\mathrm{d}t + \sigma_{1,1}\,\mathrm{d}W_1(t) + \sigma_{1,2}\,\mathrm{d}W_2(t), \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}S(t)/S(t) = \mu_S\,\mathrm{d}t + \sigma_{2,1}\,\mathrm{d}W_1(t), \qquad (2)$$

ここで，W_1, W_2 は独立な標準 Wiener 過程，と表現できたとしよう．このとき，２つの確率過程は共分散が $\sigma_{1,1}\sigma_{2,1}$ の相関をもつ．しかし，これらは，完全相関しているわけではない ; リスク要因 W_1 に起因する P の確率変動は，市場資産 S との適切な組合わせにより完全にヘッジできるが，リスク要因 W_2 に起因する確率変動まではヘッジできない．すなわち，IP のキャッシュ・フローは，市場ではヘッジできない “不完備市場リスク” に曝されている．従って，完備市場を仮定した金融オプション理論を，IP の評価に，そのまま適用することは妥当ではない．実際，そのようなナイーブな理論の適用 (誤用) は，市場取引されないリスク要因 W_2 を完全に無視するというリスクをとっていることになる．

このような問題意識から，赤松・長江[20]は，IP 等の実物投資事業の価格評価を，“不完備市場” におけるオプション評価問題ととらえた新しいアプローチを提案した．すなわち，事業は，①確率的な “状態変数” の関数として定義されたペイ・オフを持つオプション (条件付請求権) であり，②その状態変数は，市場で取引可能な資産・証券の売買によってヘッジ可能なリスク要因とヘッジ不可能なリスク要因から構成されると考える．そして，オプション評価問題を，市場で観測される資産・証券価格情報と無裁定条件から上記リスク要因の価格 (ひいては，オプション価格) を推定する “逆問題” ととらえる．その上で，この逆問題に，不完備市場リスクの価格を推定するための最小限の仮定を追加したモデルを定式化し，そのメカニズムおよび特性を明らかにした．さらに，長江・赤松[21]では，この枠組みを，権利行使時点も選択可能なオプションへと拡張している (筆者らの研究と関連する従来研究のよりテクニカルなレビューについては，赤松・長江[20]を参照)．第 3 章では，この具体的な内容を紹介し，さらに，これに関連した今後の研究課題を議論する．

(3)　プロジェクト意志決定の不可逆性・柔軟性と連鎖性

IP は，一般に，様々な経済活動状態 (以下，“アクティビティ”) から構成される．そして，事業主体は，(原理的には) 不確実に変動する状況に応じて，これらのアクティビティを切り替えることができる．例えば，不動産施設運用事業において，施設の遊休化および運用再開が可能な場合を考えよう．この場合，施設を運用している状態，および施設を遊休させている状態のそれぞれがアクティビティに相当し，事業主体は，時々刻々変動する施設需要に応じて，需要が低迷した時には運用から遊休へ，その後，需要が回復した時には遊休から運用へとアクティビティを切り替えられる．

このような意思決定は，“アクティビティを切り替えられる権利 (オプション)” の行使と見なすことができる．そして，当該プロジェクトは，こうしたオプションの集合から構成される “複合オプション” と捉えることができる．一般に，これらのオプションの行使は，複雑な相互依存関係をもつ．すなわち，あるオプションの行使によって，新たなオプションの獲得，あるいは既得オプションの喪失が起こる．そのため，個々のオプションの価値を独立に評価することは出来ない．このように，IP の財務的評価や意思決定を適切に実施するには，権利行使の連鎖的構造を明示的に導入した複合リアル・オプション問題の分析手法が必要である．

複合オプション評価法の必要性は，従来，リアル・オプション理論，土木計画分野等においても指摘されており，いくつかの先行研究がある．しかし，それらは，個別的・部分的な拡張であり，任意の連鎖的意思決定構造を扱える一般的な枠組みまでは示されていない．また，より実際的な条件 (e.g., プロジェクト環境・制約の非定常性，一般的なキャッシュ・フロー過程等) を導入したうえでリスクを計量化できる一般的計算法も開発されていない (従来研究に関するよりテクニカル・詳細なレビューについては，長江・赤松[22]を参照)．すなわち，従来の理論は，複雑な連鎖的意思決定構造を持つ実際の社会基盤施設の投資・運用問題を対象とした計量分析に耐えるとは言い難い．

このような従来理論の問題点を受け，赤松・長江[23]，長江・赤松[22] は，任意の連鎖的な権利行使構造をもつ複合リアル・オプション問題をシステマティックに記述・分析し，効率的計算法を見通しよく開発するための枠組を提案した．具体的には，第 1 に，連鎖的意思決定構造をもつプロジェクトを，それを構成するサブ・オプションからなる有向グラフ (以下，“オプション・グラフ”) として表現する枠組を提案し，複合リアル・オプション問題を定式化した．第 2 に，この問題が，時間およびグラフ構造の各々に関して分解できることを明らかにした．これにより，非常に複雑で大規模な問題を，より小規模なサブ問題を逐次的に解く問題に帰着させせられる．第 3 に，そのサブ問題が，一般化相補性問題 (GCP: *Generalized Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにし，効率的な数値解法を開発した．第 4 章では，この具体的な内容を紹介し，さらに，これに関連した今後の研究課題を議論する．

3. 経済リスクを考慮したプロジェクトの財務的価格の動的評価

本章では，赤松・長江[20]および長江・赤松[21]で提案した，IP を不完備市場における資産と見なしてその取引価格を定量的に評価するための方法を解説する．本章は以下のように構成される．まず，(1)〜(3) において，2 時点-離散状態の枠組を用いて，筆者らの研究の基本的考え方を簡単に解説する．ここでの分析は，連続時間-連続状態の枠組へ一般化した上で，オプションの買手がペイ・オフを得る (権利を行使する) タイミングを選択できるモデルへと拡張できる．その詳細および数値計算方法については，筆者らの研究[20),21]を参照されたい．続いて，(4) では，こうした一般的枠組の下での数値計算例を用いて，筆者らの手法と，従来の (“完備” あるいは “完全に不完備” な市場を想定した) 手法との価格評価結果の違いを示す．最後に，(5), (6) では，本手法とよく似た数理構造を持つモデルとして “あいまい性” 回避性向および robust 期待効用モデルに着目した研究を紹介し，本研究との位置付けを明らかにした上で，関連する研究課題を述べる．

(1) 2 時点-離散状態モデル

期首 ($t = 0$) と期末 ($t = T$) の 2 時点を考える．期末で生起する事象の集合を $K \equiv \{1, \cdots, \mathrm{K}\}$ で表現し，各事象の生起確率を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(\mathrm{K})\}$ とする．

資産市場において，1 種類の安全資産 (e.g., 債券) と N 種類の危険資産 (e.g., 証券) が取引されているとする．安全資産の期首価格を 1，期末価格を $R(> 1)$ とする．危険資産のインデクス集合を $N \equiv \{1, \cdots, \mathrm{N}\}$ とし，n 番目危険資産の期首価格を s_n，期末で事象 k が生起したときの価格を $\hat{S}_n(k)$ で，それぞれ表わす．危険資産の期末価格を安全資産価格で正規化したものを $S_n(k) \equiv \hat{S}_n(k)/R$ とする．以下では，これらを

$$\boldsymbol{s} \equiv \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{\mathrm{N}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}(1) & \cdots & \boldsymbol{S}(\mathrm{K}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} S_1(1) & \cdots & S_1(\mathrm{K}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{\mathrm{N}}(1) & \cdots & S_{\mathrm{N}}(\mathrm{K}) \end{bmatrix}$$

とベクトル表記する．

期末において (割引き後の) 収益 $\{F(1), \cdots, F(\mathrm{K})\}$ を発生させる事業 (i.e., 期末収益 $\{F(k)\}$ に対する請求権) を想定し，その事業の期首での市場取引価格 (事業価格) を求める問題を考えよう．

まず，市場に裁定機会は存在しない，すなわち，“元手 0 で正の期待利潤が得られるような投資戦略は存在しない” とする．この条件は無裁定条件と呼ばれ，以下の式を満たす $Q \equiv \{Q(1), \cdots, Q(\mathrm{K})\}, Q(k) > 0, \forall k$ が存在することと等価であることが知られている[3)]．

$$\mathbb{E}^{Q}[\boldsymbol{S}] \equiv \sum_{k \in K} Q(k)\boldsymbol{S}(k) = \boldsymbol{s} \qquad (3)$$

ここで，Q は $\mathcal{P}$ に対する等価マルチンゲール測度 (EMM: *Equivalent Martingale Measure*) と呼ばれ，$\mathbb{E}^{Q}[\cdot]$ は確率測度 Q の下での期待値演算を表す．無裁定条件下では，任意の資産の期首価格は，EMM の下での期末価格の期待値に等しい．これより，無裁定条件を満足するような対象事業の期首価格 (以下，事業価格) は，Q の下での事業収益 $\{F(k)\}$ の期待値 $C = \mathbb{E}^{Q}[F]$ として求められる．従って，事業価格を求める問題は，式 (3) から Q を推定する逆問題に帰着する．

本章が対象とする不完備市場とは，当該事業から発生するキャッシュ・フローを，市場資産の取引で replicate できないことを意味している．すなわち，市場が不完備であるとは，数学的には，独立な市場資産の数 rank($\boldsymbol{S}$) が，期末に起こり得る状態の数 K よりも少ない場合として表現される．このため，不完備市場においては，無裁定条件 (3) のみから EMM Q (ひいては事業価格) を一

意に決めることは不可能である．そこで，事業契約の売手と買手の間の合理的行動—買手は無裁定条件を満足する中で，なるべく安く買おうとし，売手は極力高く売ろうとする—を導入することで，事業価格の上限および下限を求めることを考える．これらは，それぞれ，以下のように定式化される．

$$[\mathrm{P_B}\text{-}0] \quad C_{\mathrm{B}} \equiv \min_{\mathcal{Q}}.\ \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[F], \qquad \text{s.t. (3)}.$$

$$[\mathrm{P_S}\text{-}0] \quad C_{\mathrm{S}} \equiv \max_{\mathcal{Q}}.\ \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[F], \qquad \text{s.t. (3)}.$$

ここで，事業価格の下限 C_{B} および C_{S} を，それぞれ，買手価格および売手価格と呼ぶ．

(2) 主問題：KL 情報量制約付き EMM 推定問題

一般に，無裁定条件のみの下での問題 [$\mathrm{P_B}$], [$\mathrm{P_S}$] は，買手価格 C_{B} あるいは売手価格 C_{S} が発散し得るという問題がある．これは，その最適性条件が特異 (singular) な線形逆問題となり得るからである．本節では，この価格の発散問題を回避するために筆者らが提案した手法[20),21)]の概念的モデルを解説する．具体的には，まず，問題 [$\mathrm{P_B}$-0], [$\mathrm{P_S}$-0] に，客観的確率測度 $\mathcal{P}$ から EMM $\mathcal{Q}$ への KL(*Kullback-Leibler*) 情報量に対する下限制約を追加した問題を定式化する．次に，こうして定式化された問題の最適性条件を導出し，それを利用した事業価格の計算方法を示す．

筆者らの研究では，無裁定条件と KL 情報量制約下での EMM 推定問題をより見通し良く扱うため，確率的割引ファクター (SDF: *Stochastic Discount Factor*) アプローチを採用している．このアプローチは，資産評価モデルの実証的検証の枠組として，Hansen and Jagannathan[24),25)]によって提案されたものである．ここで，SDF とは，Arrow-Debreu 状態価格に対応する確率変数であり，前節の枠組においては以下のように定義される．

$$\Lambda(k) \equiv \mathcal{Q}(k)/\mathcal{P}(k), \quad \forall k \in K.$$

この SDF を用いれば，当該事業の事業収益の，EMM $\mathcal{Q}$ 下での期待値 (i.e. 事業価格) は，以下の式：

$$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[F] \equiv \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda F] = \sum_{k \in K} \mathcal{P}(k)\Lambda(k)F(k) \tag{4}$$

で表される．ここで，$\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[X] \equiv \sum_{k \in K} \mathcal{P}(k)X(k)$ は客観的確率測度 $\mathcal{P}$ の下での期待値演算を表す．また，確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への KL 情報量は，この SDF を用いた以下の式で定義される．

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \equiv -\sum_{k \in K} \mathcal{Q}(k) \ln \frac{\mathcal{Q}(k)}{\mathcal{P}(k)} = -\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda \ln \Lambda]. \tag{5}$$

筆者らのアプローチでは，無裁定原理のみに基づく事業価格最小化問題 [$\mathrm{P_B}$-0] に対して，KL 情報量の下限を追加的に設ける．この問題は，SDF $\{\Lambda(k)\}$ を未知変数とする以下の問題として定式化できる．

$$\min_{\Lambda_{\mathrm{B}}}.\ \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda_{\mathrm{B}} F], \qquad \text{s.t.(3), and } -\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda_{\mathrm{B}} \ln \Lambda_{\mathrm{B}}] \geq \hat{H}.$$

この問題は，問題 [$\mathrm{P_B}$-0] を KL 情報量によって正則化した以下の問題：

$$[\mathrm{P_B}] \quad \min_{\Lambda_{\mathrm{B}}}.\ \mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[\Lambda_{\mathrm{B}} F + \frac{1}{\gamma}\Lambda_{\mathrm{B}} \ln \Lambda_{\mathrm{B}}\right], \qquad \text{s.t.(3)}.$$

と 1 対 1 対応関係にある．すなわち，問題 [$\mathrm{P_B}$] のパラメタ $1/\gamma$ が，KL 情報量の下限制約 $\hat{H}$ に対応した Lagrange 乗数として与えられるならば，上記 2 つの問題は等価である (この関係は，後述するように，KL 情報量の下限 $\hat{H}$ の意味を議論する上で鍵となる)．

問題 [$\mathrm{P_B}$] の最適性条件より，買手にとっての最適 SDF $\{\Lambda^*_{\mathrm{B}}(k)\}$ が従う以下の Logit 式を導出できる．

$$\Lambda^*_{\mathrm{B}}(k) = \frac{\exp[-\gamma\{F(k) - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{S}(k)\}]}{\mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\exp[-\gamma\{F - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{S}\}]]}, \quad \forall k. \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}\times 1}$ は無裁定条件式 (3) に対する Lagrange 乗数である．売手についても同様に，KL 情報量制約付き事業価格最大化問題の最適性条件から，売手にとっての最適 SDF Λ^*_{S} が導出できる．

事業価格の最小値 (買手価格)，最大値 (売手価格) は，各取引主体の最適 SDF を用いた以下の式で計算できる．

$$C_{\mathrm{B}} = \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda^*_{\mathrm{B}} F], \qquad C_{\mathrm{S}} = \mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[\Lambda^*_{\mathrm{S}} F\right]. \tag{7}$$

(3) 双対問題—拡張 super-hedging 問題

買手の SDF(6) を問題 [$\mathrm{P_B}$] の Lagrangian に代入して整理すれば，以下の双対問題が得られる．

$$[\mathrm{D_B}] \quad \max_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}}.\ -\frac{1}{\gamma}\ln \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\exp[-\gamma \mathcal{W}]] + \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{s}$$

$$\text{s.t. } \mathcal{W}(k) \equiv F(k) - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{S}(k), \quad \forall k, \tag{8}$$

問題 [$\mathrm{D_B}$] に対しては，以下のような経済学的解釈を与えられる．まず，買手が期首にポートフォリオ $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}$ を空売りして得た収入 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{s}$ で事業権を購入し，期末に事業収益 $F(k)$ からポートフォリオの買戻費用 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{S}(k)$ を支払うとしよう．このとき，$\mathcal{W}(k) \equiv F(k) - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{S}(k)$ は，買手の期末での富を表す．次に，取引主体が富 x に対して，絶対危険回避度一定 (CARA: *Constant Absolute Risk Aversion*) 型の効用関数 $\mathcal{U}(x) \equiv -\exp[-\gamma x]$ を持つと仮定し，確率的な富 $\{\mathcal{W}(k)\}$ に対する確実性等価 (CE: *Certainty Equivalent*) $\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}$ を $\mathcal{U}(\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}) \equiv \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\mathcal{U}(\mathcal{W})]$ として定義する．これを $\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}$ について解けば，以下の式を得る．

$$\mathcal{W}^{\mathrm{CE}} = -\frac{1}{\gamma}\ln \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\exp[-\gamma \mathcal{W}]]. \tag{9}$$

これより，双対問題 [$\mathrm{D_B}$] は，期首の富 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}{}'\boldsymbol{s}$ と (CE で測った) 期末の富 $\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}$ の和を最大化するようなポートフォリオ問題と解釈できる．

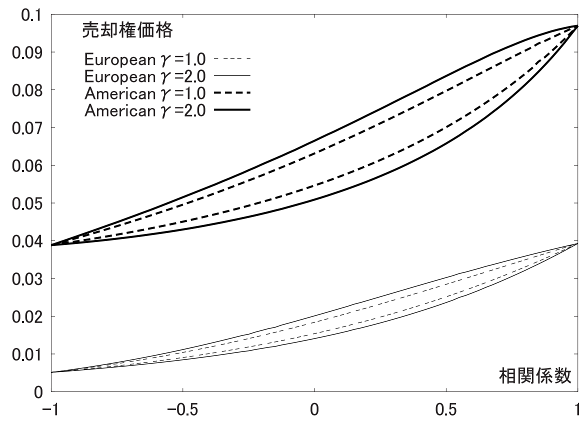
ここで，EMM 推定問題 [P_B] と効用最大化問題 [D_B] の双対関係を確認しておこう．双対問題 [D_B] のポートフォリオ戦略 $\boldsymbol{\theta}_B$ は，主問題 [P_B] の無裁定条件 (3) の Lagrange 乗数である．一方，主問題 [P_B] の SDF (Arrow-Debreu 状態価格) $\{\Lambda_B(k)\}$ は，双対問題 [D_B] の self-financing 条件 (8) の Lagrange 乗数となっている．これより，本手法は，無裁定原理に基づく EMM 推定問題と，効用最大化原理に基づくポートフォリオ選択問題とを双対関係として結びつけたものであると言える．

さらに，前節で述べたように，双対問題 [D_B] における事業取引主体の絶対危険回避度 γ は，主問題 [P_B] の KL 情報量制約の Lagrange 乗数であり，その値は，KL 情報量の下限 $\hat{H}$ と 1 対 1 の関係にあることに注意されたい．このことは，KL 情報量の下限 $\hat{H}$ をパラメタとして与える際に，様々な実証研究で確認されている危険回避度 γ の妥当なオーダーを活用できることを示唆している．

(4)　数値計算例—有料道路事業売却権

前節までで示した主問題と双対問題の関係は，連続時間-連続状態の枠組，および買手が権利行使タイミングを選択できる状況へも一般化できる．そして，筆者らは，この関係を活用することで，オプション価格の具体的な計算方法を開発している[20),21)]．本節では，この解法を用いた数値計算例を示そう．その対象として想定するのは，時々刻々変動する交通量に応じて事業収益が変動するような有料道路事業を，$[0, T]$ の事業期間中にいつでも売却できる権利 (American put option) である．例えば，BOT (Build-Operation-Transfer) 型の有料道路事業契約において，請負者が発注者に事業を売却するタイミングを選択できる場合がこれに該当する．本節では，解の性質をより明らかにするために以下の 2 つの仮定を置く：まず，資産市場において 1 種類の安全資産と，1 種類の “代表的” な危険資産のみが取引されているとする．次に，当該有料道路運用事業の価値[1]の確率的変動と危険資産の価格の確率的変動と相関係数が所与の定数 η で与えられるとする．$\|\eta\| = 1$ の場合は事業価値 (ひいては売却権価格) の変動を市場資産価格で完全にヘッジできる完備市場を意味し，$\eta = 0$ の場合は市場資産取引で事業価値の変動をヘッジすることが全くできない状況を表わす．

図–1 は，横軸に上述の相関係数 η を，縦軸に事業売却権の売手・買手価格をプロットしたものである．図中の 8 本の曲線の内，上側の 4 本の太い実線および点線は売却権の保有者 (買手) が売却タイミングが選択できる場合 (American option) の価格，下側の 4 本の細線はタイミング選択が無い場合 (European option) の価格を表わす．それぞれの場合について，実線は売手・買手のリスク回避度 γ が比較的高い場合で，点線は γ が比較的低い場合を表わす．それぞれの売手・買手価格を表わしている．



図–1 事業価値と資産価格の相関係数と売却権価格

この図より，以下の 2 つのことが判る．第 1 に，完備市場 ($\eta = 1$) を仮定した従来の (金融) オプション評価手法は，市場の不完備性を考慮した本手法に対し，(買手価格，売手価格共に) 過大評価となる傾向にある．これは，従来の手法が不完備市場リスク (i.e., 資産取引でヘッジし切れないリスク) を完全に無視しており，それらが取引主体の危険回避性向を通じて取引価格に及ぼす影響を考慮できていないことを示唆する．第 2 に，相関係数の絶対値 $\|\eta\|$ が小さく危険回避度 γ が大きいほど，売却権の買手価格と売手価格との差が増加する．これは，$\|\eta\|$ が小さいほど不完備市場リスクが大きくなり，γ が大きいほど，この不完備市場リスクに対して各取引主体が “感じる” 費用 (プレミアム) が増加することを反映している．

(5)　あいまい性回避性向と robust 期待効用アプローチ

前節までで示した KL 情報量制約アプローチは，近年，資産評価理論の実証分析の分野で注目されている robust 期待効用アプローチと多くの類似点を持つ．Robust 期待効用アプローチは，Knight 流不確実性 (Knightian uncertainty, あるいは “あいまい性”) 回避性向を明示的に考慮した意志決定・リスク評価問題の扱いやすい表現・分析手法として位置付けられる．本節では Knight 流不確実性回避の枠組および robust 期待効用アプローチを俯瞰し，続く (6) でこれらを採用した最近の研究と筆者らの研究を比較しながら関連する研究課題を述べよう．

本稿における Knight 流不確実性とは，将来の利得が確率的に変動する状況において，将来の事象の生起確率が判らないものを指す．この定義は，Knight[26)]が，確

[1] 本来，この有料道路の価値は，道路料金と交通需要が決定づけるキャッシュ・フロー流列の期待純現在価値として，予め計算しておく必要がある．

率的状況を，生起確率が既知である “リスク” と，生起確率が未知である “(真の) 不確実性” とに分類したことに対応する．

Ellsberg[27)]は，Knight の不確実性を “あいまい性”(ambiguity) と呼び，このような状況下では意志決定主体がリスク回避的だけでなくあいまい性回避的 (ambiguity averse) となることを，“Ellsberg の壷” と呼ばれる以下の心理実験によって示した．

> 2 つの壷 A,B を用意する．被験者には，それぞれに赤玉と白玉が合わせて 100 個入っており，壷 A については赤玉と白玉が各 50 個づつ入っていることを知らせる．ここで，被験者に以下の賭けを提案する．どちらかの壷を選び，そこから無作為に引いた玉が赤なら 1 単位の利得を獲得し，白なら 1 単位の損失を被る．この場合，(主観的確率で考える限りどちらの壷でも期待利得は 0 であるにも関わらず) 殆どの被験者が壷 A を選ぶ．

Ellsberg は，こうしたあいまい性回避性向が，von Neumann and Morgenstern[28)]や Savage[29)]の (単一の) 主観的確率を用いた期待効用理論では，どのような効用関数を仮定しても説明できないことを示している．

Knight 流不確実性 (あいまい性) 下での意志決定問題に対する先鞭は Gilboa および Schmeidler によって付けられた．彼らの貢献は以下の 2 点に要約される．第 1 に，Gilboa[30)]および Schmeidler[31)]は，凸な非加法的確率 (nonadditive probability)[2]と Choquet 積分の概念を用いた期待効用 (CEU: *Choquet Expected Utility*) を導入して Savage[29)]の公理系を弱めることであいまい性回避性向が説明できることを示した．第 2 に，Gilboa and Schmeidler[32)]は，あいまい性回避的な意志決定主体の行動が，以下の通常の加法的確率を用いた maxmin 期待効用 (MMEU: *Maxmin Expected Utility*) 最大化問題：

$$\text{[MMEU]} \quad \max_{\theta}.\min_{Q\subset C}.\,\mathbb{E}^{Q}\left[U(\mathcal{W})\right],\ \text{s.t. (8)}.$$

としても表現できることを示した．ここで，Q は意志決定主体の信念 (prior，あるいは主観的確率測度)，C はその集合 (set of priors) を表わす．[MMEU] は，投資家が将来の確率的収益 $\{\mathcal{W}(k)\}$ を “悲観的” に評価する自らの信念 Q を選び，その信念の下での期待収益を最大化するように投資戦略 θ を決定することを意味している．なお，CEU は適切な信念集合 C の下での MMEU と等価となることが知られている (例えば尾崎[33)]) .

[2] 状態空間 Ω と Ω 上の代数 (algebra) $\mathcal{F}$ からなる可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上を定義する．関数 $\mathcal{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ が以下の 4 つの条件：

$$\mathcal{P}(\emptyset)=0,\quad \mathcal{P}(\Omega)=1$$
$$A\subseteq B\Rightarrow \mathcal{P}(A)\le\mathcal{P}(B),\ \forall A,B\in\mathcal{F}$$
$$\mathcal{P}(A\cup B)+\mathcal{P}(A\cap B)\ge\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)$$

を満たすとき，$\mathcal{P}$ は凸な非加法的確率と呼ばれる．

問題 [MMEU] は，Epstein and Wang[34)]によって多時点の枠組へ拡張され，さらに，Chen and Epstein[35)]によって連続時間-連続状態の枠組へと一般化された．これにより，MMEU アプローチは，概念的・抽象的な枠組での定性的分析に留まらず，現実的なファイナンス理論の枠組における定量的分析へとその適用範囲を広げている．

さて，問題 [MMEU] においてはどのように信念集合 C を決定するかが鍵となる．Hansen and Sargent[36)]や Anderson ら[37)]が提案した Robust 期待効用アプローチ (REU: *Robust Expected Utility*) は，この信念集合を客観的確率測度と，確率測度間の “距離” の概念を用いて定義することで，数理的にも数値的にも取り扱いを容易にした手法と見なせる．このアプローチでは，信念集合を以下のように定義する．

$$C(\mathcal{P},\bar{H})\equiv\{Q|\mathcal{E}(Q,\mathcal{P})\le\bar{E}\}. \tag{10}$$

ここで，$\mathcal{P}$ は，何らかの方法で推計された客観的確率測度である．$\mathcal{E}(Q,\mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ と信念 Q との間の相対エントロピーであり，以下の式で定義される．

$$\mathcal{E}(Q,\mathcal{P})\equiv-\mathcal{H}(Q,\mathcal{P})=\mathbb{E}^{Q}\left[\ln\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\right]=\mathbb{E}^{\mathcal{P}}\left[\Lambda\ln\Lambda\right]. \tag{11}$$

信念集合に式 (10) を採用した [MMEU] は，客観的確率測度と信念との距離 $H(Q,\mathcal{P})$ にパラメタ $1/\xi$ を乗じて目的関数に加えた以下の問題

$$\text{[REU]} \quad \max_{\theta}.\min_{Q}.\,\mathbb{E}^{Q}\left[U(\mathcal{W}(\theta))\right]+\frac{1}{\xi}\mathcal{E}(Q,\mathcal{P}).$$

と 1 対 1 の関係にあることが知られている[38)]．ここで，ξ は，あいまい性回避度 (ambiguity aversion) と呼ばれ，投資家が客観的確率測度 $\mathcal{P}$ およびその根拠となるデータやモデルをどれだけ信用しているか (あるいは客観確率 $\mathcal{P}$ と乖離した信念 Q を持つことへの不効用の大きさ) を表わすパラメタと解釈できる：$\xi\to0$ となるとき，投資家は客観的確率 $\mathcal{P}$ を信念として採用し，$\xi\to\infty$ となるとき，投資家はあり得る確率測度の中で最悪のものを信念として選ぶ．この故，問題 [REU] の枠組みは，Savage[29)]型の単一信念 (single prior) 期待効用モデルを特殊ケースとして含む，一般化された枠組と見なせる．

(6)　本研究との位置付けと今後の研究課題

前節で示したあいまい性回避性向および REU (*Robust Expected Utility*) アプローチについては，近年，意志決定科学の分野のみならず，多くの分野で理論の精緻化および実証的知見の蓄積が盛んに行なわれている．本節では，これらの研究に対する筆者らの研究の位置付けを確認し，関連する今後の研究課題を述べよう．

第 1 に，筆者らが提案した不完備市場での “相対的” IP 価格評価手法に対し，マクロ経済動学の分野では，(代表的消費者均衡概念に基づいた) “絶対的” 価格評価モデル

にあいまい性回避性向の概念を組み込んだモデル (以下, CAPM-A: *CAPM under Ambiguity*) を用い，その含意を分析する研究が盛んに行なわれている[34),35),39),40),41),42)]. これらの研究では，収益が (Knight の意味で) 不確実な資産に対して投資家が要求する “あいまい性プレミアム” によって，資産市場で観測される各種の puzzle— equity premium puzzle, resk-free rate puzzle, etc. — を説明し得ることが示されている．ここで，投資家が REU 最大化原理に従うときのポートフォリオ選択問題 [REU] は，本研究で示した買手の行動 [$\mathrm{P_B}$] に良く似た数理的構造を持つ．事実，問題 [REU] の主観的確率 $\mathcal{Q}^*$ と客観確率 $\mathcal{P}$ 間の Radon-Nikodym 微分 $\Lambda \equiv \mathbb{E}^{\mathcal{P}}[\,\mathrm{d}\mathcal{Q}/\,\mathrm{d}\mathcal{P}]$ は，式 (6) と同様の Logit 式で表わされる．この故，筆者らの提案手法[21),23)] を活用することで，CAPM-A に対する効率的数値解法を開発できるだろう．

ただし，筆者らのモデル [$\mathrm{P_B}$] と CAPM-A とは，数学的性質こそ似ているものの，それぞれの目的および用途が異なる点には注意が必要である．筆者らのモデルは，事業権 (オプション) の売手・買手が，各主体の “ミクロ的” な行動原理に従うときの事業価格の上限・下限を，無裁定原理と取引主体のリスク選好に基づいて求めるものである．一方，CAPM-A は，市場に参入する無数の投資家を代表的個人として “マクロ的” に表現し，その消費・投資行動の均衡状態として (当該事業を含む) 全ての資産価格を一意に決定する．技術的には，CAPM-A には無裁定原理は明示的に考慮されておらず，問題 [REU] で求められる信念と，筆者の手法で求められるリスク中立確率とが一致する保証はない (i.e., 問題 [REU] の解 $\mathcal{Q}$ の下で，任意の資産価格が martingale になるとは限らない)．この点に留意すれば，筆者らのアプローチは，無裁定原理を明示的に考慮した CAPM-A モデルの構築および分析手法の開発といった方向にも活用し得る．

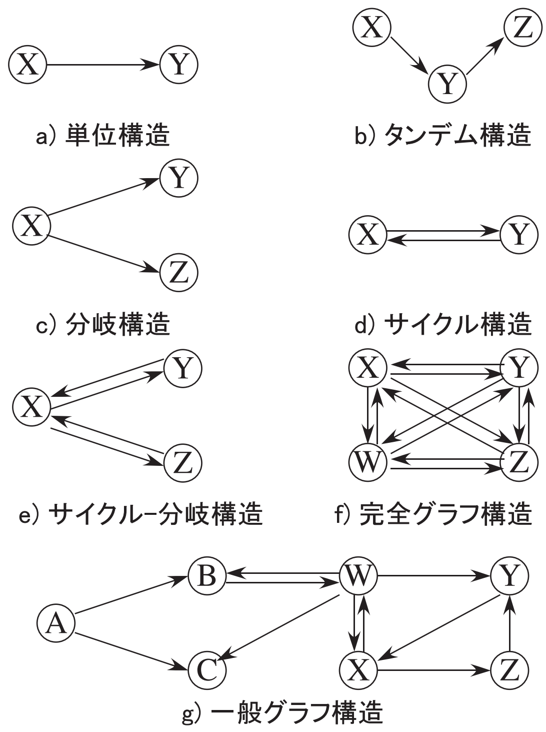
第 2 に，REU および筆者らの KL 情報量アプローチは，IP が直面するリスク管理における好ましいリスク測度の開発にも活用し得る．従来，こうしたリスク測度に関する議論はファイナンス分野において活発に行なわれてきた．特に，金融リスク管理において最も重要な測度の一つとして浸透してきた VaR (*Value at Risk*)[43)]が，整合的なリスク測度 (coherent risk measure) [44),45)]としての要件を満たさないことが明らかにされて以来，新たなリスク測度が数多く提案されている[44),45),46),47),48),49)]. こうしたリスク測度の一つとして，(3) 節で示した確実性等価 (CE: *Certainty Equivalent*) や，それを動学的な枠組へ拡張したもの[47)]が存在する．このことは，筆者らの研究が，リスク測度の開発とその計量方法として活用し得ることを示唆している．

第 3 に，近年，ゲーム理論においても，このあいまい性の概念を導入した研究が進められている．これらの研究の多くは，ゲーム理論の枠組に CEU 原理[50),51),52)] あるいは MMEU 原理[53),54)] を導入し，Nash 均衡の概念を一般化している．こうした “あいまい性ゲーム” と古典的ゲームの枠組の関係は，例えば，Eichberger and Kelsey[55)]などで整理されている．しかし，本稿で解説したような REU 原理をゲーム理論に導入した研究は，筆者らの知る限り存在せず，REU アプローチが持つ数理的な取り扱い易さが，十分に活用されていないように見える．そのため，本稿で紹介した REU の概念を導入したゲームの枠組の構築は，今後の研究課題となり得よう．なお，近年，土木計画分野においては，PFI 事業などの契約問題[56),57)]に対して，ゲーム理論を用いた分析を行なう研究が進められている．こうした方向の研究にも，上述のあいまい性ゲームや，REU ゲームなどの概念は応用できるだろう．

最後に，近年，IP に対して，防災に対する取り組みの必要性，重要性が要請されている．地震や台風などの自然災害は，本質的に，過去の経験やデータ不足から，その発生頻度や被害規模にあいまい性が存在すると考えられる．このような状況下での合理的な (あるいは robust な) 意志決定問題に対して MMEU や REU アプローチを用いることは，ごく自然である．また，あいまい性回避性向の概念は，通常の危険回避性向のみでは説明し切れない災害再保険やキャット・ボンド (catastrophe-linked bond) のプレミアムを説明する理論的枠組として活用できる．そして，筆者らの研究成果は，これらの問題の数理特性の分析や定量的手法の開発に活用できるだろう．

4. オプション・グラフ：複雑な連鎖的構造を持つ投資意思決定問題

本章では，赤松・長江[23)]および長江・赤松[22)]で提案したオプション・グラフ・アプローチを解説する．本章は，以下のように構成される：まず，(1) においてオプション・グラフの基本的考え方を述べる．続く (2)〜(6) では，対象とするオプション構造を限定した上で，モデルの定式化，数理解析，および数値解法について解説する：(2) ではオプション・グラフ問題の定式化を行ない，(3) において，この問題の最適性条件を一般化相補性問題 (GCP: *Generalized Complementarity Problem* として記述する；(4) では，離散的枠組の下で，最適性条件を有限次元 GCP として表現する；(5) では，この有限次元 GCP がより小規模なサブ問題へ分解できることを示し，それを活用した効率的解法の考え方を述べる；(6) ではこの解法を用いた数値計算例を示す．最後に，(7) では，GCP アプローチを用いた他の研究課題を紹介する．



図–2 オプション構造の分類

(1)　オプション・グラフの基本的考え方

筆者らの研究[23),22)]が対象とする複合リアル・オプションは，以下のように定義される：時々刻々確率的に変化する状態 (e.g., 交通量，貨物取扱量，為替，財価格など) に応じてフィードバック的にアクティビティを変更することでキャッシュ・フロー流列をコントロールできる権利．ここで，アクティビティとは，ある特定の経済活動を行っている状態を指す．例えば，最もシンプルなリアル・オプションとして，有料道路事業において，交通需要の増加に応じて 1 度だけ道路容量を拡張できる状況を考えてみよう．この場合，当該事業は,「容量拡張前 (現状，X で記述)」と「容量拡張後 (Y と記述)」という 2 つのアクティビティと，道路を拡張できる (X から Y へアクティビティを変更できる) オプションから構成されると見なせる．管理者 (オプション所有者) は，この拡張にかかる費用 (サンク・コスト) を支払ってオプションを行使することで，より多くの交通需要 (ひいては当該道路からの料金収入) を獲得できる．そして，一度道路を拡張した後は，元の状態に戻す (i.e., アクティビティを Y から X へ変更する) ことはできない．このような一度きりのタイミング選択問題の意志決定構造は，**図–2** a) のように，アクティビティ X, Y に対応する 2 つのノードと，X から Y への有向リンクとして表現できる．以下では，この構造を単位オプション構造と呼ぶ．

一般に，多くのプロジェクト意志決定は，タイミング選択のみならず，様々な柔軟性を持ち，不可逆的なものと可逆的なものが混在している．従来，こうした柔軟性や不可逆性/可逆性を扱うために，様々なリアル・オプションが提案されてきた．これらのリアル・オプションの権利行使構造は，いずれも，上述の単位オプション構造を組み合わせた有向グラフとして表現できる．このオプション構造に着目することで，従来研究が対象としてきた様々なリアル・オプション問題を，以下の 6 つのカテゴリに分類できる．

I) 単位オプション 一度きりの意志決定について，そのタイミングのみが選択できるオプション．意志決定の種類 (e.g., 投資，参入，拡張，縮小，廃棄，撤退) によらず，殆どのリアル・オプションがこのカテゴリに分類される．

II) タンデム型オプション ある意志決定を行なうことで，新たに別のオプションを獲得できるもの．タンデム型オプションの構造は，**図–2** b) のように，複数の単位オプションが直列に連結したグラフとして表現される．このカテゴリに分類されるオプションとして，ファイナンス分野では Geske[58)] の複合オプションが挙げられる．リアル・オプションの分野では，新技術採用オプション[59),60),61)] や多段階オプション (multi-stage option)[62)] などがこのカテゴリに分類される．

III) 分岐型オプション 意志決定を行なう際に，権利行使のタイミングのみならず，変更先のアクティビティを複数の候補の中から選択できるもの．この権利行使は排他かつ不可逆的であり，いずれかの権利が行使されると同時に他のオプションは失われる．分岐型オプションの構造は，**図–2** c) のように，複数の単位オプションが始点アクティビティを共有したグラフとして表現される．このカテゴリに分類されるオプションとしては，Margrabe[63)] の交換オプション，Stulz[64)] の最小/最大値オプションが挙げられる．

IV) サイクル型オプション 一度行使した権利を，別の意志決定を行なうことで再び獲得できる (i.e., 意志決定が可逆的) もの．サイクル型オプションの構造は，**図–2** d) のように，2 つ (以上) の単位オプションからなるサイクル構造として表現される．このカテゴリに分類されるオプションとして，Dixit[65)] や Dixit and Pindyck[66)] の参入・撤退オプションや，一時停止-操業再開オプションなどが挙げられる．

V) 分岐・サイクル複合型オプション III) と IV) の複合型で，その構造は**図–2** e) のように表現される．Dixit and Pindyck[66)] の参入・撤退・一時停止オプションなどがこのカテゴリに分類される．

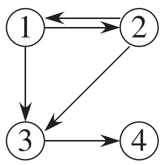
VI) 完全グラフ型オプション 任意のアクティビティ間を切り替え可能 (i.e., あらゆる意志決定が可逆的)

であるもの．このオプションの構造は**図–2** f) のような完全グラフ (全てのノード間にリンクが存在するグラフ) として表現される．このカテゴリに分類されるオプションとして，Kulatilaka[67]が挙げられる．

こうして分類されたオプション問題に対して，筆者らの研究[23),22)] は以下のように位置付けられる．まず，上述のように異なる構造を持つ様々なリアル・オプション問題が，いずれも，一般化相補性問題 (GCP: *Generalized Complementarity Problem*) として統一的に記述できることを明らかにした．これによって，問題ごとに特殊な仮定をおいて個別の分析手法を提案していた従来のリアル・オプション問題に対し，より一般的な状況の下で，首尾一貫した数値計算法を確立した．さらに，オプション構造が，**図–2** g) に示すようなサイクルを含む一般的な有向グラフで表現される "オプション・グラフ" 問題に対して，見通しの良い記述・分析のための枠組を構築した．

(2) 定式化

本節では，オプション・グラフ問題の定式化を，**図–3** のような構造を持つオプションを例として説明しよう．オプション・グラフ・モデルは，以下の 3 つの仮定から構

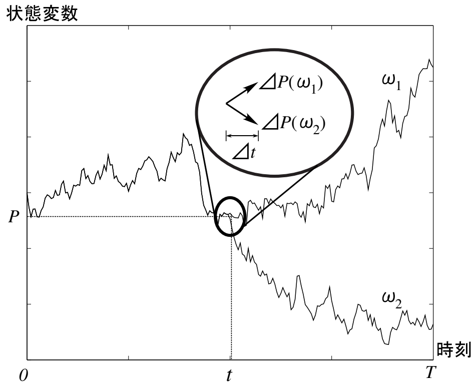


図–3 オプション・グラフ例

成される．第 1 に，事業 (オプション・グラフ) を構成するアクティビティ集合を $N \equiv \{1,2,3,4\}$，それらを切り換えるオプション集合を $L \equiv \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,4)\}$ とする．第 2 に，事業のキャッシュ・フロー流列を変動させる確率的要因 (e.g., 金利，為替，財価格など) を状態変数 $P \in \mathcal{R}$ として集約的に表現し，そのプロセスが**図–4** に示すような確率過程に従うとする．この図は，横軸に時間 t，縦軸に状態変数 $P(t)$ を取り，$[0,t]$ 間の状態変数プロセス $\{P(s)|s \in [0,t]\}$ を共有する 2 つのサンプル・パス ω_1, ω_2 をプロットしたものである．時刻 t において状態変数 $P(t)=P$ が観測されたとき，微小時間 Δt 中の状態変数の変化量 $\Delta P \equiv P(t+\Delta t) - P$ は，以下の (単位時間当りの) 期待値と分散：

$$\begin{aligned} \alpha(t,P,n) &\equiv \mathbb{E}[\Delta P]/\Delta t, \\ \sigma(t,P,n) &\equiv \mathrm{Var}[\Delta P]/\Delta t, \end{aligned} \quad , \quad \forall (t,P,n) \tag{12}$$

を持つ確率変数として表わされる．すなわち，状態変数のプロセスを特定化することは，任意の時刻と状態変数



図–4 状態変数のサンプル・パス

について，その状態変数の期待増分 $\alpha : [0,T]\times\mathcal{R}\times N \to \mathcal{R}$ と，確率的なバラツキの大きさ $\sigma : [0,T]\times\mathcal{R}\times N \to \mathcal{R}_+$ を与えることと等価である．筆者らの枠組では，アクティビティごとに，これらの α や σ が異なるような一般的な状況—— 例えば，(1) に挙げた有料道路拡張事業において，当該路線の日交通量を状態変数 $P(t)$ とする場合,「道路拡張前 (X)」と「道路拡張後 (Y)」の 2 つのアクティビティについて自然に想定される，$\alpha(t,P,X) < \alpha(t,P,Y)$ という状況——を扱える[3]．最後に，事業から発生するキャッシュ・フローは，毎時刻発生する利潤フローと，アクティビティを切り替える瞬間に発生する費用 (サンク・コスト) の 2 種類とする．この内，前者については，時刻 t で発生する単位時間あたりの利潤を，その時に選択されているアクティビティ $n(t)=n$，および状態変数 $P(t)=P$ についての所与の関数 $\pi(t,P,n)$ として定義する．後者については，アクティビティを n から m に切り換えるための費用 (以下，切り替え費用) を，定数 $C_{n,m}$ で与える．

この枠組下で，事業の管理者 (オプション・グラフの保有者) は，期間 $[0,T]$ に当該事業から発生するキャッシュ・フロー流列の期待純現在価値 (ENPV: *Expected Net Present Value*) の総和を最大化するように，アクティビティ戦略 $\{n(t)|t \in [0,T]\}$ を決定する．これは以下のように定式化される：

$$[\mathrm{P}] \quad \max_{\{n(t)|t\in[0,T]\}} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}\left(0,T,\{n(t)\}_{t=0}^{T}\right) \middle| (P_0,n_0) \right]$$

ここで，$\mathcal{J}\left(t,T,\{n(s)\}_{s=t}^{T}\right)$ は，期間 $[t,T]$ にアクティビティ戦略 $\{n(s)|s \in [t,T]\}$ の下で得られるキャッシュ・フロー流列を，所与の割引率 ρ で時刻 t まで割り引いた現在正味価値であり，以下の式で定義される：

$$\mathcal{J}\left(t,T,\{n(s)\}_{s=t}^{T}\right) \equiv \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left\{ \pi(s,P(s),n(s)) - \sum_k \delta_k(s) C(k) \right\} \mathrm{d}s. \tag{13}$$

[3] この点は典型的なリアル・オプション研究 (例えば，Dixit and Pindyck[19)]) にはない特徴である．

$\mathbb{E}[\cdot|(P,n)]$ は，時刻 t に状態変数 $P(t) = P$ が観測された時にアクティビティ$n(t) = n$ が選択されている条件の下での条件付期待演算子である．式 (13) において，$K \equiv \{1, 2, \cdots, \}$ は，アクティビティ変更のインデクスであり，戦略 $\{n(t)\}$ によって決定される．$\delta_k(t)$ は時刻 t に k 番目のアクティビティ変更が行なわれたときにのみ 1，それ以外で 0 となるデルタ関数，$C(k)$ はその時の切り換え費用を表す.

(3)　一般化相補性問題としての最適性条件の表現

本節では問題 [P] の最適性条件が一般化相補性問題 (GCP: *Generalized Complementarity Problem*) として表現できることを示そう．まず，問題 [P] の最適値関数を，

$$V_1(t,P) \equiv \max_{\{n(s)|s\in[t,T]\}} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}\left(t,T,\{n(s)\}_{s=t}^{T}\right)\middle|(P,1)\right],$$
$$\vdots \qquad (14)$$
$$V_4(t,P) \equiv \max_{\{n(s)|s\in[t,T]\}} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}\left(t,T,\{n(s)\}_{s=t}^{T}\right)\middle|(P,4)\right]$$

と定義する．それぞれの最適値関数 $V_n(t,P)$ は，時刻 t においてアクティビティn が選択されている条件の下で，それ以降 $[t,T]$ に発生するキャッシュ・フロー流列の ENPV の最大値を表している．以下では，この $V_n(t,P)$ をアクティビティn の価値と呼ぶ．こうして定義された，それぞれのアクティビティ価値 $V_n(t,P)$ に対して DP (*Dynamic Programming*) 原理を適用することで，任意の状況下での最適戦略を記述できる．

まず，アクティビティ1 が選択されているとき，DP 原理を適用すれば，管理者の意志決定は，以下の 3 つから最も高い価値をもたらすものを離散的に選択する問題に帰着する：①微小時間 Δ だけアクティビティ1 を継続する；②切り換え費用 $C_{1,2}$ を払ってアクティビティを 2 に変更する；③$C_{1,3}$ を支払ってアクティビティを 3 に変更する．これより，アクティビティ1 の価値は，

$$V_1(t,P) = \max.\Big\{\pi(t,P,1)\Delta + e^{-\rho\Delta}\mathbb{E}[V_1(t+\Delta, P+\Delta P)],\; V_2(t,P) - C_{1,2},\quad V_3(t,P) - C_{1,3}\Big\} \qquad (15)$$

を満足する[4]．右辺の最大値演算内の各項は以下のように解釈される：第 1 項はアクティビティ1 を継続した時の価値であり，Δ 間の収入と Δ 後のアクティビティ価値の ENPV の和で表される．第 2，第 3 項はアクティビティを 2 もしくは 3 へ切り換えた時の純価値 (i.e., 変更先の価値から切り換え費用を引いたもの) である．この式の左辺から右辺を引き，$\Delta \to 0$ として整理すれば，HJB (*Hamilton-Jacobi-Bellman*) 方程式：

$$\min.\{F_{1,1}(V_1),\ F_{1,2}(V_1,V_2),\ F_{1,3}(V_1,V_3)\} = 0 \qquad (16)$$

を得る．ただし，時刻と状態変数に関する記述を省略した．ここで，

$$F_{n,n}(V_n) \equiv -\mathcal{L}_n V_n(t,P) - \pi(t,P,n), \qquad \forall n \in N,$$
$$F_{n,m}(V_n,V_m) \equiv V_n(t,P) - V_m(t,P) + C_{n,m}, \quad \forall (n,m) \in L$$

である．$\mathcal{L}_n$ は状態変数プロセスから決定される偏微分演算子で，以下の式で定義される：

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(t,P,n)\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{2}\{\sigma(t,P,n)\}^2\frac{\partial^2}{\partial P^2} - \rho. \qquad (17)$$

ただし，α, σ は，式 (12) で状態変数プロセスを特徴付ける外生的な関数である．

同様に，時刻 t でアクティビティ2 あるいは 3 が選択されている場合の最適性条件は，それぞれ，

$$\min.\{F_{2,2}(V_2),\ F_{2,1}(V_2,V_1),\ F_{2,4}(V_2,V_4)\} = 0, \qquad (18)$$
$$\min.\{F_{3,3}(V_3),\ F_{3,4}(V_3,V_4)\} = 0 \qquad (19)$$

で表される．最後に，アクティビティ4 が選択されている場合は，現在のアクティビティを継続する以外の選択肢が無いため，最適性条件は，以下の線形方程式

$$F_{4,4}(V_4) = 0 \qquad (20)$$

として表される．

時刻 t の各状態 P において，どのアクティビティが選択されているかを事前に決定しておくことはできないため，問題 [P] は，上記 4 つの最適性条件 (16)(18)(19)(20) を，全ての時刻 $t \in [0,T]$ および状態変数 $P \in \mathcal{R}$ について連立させた以下の GCP として表現できる．

[GCP0]　Find $\{\boldsymbol{V}(t,P)|(t,P) \in [0,T] \times \mathcal{R}\}$ such that

$$\begin{cases} \min.\{F_{1,1}(\boldsymbol{V}(t,P)), F_{1,2}(\boldsymbol{V}(t,P)), F_{1,3}(\boldsymbol{V}(t,P))\} = 0, \\ \min.\{F_{2,2}(\boldsymbol{V}(t,P)), F_{2,1}(\boldsymbol{V}(t,P)), F_{2,4}(\boldsymbol{V}(t,P))\} = 0, \\ \min.\{F_{3,3}(\boldsymbol{V}(t,P)), F_{3,4}(\boldsymbol{V}(t,P))\} = 0, \\ F_{4,4}(\boldsymbol{V}(t,P)) = 0, \end{cases}$$
$$\forall (t,P) \in [0,T) \times \mathcal{R},$$

ここで，$\boldsymbol{V}(t,P) \equiv \{V_n(t,P)|n = 1, \cdots, 4\}$ である．本稿では，満期 $t = T$ においてはキャッシュ・フローが発生しないとしているため，問題 [GCP0] の終端条件は以下の式で表される．

$$V_n(T, P(T)) = 0, \quad \forall P(T) \in \mathcal{R},\ \forall n \in N. \qquad (21)$$

(4)　問題の離散的表現

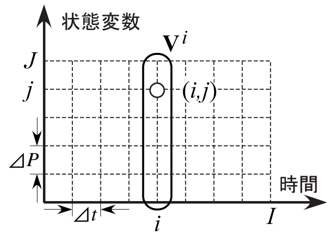
問題 [GCP0] は解析解を持たないため，その数値解を求めるための手法を開発する必要がある．本節では，そのような手法の一つとして，離散的枠組を用いた数値解法を解説する．

まず，時刻 t と状態変数 P を，**図–5** のような $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ 格子上で

$$t \to t^i \equiv i\Delta t, \qquad P \to P^j \equiv j\Delta P \qquad (22)$$

[4] ここでは，数学的な厳密さを犠牲にする代わりに，直感的な理解を得やすい表現を用いた．より詳細な最適性条件の導出は，筆者らの研究[23),22),68)]を参照されたい．

と離散化する．そして，この格子上のアクティビティ価



図–5 時間-状態変数空間上の離散格子

値を $V_n^{i,j} \equiv V_n(t^i, P^j)$ および $\boldsymbol{V}_n^i \equiv \{V_n^{i,j} | j \in 1, \cdots, \mathrm{J}\}$ と離散表現し，最適性条件式 (16) ~ (20) に現われる偏微分演算子を，以下のように離散近似する：

$$\mathcal{L}_n V_n(t^i, P) \approx \boldsymbol{L}_n^i \boldsymbol{V}_n^i + \boldsymbol{M}_n^i \boldsymbol{V}_n^{i+1}, \quad \forall n \in N, \forall i \in I. \tag{23}$$

ここで，$I = \{0, \cdots, \mathrm{I}-1\}$ は時刻についての格子集合である．$\boldsymbol{L}_n^i, \boldsymbol{M}_n^i$ は，J 次元行列で，状態変数プロセスを特徴付ける関数 $\alpha(t, P, n), \sigma(t, Pn)$ から一意に決定される．

このとき，オプション・グラフ問題 [GCP0] は，以下の有限次元 GCP として書き直せる．

[GCP1]　Find $\{\boldsymbol{V}^i | i \in I\}$ such that

$$\begin{cases} \min.\left\{\boldsymbol{F}_{1,1}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}), \boldsymbol{F}_{1,2}(\boldsymbol{V}^i), \boldsymbol{F}_{1,3}(\boldsymbol{V}^i)\right\} = \mathbf{0}, \\ \min.\left\{\boldsymbol{F}_{2,2}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}), \boldsymbol{F}_{2,1}(\boldsymbol{V}^i), \boldsymbol{F}_{2,4}(\boldsymbol{V}^i)\right\} = \mathbf{0}, \\ \min.\left\{\boldsymbol{F}_{3,3}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}), \boldsymbol{F}_{3,4}(\boldsymbol{V}^i)\right\} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{F}_{4,4}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \forall i \in I,$$

ここで，$\boldsymbol{V}^i \equiv \{\boldsymbol{V}_n^i | n \in N\}$ は NJ 次元列ベクトル，

$$\boldsymbol{F}_{n,n}(\cdot) \equiv -\boldsymbol{L}_n^i \boldsymbol{V}_n^i - \boldsymbol{M}_n^i \boldsymbol{V}_n^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_n^i, \quad \forall n \in N, \forall i \in I, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{F}_{n,m}(\cdot) \equiv \boldsymbol{V}_n^i - \boldsymbol{V}_m^i + \mathbf{1}C_{n,m}, \quad \forall (n,m) \in L, \forall i \in L, \tag{25}$$

である．また，$\boldsymbol{\pi}_n^i \equiv \{\pi(t^i, P^j, n) | j = 1, \cdots, \mathrm{J}\}$ なるベクトルであり，$\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 であるような J 次元列ベクトルである．問題 [GCP1] の終端条件は，式 (21) を離散表現した以下の式で表される．

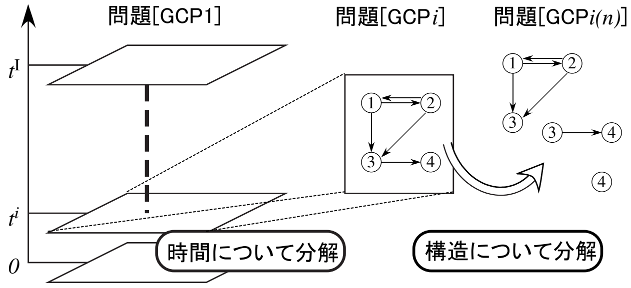
$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

(5)　問題の分解可能性と効率的解法

問題 [GCP1] は，未知変数の次元が非常に大きい (= $N \times \mathrm{I} \times \mathrm{J}$) ため，ナイーブに計算することは極めて非効率的である．そこで，本節では，**図–6** のように，この有限次元 GCP を，異なる 2 つの座標軸— 時間とグラフ構造—について分解しよう．これにより，[GCP1] の解を求めることを，より規模の小さいサブ問題を特定の順序で解くことに帰着させられる．

a)　時間についての分解

式 (24) より，時点 i で成立すべき問題 (以下，[GCP^i] と表記) は，時点 $i+1$ での最適値関数 $\boldsymbol{V}^i$ が判っているならば，$\boldsymbol{V}^i$ のみを未知変数とする独立した問題となる．



図–6 オプション・グラフ問題の分解

つまり，終端条件 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}} = \mathbf{0}$ を与件とすれば，時点 $\mathrm{I}-1$ の問題 [GCP$^{\mathrm{I}-1}$] を解いて $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}-1}$ を求められる．こうして時点を遡りながら $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}-1}, \boldsymbol{V}^{\mathrm{I}-2}, \cdots, \boldsymbol{V}^2, \boldsymbol{V}^1, \boldsymbol{V}^0$ を順に求めることで，全ての時刻における最適値関数 $\{\boldsymbol{V}^i | i \in I\}$ を計算できる．

b)　グラフ構造についての分解

各時点で解くべき問題 [GCP^i] は，さらに，グラフの構造について分解できる．まず，**図–3** のアクティビティ 4 からは他のどのアクティビティにも切り換えられないため，$\boldsymbol{V}_4^i$ は，方程式

$$\boldsymbol{F}_{4,4}(\boldsymbol{V}_4^i, \overline{\boldsymbol{V}}_4^{i+1}) = -\boldsymbol{L}_4^i \boldsymbol{V}_4^i - \boldsymbol{M}_4^i \overline{\boldsymbol{V}}_4^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_4^i = \mathbf{0} \tag{27}$$

の解として，他のアクティビティ価値とは独立に計算できる (ただし，$\boldsymbol{V}_4^{i+1}$ が定数であることを明示するために上線付きで表現した)．次に，アクティビティ 3 からはアクティビティ 4 へのみ切り換え可能であり，その価値 $\boldsymbol{V}_4^i$ は (この時点では) 既知である．このため，アクティビティ 3 の価値 $\boldsymbol{V}_3^i$ のみを未知変数とした以下の GCP:

[GCP^i(3)]　Find $\boldsymbol{V}_3^i$ such that

$$\min.\left\{\boldsymbol{F}_{3,3}(\boldsymbol{V}_3^i, \overline{\boldsymbol{V}}_3^{i+1}),\ \boldsymbol{F}_{3,4}(\boldsymbol{V}_3^i, \overline{\boldsymbol{V}}_4^i)\right\} = \mathbf{0}$$

は，独立に解くことができる．最後に，アクティビティ 1 と 2 の間では (理論上) 何度でもアクティビティを切り換えられる．そのため，これら 2 つのアクティビティ価値 $\boldsymbol{V}_1^i$ は $\boldsymbol{V}_2^i$ は相互に依存し合っており，以下の連立 GCP の解として同時に計算される必要がある．

[GCP^i(1, 2)]　Find $(\boldsymbol{V}_1^i, \boldsymbol{V}_2^i)$ such that

$$\begin{cases} \min.\left\{\boldsymbol{F}_{1,1}(\boldsymbol{V}_1^i, \overline{\boldsymbol{V}}_1^{i+1}), \boldsymbol{F}_{1,2}(\boldsymbol{V}_1^i, \boldsymbol{V}_2^i), \boldsymbol{F}_{1,3}(\boldsymbol{V}_1^i, \overline{\boldsymbol{V}}_3^i)\right\} = \mathbf{0}, \\ \min.\left\{\boldsymbol{F}_{2,2}(\boldsymbol{V}_2^i, \overline{\boldsymbol{V}}_2^{i+1}), \boldsymbol{F}_{2,1}(\boldsymbol{V}_2^i, \boldsymbol{V}_1^i), \boldsymbol{F}_{2,3}(\boldsymbol{V}_2^i, \overline{\boldsymbol{V}}_3^i)\right\} = \mathbf{0} \end{cases}$$

このように，各時点 i において，$\boldsymbol{V}_4^i$，$\boldsymbol{V}_3^i$，および $(\boldsymbol{V}_1^i, \boldsymbol{V}_2^i)$ をこの順番で求めることで，全てのアクティビティの価値を計算できる．上述の各手順で解くべきサブ問題は，いずれも，未知変数の次元が高々J のオーダーでしかない独立した問題であり，後述するように，極めて効率的に解くことができる．また，こうした時間とグラフ構造への分解，およびサブ問題を計算する順序は，任意の構造を持つオプション・グラフに一般化できる．その詳細については，長江・赤松[22]を参照されたい．

オプション・グラフ問題 [GCP1] を分解して得られるサブ問題 [GCP^i(3)] および [GCP^i(1,2)] のような有限次元 GCP に対しては，数理計画分野において，その解法に関する研究が蓄積されている[69),70),71),72),73),74),75),76)]．筆者らは，これらの知見の内，平滑化関数 (smoothing function[77)]) アプローチの一種として提案された Peng and Lin[75)]のアルゴリズムを用いた解法を開発した．そして，このアルゴリズムが，最新の研究成果であるのみならず，サブ問題の数理的特性を活用することで，極めて効率的に解を求められることを明らかにしている．その詳細については，Nagae and Akamatsu[68)]を参照されたい．

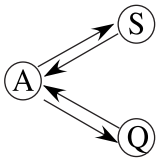
(6) 数値計算例

本節では，提案手法の判りやすい数値計算例を示す．その対象として想定する複合オプションは，不確実に変動する施設需要に応じて，当該施設の遊休化もしくは解体が可能な不動産施設運用事業である．以下では，まず，この事業について想定する状況を示し，前節の解法で求めたオプション価値および最適戦略を示す．

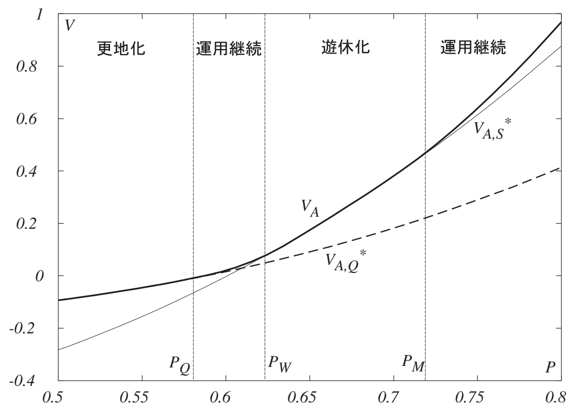
a) 想定する状況とオプション構造

本節で対象とする不動産事業は，以下の 3 つのアクティビティから構成されるとする：まず，施設の賃貸が行われている施設運用アクティビティ(A)；次に，施設が遊休化され，運用再開に備えて維持管理のみが行われている施設遊休アクティビティ(S)；最後に，施設が解体され，一切のキャシュ・フローが発生しない更地アクティビティ(Q)．このプロジェクトの意思決定構造を，**図–7** に示す有向グラフで表現する．すなわち，施設運用アクティビティからは，施設遊休もしくは更地のいずれかに切り換えられるとし，施設遊休および更地アクティビティからは，施設運用にのみ変更可能であるとする．

事業主体は時々刻々変動する施設需要 $P(t)$ に応じてこれらのアクティビティを変更するものとする．以下では，各アクティビティから発生するキャッシュ・フローについて述べる．まず，施設運用状態 (A) からは，毎時刻，施設需要に応じた $\pi_\mathrm{A}(t,P)$ だけの利潤フローが発生する．次に，施設遊休状態 (S) からは，賃貸は行われず，運用再開に備えた遊休施設の維持費用のみが発生する．最後に，更地状態 (Q) からは，一切の利潤フローが発生しないとする．



図–7 施設運用・施設遊休・更地のオプション・グラフ



図–8 初期施設需要 P_0 と施設運用アクティビティ A の価値

本節では，判りやすい数値計算例を示すため，上述の枠組に加え，以下の仮定をおく．まず，いかなるアクティビティにおいても，施設需要 $P(t)$ の確率的変動が以下の P のみの関数として特徴付けられるとする[5]．

$$\alpha(t,P,n)=\alpha P,\quad \sigma(t,P,n)=\sigma P,\quad \forall t\in[0,T],\forall n\in N.$$

ここで，α,σ は所与の定数である．次に，施設運用状態 A および施設遊休状態 S から発生するキャッシュ・フローが，それぞれ，以下の式で表されるとする．

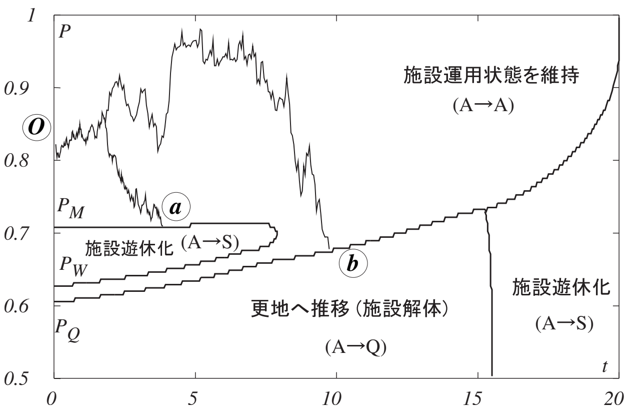
$$\pi_\mathrm{A}(t,P)=P-E,\qquad \pi_\mathrm{S}(t,P)=-M. \tag{28}$$

ここで，E,M は，いずれも所与の定数であり，それぞれ，施設運用に毎時刻必要な管理費用，および施設遊休中の単位時間あたりの維持費用を表す．

このような状況を想定した上で，数値計算を行なった結果を示そう．まず，**図–8** は，初期時刻 $t=0$ における施設運用状態 A の価値を，当該時刻での施設需要 $P(0)=P_0$ の関数としてプロットしたものである．**図–8** において，太い実線 V_A は施設運用アクティビティの価値を表し，細い実線 $V^*_\mathrm{A,S}\equiv V_\mathrm{S}-C_\mathrm{A,S}$ および点線 $V^*_\mathrm{A,Q}\equiv V_\mathrm{Q}-C_\mathrm{A,Q}$ は，それぞれ，施設遊休状態および更地状態へ切り換えたときの純価値 (i.e. 変更先の価値から切り換え費用を引いたもの) を表す．この図において，施設運用アクティビティの価値 V_A は，各変更先の純価値の包絡線と同じかそれよりも上側を通る曲線として表される．そして，V_A が $V^*_\mathrm{A,S}$ と一致している範囲 $[P_\mathrm{W},P_\mathrm{M}]$ では施設遊休化が，V_A が $V^*_\mathrm{A,Q}$ に一致している範囲 $[0,P_\mathrm{Q}]$ では施設の解体 (更地状態への変更) が行われることを意味している．また，これらの境界において，各アクティビティの価値が smooth pasting 条件および value matching 条件[19)]を満たしていることが判る．

ここで，**図–8** の範囲 $[P_\mathrm{Q},P_\mathrm{W}]$ においては，意思決定を遅延することのオプション価値 V_A が，アクティビ

[5] これは，$P(t)$ が幾何 Brown 運動に従うことを意味している



図–9 施設運用アクティビティA での最適戦略

ティ変更により得られる純価値 $V^*_{\mathrm{A,S}}, V^*_{\mathrm{A,Q}}$ よりも大きい．すなわち，$P < E$ ゆえ負の利潤が発生するにも関わらず，施設の運用が継続される．このことは，事業主体が，$[P_{\mathrm{Q}}, P_{\mathrm{W}}]$ において以下の行動をとることを意味している：たとえ一時的に利潤が負となっても，今後の需要の変化に備えて当該施設の遊休化および解体のいずれが有利となるかが判明するまで待つことを選ぶ．このような行動は，無限満期モデルを用いた従来型の分析では導かれない．

次に，**図–9** に，運用アクティビティA が選択されている場合の最適なアクティビティ選択ルールを示す．この図は横軸に時刻 t を，縦軸に施設需要 P を取り，任意の時刻と施設需要の組み合わせ $(t, P) \in [0, T] \times \mathcal{R}$ について，3 つの戦略—A → A(現在のアクティビティを継続)，A → S(施設を遊休化) および A → Q(更地へ変更)— いずれが最適となるかを示している．例えば，点ⓞから点ⓐへと施設需要が変化した場合の最適戦略は以下のように導出される：まず，点ⓞでの最適推移戦略は A → A であるため，施設の運用が継続される．そして，施設需要が点ⓐまで落ち込み，最適推移戦略が A → S に切り替わると同時に施設は遊休化される．一方，施設需要が点ⓞから点ⓑへの過程を辿った場合，需要がⓑに到達した時点で施設は解体され，更地へと変更される．

(7) 本手法の活用例

筆者らの提案した一般化相補性問題アプローチは，本稿で示したもの以外にも，施設管理，都市計画，交通計画などの様々な分野に適用できる．第 1 に，施設管理の分野へ適用する場合の対象として，例えば，小林らが提唱しているような，ファイナンス工学的アプローチを用いた施設の維持・補修問題やライフ・サイクル・コスト管理問題[78),79),80),81)]が挙げられる．これらの問題は，施設の劣化の度合いを状態変数とし，各瞬間におけるフィードバック的な意志決定を，「微小時間 Δ だけ補修を行なわない」と「補修を行なう」との択一的選択に帰着させることで，その最適性条件を GCP として記述できる．さらに，本文では述べなかったが，筆者らの提案手法は，(理論的には) 任意の数の状態変数を取り扱えるため，個別の劣化特性を持つ複数の施設の補修問題などへ適用することもできるだろう．

第 2 に，都市計画分野への適用例の一つとして，土地の用途規制が不動産価格に与える影響分析が考えられる．(6) 節で示したように，不動産は，経済環境に応じて，フィードバック的に運用形態を選択でき，その選択に柔軟性と不可逆性が存在するオプション・グラフと見なせる．そして，規制による用途の限定は，これらの不動産のオプション構造を変化させ，しばしば，不動産価格の下落を伴う．そのため，地権者間の合意を適切に得るには，こうした不動産価格への影響を定量的かつ詳細に分析する必要がある．このような研究課題にも，筆者らの提案手法は適用可能である．

最後に，GCP アプローチを交通計画分野へ応用する場合の対象例の一つとして，高速道路ランプ流入制御問題[82),83)]が挙げられる．例えば，高速道路と一般道路からなるネットワークを考え，ネットワーク全体への交通需要が，一日の内でピークを持って確率的に変動するとする．ここで，交通需要に応じてフィードバック的に高速道路への流入量を制御するネットワーク効率性最大化問題を考える．この問題の最適性条件もまた GCP として記述できる[82),83)]ため，その効率的数値解法の開発などにも，筆者らの研究成果は応用可能である．

5. おわりに

本稿では，IP が直面するリスクの計量・管理問題に対するファイナンス工学的アプローチの適用可能性を示した．そのために，従来の (金融・リアル) オプション理論の特徴と限界を俯瞰した．そして，IP 固有の重要な特徴—“不完備市場リスク” および “連鎖的な意志決定構造”— を明示的に考慮した枠組へとオプション理論を一般化した筆者らの研究[20),21),23),22),68)]を紹介した．

まず，赤松・長江[20)]，長江・赤松[21)]は，IP が直面する不完備市場リスクを明示的に考慮した上で，その動学的財務的価格を行なった．前者は，オプション評価理論の基礎となる無裁定条件とミクロ経済学の基礎となる効用最大化理論を結び付け，不完備市場リスクの価格を推定するための最小限の仮定を追加したモデルを定式化している．後者は，この枠組を，権利行使のタイミング選択も可能なオプションへと拡張し，IP の買手と売手の非対称な行動を明示的に考慮したプロジェクト評価手法を開発している．

次に，赤松・長江[23)]および長江・赤松[22)]では，IP に対

する意志決定の不可逆性，柔軟性および連鎖性を考慮したプロジェクト評価および意志決定を行なった．この内，赤松・長江[23]では，従来，個々の問題ごとに個別の分析手法が乱立していたリアル・オプション問題の数学的構造に着目し，異なる問題を首尾一貫して評価する手法を開発している．ここで提案された枠組は，長江・赤松[22]において一般化され，これまでのアプローチでは取り扱えなかった "オプション・グラフ" 問題を見通し良く記述・分析することを可能にした．

上述の研究は，いずれも，現実の IP の定量的な財務的評価および意志決定に要求される 3 つの自然な要件：①連続時間-連続状態の枠組の下で現実的な仮定をおいたモデルを扱える；②異なるプロジェクトに対しても首尾一貫した記述・分析が行なえる見通しの良い枠組である；③具体的に必要な計算が効率的に行なえる；を満たす手法の構築を目指したものである．

筆者らの手法を現実のプロジェクトに適用するには，状態変数 (e.g., 交通量，取扱貨物量，財価格，為替) が従う確率過程を，個々の問題ごとに特定化する必要がある．そして，そのためには，状態変数に関する動学的データの収集および分析が必要不可欠である．こうしたデータは，実は，従来から観測は可能であったように思われる．また，近年の情報技術の進展により，これまで不可能と思われていた高頻度・高精度なデータの観測・収集 (e.g., 無線 IC タグを利用した施設の劣化状態の観測や，移動体通信機器を用いた交通利用者の動態把握など) も可能となりつつある．しかし，IP が直面するリスクの計量・管理といった視点では，こうしたデータの収集・整理が網羅的・体系的ではなく，その方法論やプロトコルも確立しているとは言い難い．そして，その要因の一つとして，費用便益分析などの従来理論の多くが静学的枠組をベースに構築されており，"動学的データを収集しても使い道がない" 状況であったことが挙げられよう．筆者らの研究は，動学的データの観測・分析を前提とした，見通しの良い理論的枠組を提案するものであり，こうした状況の改善を助けるものと考えらえる．

このような "理論モデルの構築" と "実証的検証" という研究の両輪と，それを結びつける "データの観測・蓄積・分析技術" の有機的な連係は，高度な理論体系の発展を支える重要なファクターである．それが顕著な分野の一つが，本稿がベースとするファイナンス理論である．この分野では，ある優れた理論モデルが構築されると，その実証的妥当性に関して緻密な検証が行なわれる．そして，そのモデルではどうしても説明できない "puzzle" や "paradox" が発見されることで，さらなる理論の一般化・高度化が試みられる．こうした "理論体系の life cycle" と，そこに従事する研究者の真摯な切磋琢磨の姿勢によって，これらの分野では，現在も，日進月歩の理論・技術進展が実現されている．

このような理論・観測・実証の有機的連係は，従来，土木計画分野においても重視されてきており，費用便益理論や交通ネットワーク均衡理論などの発展を支えてきた．本稿は，こうした有機的連係を動学的枠組へと拡張する試みの一つである．そして，この有機的連係が土木計画分野における "dynamic" な理論進展をもたらす際に，筆者らの研究が貢献できれば幸いである．

謝辞

本稿を執筆するにあたり，多くの方々との議論の中で，貴重な意見・助言を戴いた．特に，東北大学大学院 森杉壽芳教授，稲村肇教授，佐々木公明教授，京都大学大学院 小林潔司教授，京都大学防災研究所 多々納裕一教授，神戸大学大学院 朝倉康夫教授，愛媛大学 羽藤英二助教授には，有益な示唆を多く戴いた．ここに記して感謝する．

付録　ファイナンス (資産価格・オプション評価) 理論に関する教科書・専門書

本稿では，筆者らの研究[20),21),23),22),68)]がベースとする (金融・リアル) オプション理論や，それを含む資産価格評価理論については，あえて解説を省いた．その理由は，これらの理論の体系的内容に関しては，様々なレベル・観点で書かれた良質なテキストが無数に存在するため，限られた紙面上で無理に説明するよりも，読者自身でこうしたテキストに目を通していただく方が効率的だからである．以下では，そのために特に有益と思われるテキストを，トピックごとに紹介しておく．

(1)　リアル・オプション理論

- Dixit, A.: *The Art of Smooth Pasting*, Vol. 55 of *Fundamentals of Pure and Applied Economics*, Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland, 1993.
- Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- Schwartz, E. S. and Trigeorgis, L. eds.: *Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, 2001.
- Trigeorgis, L.: *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, MIT Press, Cambridge, 1996.
- Miranda, M. J. and Fackler, P. L.: *Applied Computational Economics and Finance*, MIT press, 2004.
- Grenadier, S.: *Game Choices: the Intersection of Real Options and Game Theory*, Risk books, 2000.
- Brennan, M. J. and Trigeorgis, L.: *Project Flexibility, Agency and Competition: New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Oxford University Press, 2000.

(2) 金融オプション理論 (入門〜中級)

- Cox, J. C. and Rubinstein, M.: *Option Markets*, Princeton-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Princeton-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- Jarrow, R. A.: *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, McGraw-Hill, 1996.
- Grandville, O.: *Bond Pricing and Portfolio Analysis: Protecting Investors in the Long Run*, MIT Press, 2001.
- Wilmott, P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2000.
- Neftci, S. N.: *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic press, 1996.
- Neftci, S. N.: *Principles of Financial Engineering*, Academic press, 2004.
- Baxter, M. and Rennie, A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, 1996.
- Nielsen, L. T.: *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford University Press, 1999.
- Joshi, M. S.: *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Cambridge University Press, 2004.
- Bhansali, V.: *Pricing and Managing Exotic and Hybrid Options*, McGraw-Hill, 1998.
- Schönbucher, P. J.: *Credit Derivatives Pricing Models: Model, Pricing and Implementation*, John Wiley & Sons, 2003.
- Björk, T.: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 1998.

(3) 数理ファイナンス (上級)

- Föllmer, H. and Schied, A.: *Stochastic Finance: an Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, 2002.
- Shiryaev, A. N.: *Essentials of Stochastic Finance : Facts, Models, Theory,*, World Scientific Publishing Company, 1999.
- Dempster, M. A. H. and Pliska, S. R. eds.: *Mathematics of Derivative Securities*, Cambridge University Press, 1997.
- Davis, M. H., Duffie, D., Fleming, W. H. and Shreve, S. E. eds.: *Mathematical Finance*, Springer-Verlag, 1995.
- Karatzas, I. and Shreve, S. E.: *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.

(4) 資産価格理論を中心とするファイナンス理論全般

a) 入門-中級

- Luenberger, D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, NY, 1998.
- Ho, T. S. Y., Lee, S. B. and Yi, S.-B.: *The Oxford Guide to Financial Modeling: Applications for Capital Markets, Corporate Finance, Risk Management and Financial Institutions*, Oxford University Press, 2004.
- Ross, S. A., Westerfield, R. W. and Jaffe, J.: *Corporate Finance*, McGraw-Hill/Irwin, 1998.

b) ハンドブック

- Constantinides, G. M., Harris, M. and Stulz, R. M. eds.: *Financial Markets and Asset Pricing*, Vol. 1B of *Handbook of the Economics of Finance*, North-Holland, 2003.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C.: *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.
- Jarrow, R. A., Maksimovic, V. and Ziemba, W. T. eds.: *Finance*, Vol. 9 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, North-Holland, 1995.

(5) 動的ポートフォリオ理論〜金融資産価格理論

a) 離散時間 (入門〜中級)

- Pliska, S. R.: *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell, 1997.
- Cerny, A.: *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets*, Princeton University Press, 2003.
- Huang, C.-F. and Litzenberger, R. H.: *Foundations for Financial Economics*, North-Holland, 1988.

b) 連続時間 (上級)

- Korn, R. and Korn, E.: *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics*, American Mathematical Society, 2001.
- Merton, R. C.: *Continuous Time Finance*, Blackwell, 1990.
- Ingersoll, J. E. Jr.: *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield, 1987.
- Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- Cochrane, J. H.: *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001.

(6) 資産価格理論の一般均衡論的基礎

- Danthine, J.-P. and Donaldson, J. B.: *Intermediate Financial Theory*, Academic Press, 2001.
- Eichberger, J. and Harper, I. R.: *Financial Economics*, Oxford University Press, 1997.
- Milne, F.: *Finance Theory and Asset Pricing*, Oxford University Press, 2003.
- Gollier, C.: *The Economics of Risk and Time*, MIT Press, 2001.
- Bossaerts, P.: *The Paradox of Asset Pricing*, Princeton University Press, 2002.
- Ross, S. A.: *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, 2005.
- LeRoy, S. F. and Werner, J.: *Principles of Financial Eonomics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- Magill, M. and Quinzii, M.: *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, 1996.
- Hens, T. and Pilgrim, B.: *General Equilibrium Foundations of Finance: Structure of Incomplete Markets Models*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

(7) 金融リスク管理・その他

- Szegö, G. ed.: *Risk Measures for the 21st Century*, John Wiley & Sons, 2004.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W.: *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, 2004.

参考文献

1) Black, F. and Sholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–659, 1973.
2) Merton, R. C.: The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141–183, 1973.
3) Harrison, J. M. and Kreps, D.: Martingale and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, pp. 381–408, 1979.
4) Harrison, J. M. and Pliska, S. R.: Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process and Their Applications*, Vol. 11, pp. 215–260, 1981.
5) Heath, D., Jarrow, R. A. and Morton, A.: Bond pricing and

the term structure of interest rates: A discrete time approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 4, pp. 419–440, 1990.
6) Heath, D., Jarrow, R. A. and Morton, A.: Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77–106, 1992.
7) Sharpe, W.: Capital asset prices; a theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, pp. 425–442, 1964.
8) Lintner, J.: The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, pp. 13–37, 1965.
9) Mossin, J.: Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica*, Vol. 35, pp. 768–783, 1966.
10) Merton, R. C.: An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, Vol. 41, pp. 867–887, 1973.
11) Breeden, D. T.: An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, pp. 265–296, 1979.
12) Mehra, R. and Prescott, E.: The equity premium puzzle, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, pp. 145–161, 1985.
13) Weil, P.: The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 24, No. 2, pp. 401–421, 1989.
14) Brennan, M. J. and Schwartz, E. S.: Evaluating natural resource investments, *Journal of Business*, Vol. 58, No. 2, pp. 135–157, 1985.
15) McDonald, R. and Siegel, D.: Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down, *International Economic Review*, Vol. 26, No. 2, pp. 331–349, 1985.
16) McDonald, R. and Siegel, D.: The value of waiting to invest, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 101, No. 4, pp. 707–727, 1986.
17) Henry, C.: Investment decisions under uncertainty: The irreversibility effect, *American Economic Review*, Vol. 64, pp. 1006–1012, 1974.
18) Arrow, K. J. and Fisher, A. C.: Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 88, pp. 312–319, 1974.
19) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
20) 赤松隆, 長江剛志：経済リスクを考慮した社会基盤投資プロジェクトの動学的財務評価, 土木学会論文集, No. 751/IV-62, pp. 39–54, 2004.
21) 長江剛志, 赤松隆：不完備市場リスク要因を考慮したリアル・オプション評価, 応用地域学研究, Vol. 8, No. 2, pp. 81–93, 2003.
22) 長江剛志, 赤松隆：連鎖的な意思決定構造を持つプロジェクトの動学的評価法：オプション・グラフ・モデルとその解法, 土木学会論文集, No. 772/IV-65, pp. 185–202, 2004.
23) 赤松隆, 長江剛志：不確実性下での社会基盤投資・運用問題に対する変分不等式アプローチ, 土木学会論文集, No. 765/IV-64, pp. 155–171, 2004.
24) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Implications of security market data for models of dynamic economies, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, pp. 225–262, 1991.
25) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Assessing specification errors in stochastic discount factor models, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 2, 1997.
26) Knight, F. H.: *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton, Mifflin, Boston, 1921.
27) Ellsberg, D.: Risk, ambiguity, and the savage axioms, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, pp. 643–669, 1961.
28) von Neumann, J. and Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1947.
29) Savage, L. J.: *The Foundations of Statistics*, John Wiley, New York, 1954.
30) Gilboa, I.: Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 16, pp. 65–88, 1987.
31) Schmeidler, D.: Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, Vol. 57, pp. 571–587, 1989.
32) Gilboa, I. and Schmeidler, D.: Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 18, pp. 141–153, 1989.
33) 尾崎裕之：ナイト流不確実性と均衡価格の不決定性, 西村和雄, 福田慎一（編）, 非線形均衡動学, 第 11 章, 東京大学出版会, 2004.
34) Epstein, L. G. and Wang, T.: Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty, *Econometrica*, Vol. 62, No. 3, pp. 283–322, 1994.
35) Chen, Z. and Epstein, L. G.: Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time, *Econometrica*, Vol. 70, No. 4, pp. 1403–1443, 2002.
36) Hansen, L. P. and Sargent, T. J.: Discounted linear exponential quadratic Gaussian control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, pp. 968–971, 1995.
37) Anderson, E. W., Hansen, L. P. and Sargent, T. J.: A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection, *Journal of the European Economic Association*, Vol. 1, No. 1, pp. 68–123, 2003.
38) Hansen, L. P. and Sargent, T. J.: Robust control and model uncertainty, *American Economic Review*, Vol. 91, pp. 60–66, 2001.
39) Epstein, L. G. and Miao, J.: A two-person dynamic equilibrium under ambiguity, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 27, pp. 1253–1288, 2003.
40) Maenhout, P. J.: Robust portfolio rules and asset pricing, *The Review of Financial Studies*, Vol. 17, No. 4, pp. 951–983, 2004.
41) Uppal, R. and Wang, T.: Model misspecification and underdiversification, *The Journal of Finance*, Vol. 58, No. 6, pp. 2465–2486, 2003.
42) Liu, J., Pan, J. and Wang, T.: An equilibrium model of rare-event premia and its implication for option smirks, *The Review of Financial Studies*, Vol. 18, No. 1, pp. 131–164, 2005.
43) Duffie, D. and Pang, J.: An overview of value at risk, *The Journal of Derivatives*, Vol. 4, pp. 7–49, 1997.
44) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D.: Thinking coherently, *Risk*, Vol. 10, pp. 68–71, 1997.
45) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D.: Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203–228, 1999.
46) Delbaen, F.: Coherent measures of risk on general probability spaces, in Sandmann, K. and Schönbucher, eds., *Advances in Finance and Stochastics*, pp. 1–37, Springer-Verlag, New York, 2002.
47) Frittelli, M. and Rosazza Gianin, E.: Dynamic convex risk measures, in Szegö, G. ed., *Risk Measures for the 21st Century*, chapter 12, pp. 227–248, John Wiley & Sons, 2004.
48) Rockafellar, R. T. and Uryasev, S.: Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26, No. 7, pp. 1443–1471, 2002.
49) Föllmer, H. and Schied, A.: Robust preferences and convex measures of risk, in Sandmann, K. and Schönbucher, eds., *Advances in Finance and Stochastics*, pp. 39–56, Springer-Verlag, New York, 2002.

50) Dow, J. and Werlang, S. R. d. C.: Nash equilibrium under Knightian uncertainty: Breaking down backwad induction, *The Journal of Economic Theory*, Vol. 64, pp. 305–324, 1994.
51) Marinacci, M.: Ambiguous games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 31, pp. 191–219, 2000.
52) Haller, H.: Non-additive beliefs in solvable games, *Theory and Decision*, Vol. 49, pp. 313–338, 2000.
53) Klibanof, P.: Uncertainty, decision, and normal form games, working paper, Northwestern University, 1996.
54) Lo, K. C.: Equilibrium in beliefs under uncertainty, *The Journal of Economic Theory*, Vol. 71, pp. 443–484, 1996.
55) Eichberger, J. and Kelsey, D.: Non-additive beliefs and strategic equilibria, *Games and Economic Behavior*, Vol. 30, pp. 183–215, 2000.
56) 大西正光, 坂東弘, 小林潔司：Pfi 事業におけるリスク分担ルール, 都市計画学会論文集, No. 38, pp. 289–2, 2003.
57) 大西正光, 坂東弘, 小林潔司：Pfi 事業のための事業再生手続き, 建設マネジメント研究論文集, Vol. 11, pp. 181–192, 2004.
58) Geske, R.: The valuation of compound options, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1235–1256, 1979.
59) Grenadier, S. and Weiss, A.: Investment in technological innovations: An option pricing approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 44, pp. 397–416, 1997.
60) Farzin, Y. H., Huisman, K. J. M. and Kort, P. M.: Optimal timing of technology adoption, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 22, pp. 779–799, 1998.
61) Doraszelski, U.: The net present value method versus the option value of waiting: A note on Farzin, Huisman and Kort(1998), *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 25, pp. 1109–1115, 2001.
62) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment under Uncertainty*, chapter 10, Princeton University Press, 1994.
63) Margrabe, W.: The value of an option to exchange one asset for another, *The Journal of Finance*, Vol. 33, No. 1, pp. 177–186, 1978.
64) Stulz, R. M.: Options on the minimum or the maximum of two risky assets, *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, No. 2, pp. 161–185, 1982.
65) Dixit, A. K.: Investment and hysteresis, *Journal of Economic Perspective*, Vol. 6, pp. 107–132, 1992.
66) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment under Uncertainty*, chapter 7, Princeton University Press, 1994.
67) Kulatilaka, N.: The value of flexibility: A general model of real options, in Trigeorgis, L. ed., *Real Options in Capital Investment*, Praeger, 1995.
68) Nagae, T. and Akamatsu, T.: A generalized complementarity approach to solving real option problems, 2005, submitted to Journal of Economic Dynamics & Control.
69) Cottle, R. W. and Dantzig, G. B.: A generalization of the linear complementarity problem, *Journal of Combinatorial Theory*, Vol. 8, pp. 79–90, 1970.
70) Ferris, M. C. and Pang, J.-S.: Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 669–713, 1997.
71) Jiang, H., Fukushima, M., Qi, L. and Sun, D.: A trust region method for solving generalized complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 8, No. 1, pp. 140–157, 1998.
72) Peng, J.-M.: A smoothing function and its applications, in Fukushima, M. and Qi, L. eds., *Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, pp. 293–316, Kluwer Academic Publishers, 1999.
73) Qi, H.-D. and Liao, L.-Z.: A smoothing Newton method for extended vertical linear complementarity problem, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 21, No. 1, pp. 45–66, 1999.
74) Qi, H.-D., Liao, L.-Z. and Lin, Z.-H.: Regularized smoothing approximations to vertical nonlinear complementarity problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 230, pp. 261–276, 1999.
75) Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533–563, 1999.
76) Qi, H.-D. and Liao, L.-Z.: A smoothing Newton method for general nonlinear complementarity problems, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 17, pp. 231–253, 2000.
77) Chen, C. and Mangasarian, O. L.: A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 5, pp. 97–138, 1996.
78) 栗野盛光, 小林潔司, 渡辺晴彦：不確実性下における最適補修ルール, 土木学会論文集, No. 667/IV-50, pp. 1–14, 2001.
79) 慈道充, 小林潔司：不確実性下における最適点検・修繕ルール, 土木学会論文集, No. 744/IV-61, pp. 39–50, 2003.
80) 織田澤利守, 石原克治, 小林潔司, 近藤佳史：経済的寿命を考慮した最適修繕政策, 土木学会論文集, No. 772/IV-65, pp. 169–184, 2004.
81) 小林潔司, 上田孝行：インフラストラクチャ・マネジメント研究の課題と展望, 土木学会論文集, No. 744/IV-61, pp. 15–27, 2003.
82) 棟方章晴, 大嶋孝史, 赤松隆：確率的インパルス制御アプローチによる有料道路料金変更法, 土木計画学研究・講演集, Vol. 26, 2002, CD-ROM.
83) 山崎周一, 赤松隆：不確実性に対するリスク回避度を考慮した動的システム最適配分, 土木計画学研究・講演集, Vol. 32, 2005, CD-ROM.