

ボトルネック渋滞を考慮した住居立地均衡モデル —時間軸の縮約可能性について—

赤松 隆¹・高山雄貴²

¹正会員 工博 東北大学大学院情報科学研究科 教授 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

²正会員 修士 JR 西日本 京都支社 京都保線区 (〒621-0804 京都府亀岡市追分町小字谷筋8番)

都市経済学における標準的な住宅立地理論は、交通費用と地代のトレード・オフ関係をもとに、都市の土地利用と交通パターンを説明する。その理論では、交通条件は静学的な枠組みで表現され、渋滞現象等の *intra-day* レベルの詳細は無視できると仮定されている。一方、ボトルネック・モデルに関する最近の研究によれば、静学的な交通モデルは、交通費用に関して非常に大きな評価誤差を生じると指摘されている。そこで、本研究では、従来の立地・交通均衡理論が、どのような都市条件の下で、交通費用に関して大きなバイアスを生むかを明らかにする。この目的を達成するために、本研究では、通勤者の出発時刻選択を内生化した住居立地モデルを構築し、均衡解を求める。そして、その均衡解から、従来理論による状態表現が妥当でないと考えられる都市・交通条件を導く。

Key Words : residential location equilibrium, departure time choice, bottleneck congestion

1. はじめに

都市内の土地利用と交通は、従来から、互いに密接な相互干渉のある現象としてとらえられてきた。例えば、都市経済学における標準的な立地均衡理論は、交通費用と地代のトレード・オフ関係をもとに地代・立地密度の空間的規則性を説明している (eg. Alonso¹⁾, Fujita²⁾)。また、工学分野では、土地利用・交通量パターンの定量的予測を目的として、多くの立地・交通統合モデルが構築されている。

この互いに相関する空間現象をとらえるために、従来の標準的な立地理論 (あるいは、工学的な立地・交通統合モデル) では、暗黙裡に、時間的な集約・粗視化に関する仮定をおいてきた：立地のような時間スケールの大きな (ie. 変化速度の遅い長期的な) 現象を記述する際には、相対的に時間スケールの小さな現象の影響を無視できる。これは、より具体的には、以下のような仮定である：住宅立地パターンを決定づける消費者の立地選択行動は、通常、長期的な時間スケールの現象である。その一方で、消費者の選択行動は、短期的な時間スケールの様々な交通条件 (交通機関、経路、出発時刻等) の選択も含んでいる。しかし、従来の立地理論では、交通条件に関しては、*intra-day* レベルの詳細 (eg. 出発時刻選択行動や渋滞現象) までは (立地選択に影響しないと仮定し) 記述せず、静学モデル

の枠内に留めている。

この“マクロ現象を記述する際には、ミクロ現象を捨象できる”という粗視化の仮定は、一見、もっともらしい。そして、この仮定は、対象とする現象のメカニズムを最もわかりやすく簡略化/誇張した上で描く“メタファー・モデル”構築のためには、正当化されうるだろう。しかし、立地・交通現象における時間的な集約・粗視化に関する仮定は、定量的予測を目的とした土地利用モデルの構築や交通管理施策の分析において、どこまで妥当であろうか？ この点は、著者らの知る限り、理論的あるいは実証的にも、従来研究において十分に検証されていない。従って、例えば、混雑の外部不経済解消のための都心混雑料金制や容積率規制といった現実的施策の分析 (eg. Mun⁸⁾, Wheaton¹¹⁾) において、この仮定を吟味なしに用いることには、危うさが残る。

実際、この仮定は、以下に述べる要因のために、ある限られた条件 (または分析目的) においてしか妥当でないと推測される。第一に、*intra-day* レベルの交通条件を平均化した静学均衡モデルでは、交通費用を適切に評価できない (大きなバイアスが生じる) 可能性が高い。なぜなら、現実の交通費用の最大要因は渋滞による混雑待ち時間であるが、その渋滞現象は、*intra-day* レベルの動的な交通条件を導入することなしには記述できないからである。これは、交通工学・都

市経済学の両分野で進展してきたボトルネック渋滞モデルによる通勤交通の研究 (eg. Vickrey¹²⁾, Smith¹⁰⁾, Daganzo⁴⁾, Arnott et. al.^{2),3)}, 赤松¹³⁾, 桑原¹⁴⁾) でも指摘されてきた事実である。第二に、多くの消費者が立地選択に際して考慮する大きな要因は、通勤交通条件である。合理的な消費者は、通勤出発時刻等の *intra-day* レベルの交通条件を想定した上で立地を選択するであろう。その結果、マクロな現象としての通勤交通現象と立地現象の時間スケールは違っても、消費者行動レベルの記述では、両者は密接に関係する。

以上の背景に鑑み、本研究の目的は、従来の標準的な (*intra-day* レベルの現象メカニズム記述を省略した) 立地均衡モデルが、どのような条件下で、大きな予測バイアスを生むかを明らかにすることである。ただし、その分析は、主に交通混雑費用のバイアスに焦点をあてる。その理由は、まず、交通費用が、モデル内生変数の中で最も予測バイアスが大きいと推測されるからである。また、この交通費用バイアスが生じる条件を明らかにすることは、従来から議論の多い都心混雑料金制や容積率規制等といった現実的問題の分析にも有益である。

この目的を達成するために、本研究では、まず、出発時刻選択行動とボトルネック渋滞を生生化した住居立地均衡モデル (統合モデル) を構築する。次に、この統合モデルを解き、均衡交通費用を導出する。その結果、*intra-day* 交通条件を生生化した場合の均衡交通費用は、ある一定の条件下でのみ、従来の理論で仮定されている“分離型の交通費用関数” (“*separable link performance function*”) に帰着することが示される (本研究では、このような帰着が可能な場合を“時間軸の縮約が可能である”と呼ぶ)。さらに、統合モデルを数値的に解析し、時間軸の縮約が不可能となる条件を、住宅地規模および道路容量パターンといった都市条件と関連付ける。

本稿の構成は以下の通りである。まず、第2章では、出発時刻選択を生生化した住居立地均衡モデル (“統合均衡モデル”) の枠組を示し、その均衡条件を定式化する。次に、第3章では、出発時刻選択均衡モデル (第2章で定式化した統合均衡モデルのサブ・モデル) の均衡解を求める。そして、その均衡リンク・コストが、従来の静学モデルと同様の分離型コスト関数に帰着するための条件を示す。第4章では、第2章で定式化した統合均衡モデルを解き、都市条件と第3章で求めた条件の間の関係を明らかにする。第5章では、得られた結果から時間軸の縮約可能性に関する考察をする。最後に、第6章で結論と今後の課題を述べる。

2. 出発時刻選択行動を生生化した住居立地均衡モデルの定式化

(1) モデルの設定

本稿では、図1に示す様な2つの居住地とCBDを結ぶ道路ネットワークを考える。このネットワーク上のノード1, 2は、各々、居住地1, 2を表す。消費者は、居住地1または2に住宅を立地し、CBDに通勤する。閉じた都市を考えるため、居住地*i*の人口 Q_i ($i=1, 2$)の総和を一定値 Q とする。居住地1, 2の住宅地総面積は、各々、一定値 A_1, A_2 とする。なお、住宅地供給企業を仮定すれば、土地の供給面積を生生化した分析も可能である。また、ネットワーク条件の一般化も不可能ではない。しかし、本稿で構築するモデルは、詳細な土地利用・交通需要予測に直接利用されることを意図したものではない。本稿のモデル分析の狙いは、第1章でも述べたように、動的な交通条件を無視した立地均衡モデルが予測バイアスを引き起こすメカニズムを明確に示すことにある。従って、その目的と関係の薄いモデルの一般化は、極力避ける。

リンク1と2の終端には、各々、一定容量 μ_1, μ_2 のボトルネックが存在する。このボトルネックのサービスは、First-In-First-Out (FIFO) 原則を満足し、渋滞待ち行列は、point-queueモデルで表現できると仮定する。

消費者は、自らの効用が最大となるように居住地、財の消費量を選択する。ただし、消費者は、全員均質であると仮定する。すなわち、各消費者の行動は、以下のように表現される。

$$\max_{i, z_i, y_i} \{u(z_i, y_i \mid z_i + r_i y_i + \rho_i = M), i=1,2\} \quad (2.1)$$

ここで、 $u(\cdot)$ は消費者の効用関数、 M は消費者の所得を表す。また、添え字*i*は居住地を表し、 r_i は居住地*i*の地代、 ρ_i は通勤費用、 y_i は消費者1人あたりの土地面積、 z_i は合成財の消費量である。

この消費者の効用最大化問題は、以下の2段階最適化問題：

$$\max_i \left\{ \max_{z_i, y_i} u(z_i, y_i \mid z_i + r_i y_i + \rho_i = M) \right\} \quad (2.2)$$

と等価である。すなわち、まず、各居住地で合成財と土地の最適消費量を決定し、そして、その結果決まる間接効用値が最大の居住地*i*を選択すると考えればよい。より具体的には、まず、各居住地で最適な消費

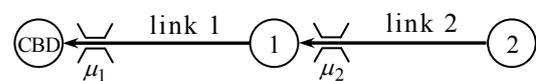


図1 対象ネットワーク

行動をしたときの効用は、以下の間接効用関数：

$$v_i(r_i, M - \rho_i) \equiv \max_{z_i, y_i} u(z_i, y_i \mid z_i + r_i y_i + \rho_i = M) \quad (2.3)$$

によって表される。そして、居住地選択行動は、

$$\max_i v_i(r_i, M - \rho_i) \quad (2.4)$$

と表現できる。

居住地 i で必要となる通勤費用 ρ_i は、CBD までに通過するリンクの交通費用の和：

$$\rho_i = \sum_{a=1}^i C_a \quad (i = 1, 2) \quad (2.5)$$

で与えられる。そして、リンク a の交通費用 C_a は、

(交通混雑を考慮した) 従来の標準的な立地理論では、当該リンク通過交通量の増加関数：

$$\begin{cases} C_1 = C_1(Q_1 + Q_2) = C_1(Q) \\ C_2 = C_2(Q_2) \end{cases}, \quad (2.6)$$

と与えられる (*ie.* 静学的な分離可能型リンク性能関数で交通費用を表現できると仮定されている)。

これに対して、本研究では、通勤費用 ρ_i は、消費者の出発時刻選択行動 (と(2)節で定式化する *intra-day* の動的な交通流均衡条件) の結果として決まると考える。より具体的には、消費者は、通勤費用が最小となるように、自宅からの出発時刻を選択する (これは、効用最大化行動と整合的である)。この出発時刻の順序は、同一居住地からであれば、ボトルネックでの FIFO 条件より、CBD 到着順序と等しい。この事実を用いると、出発時刻を選択することと、CBD 到着時刻を選択することは等価であることがわかる。そこで、以下では、消費者は、通勤費用が最小となるように、CBD の到着時刻 s を選択すると考える。このとき、居住地 i の消費者の通勤 (出発時刻選択) 行動は、

$$\rho_i = \min_s TC_i(s) \quad (2.7)$$

と表現される。ここで、 $TC_i(s)$ は、時刻 s に CBD に到着する (*ie.* リンク 1 から流出する) 居住地 i の消費者の通勤費用である。この通勤費用 TC_i は、通過するリンク a での渋滞待ち時間 $w_a(s)$ 、自由走行時間 k_a と “スケジュール遅れ (*schedule delay*)” $d(s)$ の和：

$$TC_i(s) = \alpha \cdot \left\{ \sum_{a=1}^i (w_a + k_a) + d(s) \right\} \quad (2.8)$$

で与えられると仮定する。ここで、 α は、通勤に費やす時間を (待ち時間を基準として) 金銭的費用に換算するための係数 (“時間価値”) である。また、“スケジュール遅れ” $d(s)$ は、希望到着時刻 (勤務開始時刻)

と実際の到着時刻の差 (“スケジュール遅れ”) を待ち行列遅れ時間に換算したものである。これは、以下の関数で与えられると仮定する：

$$d(s) = \begin{cases} \beta(t_w - s) & \text{if } s \leq t_w \\ \gamma(s - t_w) & \text{if } s \geq t_w \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで、 β, γ は、各々、希望到着時刻 t_w に対して早着、遅着する場合の単位時間当りの換算係数である。この関数形は、出発時刻選択に関する従来研究 (*eg.* Hendrickson⁸⁾) に倣ったものである (後の均衡分析を徒に煩雑化しないために、この仮定を採用する)。

(2) 均衡条件

統合モデルの均衡条件を、居住地選択と出発時刻選択の各々に関する条件に分けて定式化する。

a) 居住地選択に関する均衡条件

居住地選択に関する均衡状態は、居住地選択の無裁定条件、各居住地での土地の需給均衡条件、消費者数の保存則の 3 条件が同時に満たされた状態である。

まず、消費者の居住地選択に関して均衡状態にあるならば、どの消費者も居住地を変更する動機を持たない。従って、消費者が立地する居住地の効用は均衡効用水準 V に等しく、消費者が立地しない場合は V 以下となる：

$$\begin{cases} V = v_i(r_i, M - \rho_i) & \text{if } Q_i \geq 0 \\ V \geq v_i(r_i, M - \rho_i) & \text{if } Q_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

次に、土地市場の需給均衡状態では、正の地代がついていれば、供給面積と需要面積が一致し、そうでなければ、供給過多である (簡単のため、住宅の他の代替的用途に対する地代 (農業地代) を 0 とおいている)。ここで、各居住地 i の総面積 (供給面積) は、一定値 A_i と仮定しているの、この条件は

$$\begin{cases} A_i = y_i Q_i & \text{if } r_i \geq 0 \\ A_i \geq y_i Q_i & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

と表される。また、各消費者の住居面積 y_i は、Roy の恒等式より、 r_i, M, ρ_i の関数：

$$y_i = - \frac{\partial v_i(r_i, M - \rho_i) / \partial r_i}{\partial v_i(r_i, M - \rho_i) / \partial M} \quad (2.12)$$

により与えられる。最後に、本論文では閉じた都市を考えているため、消費者数の保存条件は、

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (2.13)$$

である。すなわち、各居住地に立地する消費者数 Q_i の合計は、都市の総人口 Q に等しい。

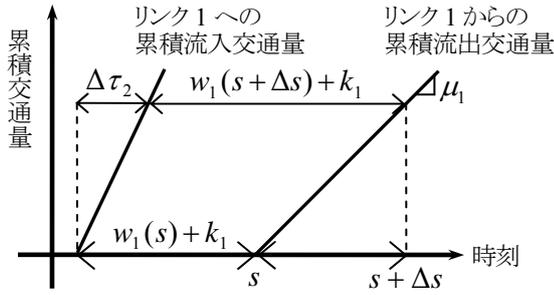


図2 待ち行列時間遅れの伝播

b) 出発時刻選択に関する均衡条件

出発時刻選択に関する均衡状態は、出発時刻選択条件、OD 交通量の保存則、渋滞待ち時間条件の3つが同時に満たされた状態である。

まず、消費者の出発時刻選択に関して均衡状態にあるならば、どの消費者も出発時刻を変更する動機を持たない。従って、道路利用者が存在する時刻 s の通勤費用 $TC_i(s)$ は、均衡通勤費用 ρ_i に等しく、存在しない場合は、 ρ_i 以上となる：

$$\begin{cases} TC_i(s) = \rho_i & \text{if } q_i(s) \geq 0 \\ TC_i(s) \geq \rho_i & \text{if } q_i(s) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

ここで、 $q_i(s)$ は、居住地 i を起点とし CBD に時刻 s に到着する車両の CBD 流入率 (OD 流率) である。

次に、消費者は全員 CBD に通勤するため、通勤時間帯に渡る交通流の総和は全人口と一致する。すなわち、

$$Q_i = \int_s q_i(s) ds \quad (2.15)$$

最後に、ボトルネックでの渋滞待ち時間の条件を示す。あるリンクに渋滞が存在する場合、CBD に流入する車両台数は、当該リンクの最大流出台数と等しい一方、渋滞が存在しない場合は、ボトルネック流出台数は CBD 流入台数に等しく、その値は最大流出台数以下である。従って、時刻 s から $s + \Delta s$ までの間に CBD に到着する消費者が、リンク a を流出する時間間隔を $[\tau_a(s), \tau_a(s) + \Delta\tau_a]$ とすると、以下の関係が成立する：

$$\begin{cases} \mu_a \Delta\tau_a = x_a(s) \Delta s & \text{if } w_a(s) > 0 \\ \mu_a \Delta\tau_a \geq x_a(s) \Delta s & \text{if } w_a(s) = 0 \end{cases} \quad (2.16a)$$

ここで、 μ_a はリンク a の最大流出率、 $x_a(s)$ はリンク a を通過し CBD に時刻 s に流入する車両の CBD 流入率、 $w_a(s)$ は CBD に時刻 s に流入する車両のリンク a での渋滞待ち時間である。ここで $\Delta s \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\begin{cases} \mu_a \cdot (d\tau_a / ds) = x_a & \text{if } w_a(s) > 0 \\ \mu_a \cdot (d\tau_a / ds) \geq x_a & \text{if } w_a(s) = 0 \end{cases} \quad (2.16b)$$

リンク 1 では、リンクを流出時間間隔 $\Delta\tau_1$ と CBD に到着する時間間隔 Δs は等しいから、 $d\tau_1 / ds = 1$ である。また、リンク 1 は、居住地 1 と 2 からの車両が通過する。従って、リンク 1 のボトルネックにおける渋滞待ち時間と OD 交通流率は、

$$\begin{cases} \mu_1 = q_1(s) + q_2(s) & \text{if } w_1(s) > 0 \\ \mu_1 \geq q_1(s) + q_2(s) & \text{if } w_1(s) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

を満たさねばならない。また、リンク 2 では、CBD に到着する時間間隔 Δs に対応するリンク流出時間間隔 $\Delta\tau_2$ は、 Δs および $w_1(s)$ と、図 2 に示す関係にある。この関係は、

$$\Delta\tau_2 = \Delta s - (w_1(s + \Delta s) - w_1(s)) \quad (2.18a)$$

と書ける。ここで、 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\frac{d\tau_2}{ds} = 1 - \frac{dw_1(s)}{ds} \quad (2.18b)$$

なる関係が得られる。この関係式(2.18b)と(2.16b)より、リンク 2 の渋滞待ち時間と交通流率は、

$$\begin{cases} \mu_2 \cdot (1 - dw_1(s) / ds) = q_2(s) & \text{if } w_2(s) > 0 \\ \mu_2 \cdot (1 - dw_1(s) / ds) \geq q_2(s) & \text{if } w_2(s) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

を満たさねばならない。この結果から、このリンク 2 の渋滞条件は、リンク 1 の渋滞の影響を受けていることがわかる。

(3) モデル構造についての考察と解析の手順

この統合均衡モデルは、2つのサブモデルからなる。一つは、前節の a) で示した住居立地選択に関する均衡条件 (“住居立地均衡サブモデル”)、もう一つは、前節の b) で示した出発時刻選択に関する均衡条件 (“交通均衡サブモデル”) である。各サブモデルは、他方のモデルの内生変数を入力としている。つまり、住居立地均衡サブモデルの内生変数 $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ は、交通均衡サブモデルへの入力であり、交通均衡サブモデルの内生変数 $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2\}$ は、住居立地均衡サブモデルへの入力となっている。従って、統合均衡モデルの均衡状態を表現するには、これらの2つのサブモデルを同時に解析しなければならない。

ただし、統合均衡モデルの内生変数である \mathbf{Q} を仮に与件と考えれば、交通均衡サブモデルから均衡リンク・コスト $C_a(\mathbf{Q})$ の関数形を解析的に得ることができ、この均衡リンク・コストは、時々刻々のフローによらず、1日全体の総交通量 (居住者数) \mathbf{Q} の関数となる。もし、この関数形が分離型の交通費用関数 (式(2.6) 参照) であれば、従来の静学的な理論で分析が可能 (ie. “時間軸の縮約が可能”) である。そうでなければ、従来の理論では、交通費用を適切に評価できない

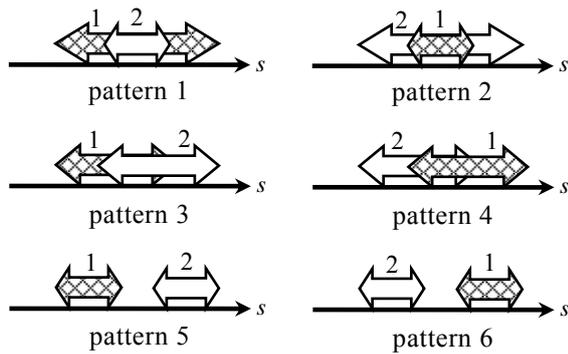


図3 CBD到着時刻分布(パターン)の分類

こと (ie. “時間軸の縮約が不可能”) がわかる。

そこで、本研究では、統合均衡モデルで時間軸の縮約が可能/不可能となる条件を明らかにするために、以下の手順で解析する。まず、第3章では、各居住地の人口 Q をパラメータとしてリンク・コスト $C_a(Q)$ の関数形を求め、時間軸の縮約可能性を検証する。次に、第4章で統合均衡モデルを解き、居住地選択と出発時刻選択の同時均衡状態での Q を求める。そして、どのような都市条件 (ie. 各都市の居住地面積 $A = \{A_1, A_2\}$ や道路容量 $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$) の下で時間軸の縮約が可能となるかを明らかにする。

3. 交通均衡サブモデルの解析

本章では、交通均衡サブモデルの均衡条件を立地均衡条件とは独立に解析し、時間軸の縮約可能性を検証する。すなわち、統合モデルの内生変数である Q を与件と仮定して、均衡リンク・コストを導出する。ただし、この均衡条件 (式(2.14)-(2.19)) は不等式条件を含むため、そのままでは均衡解を解析的に導出できない。そこで、消費者の行動を、以下で示す幾つかのパターン (以下では “到着パターン” と呼ぶ) に分類し、各パターン毎に等式均衡条件を定式化する。そのパターン毎に定式化された均衡条件を解き、その結果から時間軸の縮約可能性を検証する。

(1) 均衡状態での到着パターンの分類

出発時刻選択に関する均衡条件 (2.14)-(2.19) から解析的に均衡解を求めるため、CBD 到着時刻を $q(s)$ を状態に応じて以下の4つの時間帯に分割する。

$$q_1(s) = 0, q_2(s) = 0 : \text{時間帯 A} \quad (3.1a)$$

$$q_1(s) > 0, q_2(s) = 0 : \text{時間帯 B} \quad (3.1b)$$

$$q_1(s) = 0, q_2(s) > 0 : \text{時間帯 C} \quad (3.1c)$$

$$q_1(s) > 0, q_2(s) > 0 : \text{時間帯 D} \quad (3.1d)$$

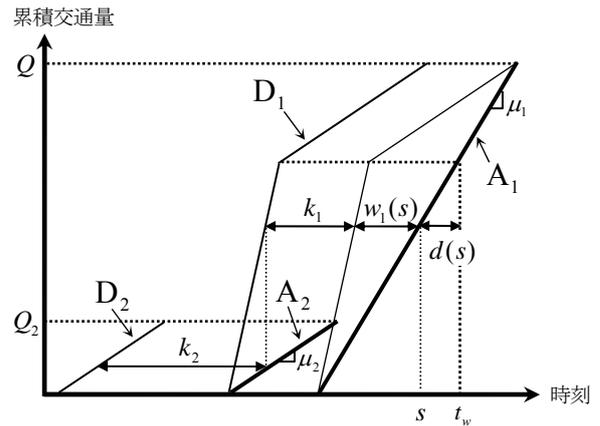


図4 到着パターン1の均衡交通流の推移

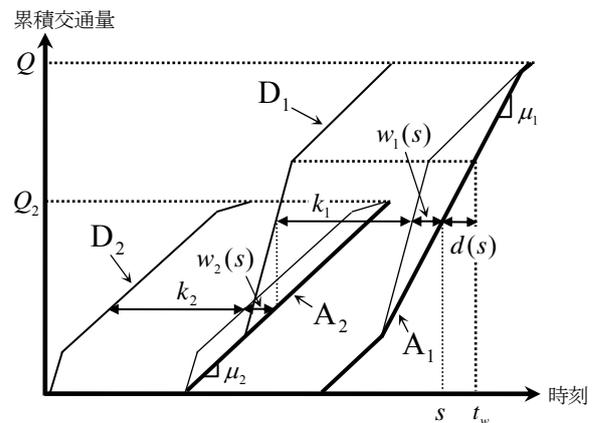


図5 到着パターン2の均衡交通流の推移

($\mu^* < \gamma^*$ の場合)

これらの4つの時間帯 A-D の組み合わせにより、全時間帯を通した通勤交通の到着パターンを記述することができる。この時間帯の組み合わせ方は、図3に示す6つのパターンが考えられる。ここで、図3中の矢印は、各居住地の消費者がCBDに到着する時刻の範囲を表す。ハッチング付き矢印は、居住地1の消費者、そうでない矢印は、居住地2の消費者を表している。

(2) 均衡解

上記の6つの到着パターンの各々について、均衡条件式の解が存在するか否かを確認した。その結果、全ての到着パターンに対応した均衡解が存在するのではなく、到着パターン1と2のみが (その到着パターンと無矛盾な) 均衡解を持つことが明らかとなった。この結果は、以下の命題にまとめられる：

命題 1：出発時刻選択の均衡状態で成立しうる到着パターンは、パターン1と2のみである。すなわち、到着パターン3～6は均衡状態では起こりえない。

(証明：付録A 参照)

この命題により，到着パターン 1 と 2 の解のみを問題とすれば十分である．そこで，これらの到着パターンの各々について，均衡解を求めた（その導出手順の詳細については，付録 B を参照）．図 4, 5 は，各々，到着パターン 1 と 2 の均衡フロー・パターンを累積図で表示したものである．図の横軸は時刻，縦軸は累積台数を表す．また，図中の D_a と A_a は，各々，リンク a の累積流入台数と累積流出台数である．これらの図からも明らかのように，到着パターン 1 と 2 では，各リンクでの渋滞パターンや均衡交通費用は大きく異なったものとなる．

(3) 均衡状態におけるリンクコスト関数

本稿では，各リンクの均衡コストを静学的（従来の）リンク・コスト関数と比較するために，図 6 のように定義する．すなわち，居住地 1 からの均衡通勤費用 ρ_1 をリンク 1 の均衡コスト C_1 ，居住地 2 と 1 の均衡通勤費用の差 $\rho_2 - \rho_1$ をリンク 2 の均衡コスト C_2 と考える．このとき，リンク 1, 2 の均衡リンク・コストは，均衡到着パターン 1 では，

$$C_1 = \frac{\delta}{\mu_1} Q + k_1 \quad (3.2)$$

$$C_2 = k_2 \quad (3.3)$$

と与えられる．ここで， $\delta \equiv \beta\gamma/(\beta+\gamma)$ である．

式 (3.2), (3.3) に示されたパターン 1 の均衡リンク・コスト関数は，リンク 1, 2 ともに，分離型である．すなわち，当該リンクの通過交通量のみの関数（ie. リンク 1 では $Q_1 + Q_2$ ，リンク 2 では定数）となっている．従って，パターン 1 では，“時間軸の縮約が可能である”と言える．さらに，パターン 1 では，リンク 2 には渋滞が発生しないこともわかる．

次に，到着パターン 2 では，均衡リンクコストは，

$$C_1 = a Q_1 + k_1 \quad (3.4)$$

$$C_2 = b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + k_2 \quad (3.5)$$

と与えられる（この導出は，付録 B 参照）．ここで， a, b_1, b_2 は，以下のように定義された定数である：

	a	b_1	b_2
if $\mu^* \leq \gamma^*$	$\frac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}$	$-\frac{\delta}{\mu_1 - \mu_2}$	$\frac{\delta}{\mu_2}$
if $\gamma^* \leq \mu^* \leq 1$	$\frac{\beta}{\mu^-}$	$\frac{\beta}{\mu^-} \left[\beta\gamma \frac{\mu_2}{\mu^+} - 1 \right]$	$\frac{\beta\gamma}{\mu^*}$
if $1 \leq \mu^* \leq \beta^*$	$\frac{\beta}{\mu^-}$	$-\frac{\beta\delta}{\mu^-} \left[\frac{\mu^*}{\beta\beta^*} + \frac{1}{\gamma} \right]$	$\frac{\delta}{\mu_1}$

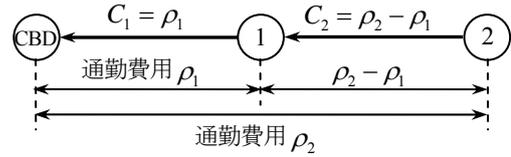


図6 均衡リンク・コストの定義

また， $\mu^* = \mu_2 / \mu_1$ ， $\beta^* = 1/(1-\beta)$ ， $\gamma^* = 1/(1+\gamma)$ ，

$$\mu^+ = \beta\mu_1 + \gamma\mu_2, \quad \mu^- = \mu_1 - (1-\beta)\mu_2$$

である．

式 (3.4), (3.5) に示されたパターン 2 の均衡リンク・コストは，リンク 1 が Q_1 の関数，リンク 2 が Q_1 と Q_2 の関数となっている．すなわち，リンク 1, 2 ともに，均衡コストが当該リンクの通過交通量のみの関数とはなっていない．従って，パターン 2 では，“時間軸の縮約が不可能である”と言える．

なお，これらの均衡交通コストは，*intra-day* の交通流状態を表す変数（eg. $q(s) = \{q_1(s), q_2(s)\}$ ）の関数ではなく，静学的な変数 Q_1 や Q_2 のみの関数である．従って，一見すると，*intra-day* の詳細な交通条件を無視した静学的分析で十分であると誤解されるかもしれない．しかし，パターン 2 の均衡交通費用の関数形は，静学的理論で採用されている分離型リンク・コスト関数とは，全く異なっていることに注意されたい．そして，この交通費用の関数形は，先見的には全く判らず，*intra-day* の交通流状態を考慮した動学的解析をしなければ得られない．その意味で，パターン 2 は，“時間軸の縮約が不可能”である．以上の議論は，以下の命題にまとめられる：

命題 2：均衡到着パターン 2 では，時間軸の縮約が不可能である．すなわち，交通費用を分離型リンク・コスト関数（ie. 通常の静学モデル）で表現することはできない．

(4) 縮約可能なフロー・パターンの成立領域

時間軸の縮約が不可能となるパターン 2 では，リンク 2 に必ず渋滞が発生し，一方，パターン 1 では，リンク 2 の渋滞は発生しない．従って，時間軸の縮約が不可能となるのは，リンク 2 に渋滞が発生する場合であると言える．

リンク 2 の渋滞状況は，リンク容量比 $\mu^* = \mu_2 / \mu_1$ の値に依存して変化する．より具体的には，以下の通りである．まず， $\mu^* > \beta^*$ の場合，必ずパターン 1 となり，リンク 2 に渋滞が発生しない． $\mu^* \leq \beta^*$ の場合は，早着者（ie. $s < t_w$ ）がリンク 2 を通行する時間帯で必ず渋滞が発生する．次に， $\mu^* > 1$ の場合，居住地 2

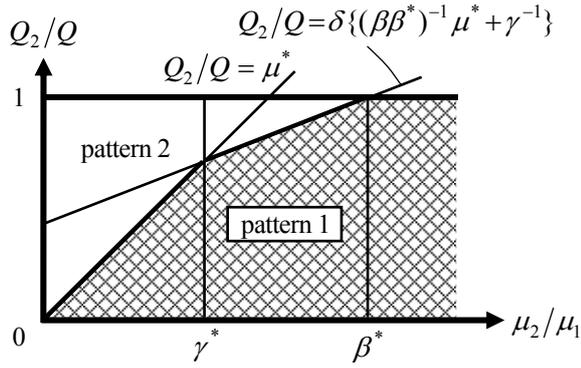


図7 到着パターン1と2の成立する領域

の消費者のみが CBD に到着する時間帯に、リンク 1 と 2 で渋滞が発生する。 $\mu^* \leq 1$ の場合は、その時間帯に渋滞が発生するのはリンク 2 のみとなる。さらに、 $\mu^* > \gamma^*$ の場合、遅刻者 (ie. $s > t_w$) がリンク 2 を通行する時間帯では渋滞が発生しない。 $\mu^* \leq \gamma^*$ の場合は、常にリンク 2 に渋滞が発生する。

均衡状態で成立する到着パターン 1 と 2 は、リンク容量比 μ^* のみならず居住人口比 Q_2/Q の値にも依存して切り替わる(その結果導出の詳細は、付録 C 参照)。各到着パターンが成立するために $(\mu^*, Q_2/Q)$ が満たすべき条件を整理すると、以下の命題が得られる。

命題 3 : リンク容量比 $\mu^* = \mu_2 / \mu_1$ と居住人口比 Q_2/Q が、次の条件 :

$$\frac{Q_2}{Q} \leq \begin{cases} \mu^* & \text{if } \mu^* \leq \gamma^* \\ \delta \{(\beta\beta^*)^{-1} \mu^* + \gamma^{-1}\} & \text{if } \gamma^* \leq \mu^* \leq \beta^* \\ 1 & \text{if } \beta^* \leq \mu^* \end{cases}$$

を満たすなら、時間軸の縮約が可能である。

(証明 : 付録 C 参照)

図 7 は、横軸をリンク容量比 μ^* 、縦軸を居住人口比 Q_2/Q として、命題 3 の条件を描いたものである。ここで、図のハッチング部分はパターン 1、すなわち縮約可能となる領域、そうでない部分はパターン 2、すなわち縮約不可能となる領域を示している。

この図から、まず、 μ^* が小さい場合、パターン 2 が成立しやすいことがわかる。さらに、 Q_2/Q が大きい場合も、パターン 2 が成立しやすいと読み取れる。従って、CBD 近郊の道路容量が郊外の道路容量に比べて大きい、あるいは、CBD から遠い郊外の消費者数 Q_2 が多い場合に、時間軸の縮約が不可能となりやすいと言える。

4. 統合均衡モデルの解析

本章では、均衡リンク・コスト C が、居住地面積 A や道路容量 μ などの都市条件と、どのような関係があるかを調べる。そのために、統合均衡モデルを解き、均衡状態での居住人口 Q および交通費用 ρ を同時に求める。

(1) 均衡条件

統合モデルの均衡条件式は、前章で得られた均衡リンク・コスト関数を用いると、以下のようにまとめられる。

$$\begin{cases} V - v_i(r_i, M - \rho_i) = 0 & \text{if } Q_i \geq 0 \\ V - v_i(r_i, M - \rho_i) \geq 0 & \text{if } Q_i = 0 \end{cases} \quad i=1,2 \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} A_i - y_i(r_i, M - \rho_i) Q_i = 0 & \text{if } r_i \geq 0 \\ A_i - y_i(r_i, M - \rho_i) Q_i \geq 0 & \text{if } r_i = 0 \end{cases} \quad i=1,2 \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} Q - (Q_1 + Q_2) = 0 & \text{if } V \geq 0 \\ Q - (Q_1 + Q_2) \geq 0 & \text{if } V = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{if } Q_2/Q \leq \min. [\mu^*, \delta \{(\beta\beta^*)^{-1} \mu^* + \gamma^{-1}\}]$$

$$\rho_1 = \delta \frac{Q}{\mu_1} + k_1 \quad (4.4a)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + k_2 \quad (4.4b)$$

$$\text{if } Q_2/Q > \min. [\mu^*, \delta \{(\beta\beta^*)^{-1} \mu^* + \gamma^{-1}\}]$$

$$\rho_1 = a Q_1 + k_1 \quad (4.5a)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + k_2 \quad (4.5b)$$

これらの均衡条件を同時に解けば、居住人口 Q および交通費用 ρ と都市条件パラメータの関係が明らかになる。しかし、内生変数である Q の値によって(到着パターン 1, 2 がスイッチし) 通勤費用 ρ の関数形が変化するため、これらの条件を解析的に解くことは困難である。そこで、以下では、第 2 章 (2) で定式化した統合均衡モデルの均衡条件 (2.10)~(2.15), (2.17) and (2.19) を数値計算により直接解き、均衡解を求める。そのために、まず、統合モデルの均衡状態を数値的に求めるためのアルゴリズムを示す。そして、数値実験の結果を用いて、均衡状態の性質を調べる。

(2) 数値計算アルゴリズム

均衡条件式 (2.10)–(2.19) は、CBD 到着時刻 s を離散化すると、付録 D に示す有限次元 NCP に帰着する。NCP を数値的に解くアルゴリズムは多数存在するが、ここでは最も単純で、従来から多くの適用例 (eg. 交通均衡配分問題) が知られている対角化法を採用する。この対角化法の概要は以下の通りである。

Step 0. 初期許容解の設定 :

$\mathbf{X}^{(0)}$ に適当な許容解を設定; $n := 0$;

Step 1. 緩和問題を解く :

元問題を $\mathbf{X}^{(n)}$ を用いて近似した緩和問題 (以下で示す問題[EP]) を解き, $n+1$ 回目繰返しでの解 $\mathbf{X}^{(n+1)}$ とする.

Step 2. 収束判定 :

$\|\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}\| < \varepsilon$ なら, 終了. そうでなければ, $n := n+1$ とし, **Step 1** へ.

ここで, **Step 1** では, 付録 D に示す NCP の写像 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ の非対角要素を適切に近似して得られる緩和問題を解く. この近似では, 写像の *Jacobian* の非対角要素が 0 となるように, 住宅立地選択に関する均衡条件中の ρ , 出発時刻選択に関する均衡条件中の \mathbf{Q} , $\Delta\tau(s)$ を仮に与件であるとする. 与件とする変数には, 1 回前の繰返し計算で得られた解を代入する. n 回目繰返し計算において, この対角化近似によって得られる緩和問題は, 以下の最適化問題 [EP] と等価である (その証明は付録 E を参照) :

$$\min .Z(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \equiv \sum_i \left\{ \sum_s q_i(s) d(s) - \int_0^{Q_i} v_i(x, \rho_i^{(n-1)}) dx \right\}$$

$$\text{subject to } q_1(s) + q_2(s) \leq \mu_1 \quad \forall s \quad (4.6)$$

$$q_2(s) \leq \mu_2 \Delta\tau(s)^{(n-1)} \quad \forall s \quad (4.7)$$

$$\sum_s q_i(s) = Q_i^{(n-1)} \quad \forall i \quad (4.8)$$

$$q_i(s) \geq 0 \quad \forall s, \forall i \quad (4.9)$$

$$\sum_i Q_i = Q \quad (4.10)$$

$$Q_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4.11)$$

ここで, $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2\}$, $\mathbf{q}(s) = \{q_1(s), q_2(s)\}$, 添字 $(n-1)$ は $n-1$ 回目 (ie. 1 回前) 繰返し計算で得られた解であることを示している. また, $v_i(Q_i, \rho_i)$ は, 式(2.3)で定義される間接効用関数に, 居住地 i での土地需給均衡条件 (式(2.11)) を代入して得られる関数である.

等価最適化問題 [EP] は, \mathbf{q}, \mathbf{Q} について分割することができる. なぜなら, 目的関数の第 1 項は \mathbf{q} のみ, 第 2 項は \mathbf{Q} のみの関数であり, 制約条件も同様に \mathbf{q} または \mathbf{Q} のみの条件に分解されているからである. すなわち, 問題 [EP] の解は, 以下の 2 つの独立な最適化問題を解いた結果と一致する :

$$[\mathbf{EP-R}] : \min .Z_R(\mathbf{Q}) \equiv - \sum_i \int_0^{Q_i} v_i(x, \rho_i^{(n-1)}) dx$$

subject to (4.10) and (4.11).

$$[\mathbf{EP-T}] : \min .Z_T(\mathbf{q}) \equiv \sum_i \sum_s q_i(s) d(s)$$

subject to (4.6), (4.7), (4.8) and (4.9).

前者 (問題 [EP-R]) は, 通勤費用 ρ を定数 $\rho^{(n-1)}$ に固定した場合の住居立地均衡サブモデルと等価な最適化問題である. 一方, 後者 (問題[EP-T]) は, 各居住地の立地者数 \mathbf{Q} と待ち行列遅れ時間 $\Delta\tau$ を $\mathbf{Q}^{(n-1)}$ と $\Delta\tau^{(n-1)}$ に固定した場合の交通均衡サブモデルと等価な最適化問題である. いずれの問題も単純な凸計画問題であるため, よく知られたアルゴリズム (eg. *Frank-Wolfe* 法) により簡単に解くことができる.

(3) 数値実験条件

数値実験を行う際の条件は以下の通りである. まず, 消費者の効用関数 $u_i(z_i, y_i)$ は,

$$u_i(z_i, y_i) = a \ln z_i + b \ln y_i \quad (4.12)$$

で与えられるとする. これから導かれる間接効用関数に土地需給均衡条件を代入すると, 各居住地での間接効用を (Q_i, ρ_i) の関数として表現できる :

$$v_i(Q_i, \rho_i) = a \ln(a(M - \rho_i)) + b \ln(A_i / Q_i) \quad (4.13)$$

外生パラメータは, ベース・ケースとして, 消費者数を $Q = 1000$, 消費者所得を $M = 25$, 各居住地面積を $A_1 = 500, A_2 = 1000$, 各リンク容量を $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1$, 効用関数パラメータを $a = b = 0.5$ とする.

また, 本章では, 統合モデルを従来の静学立地均衡モデル (出発時刻選択が含まれない均衡モデル) と比較する. この比較は, リンク・コスト以外のパラメータをすべて同じ値にして行う. ただし, 静学モデルのリンク・コスト関数については, 式(3.2)-(3.3)を用いる.

数値実験では, 居住地 2 の人口比 Q_2/Q , 各居住地の通勤費用 ρ_i が, 居住地の総面積比 A_2/A_1 , リンクの容量比 μ_2/μ_1 に対してどのように変化するか調べる. 以下では, その結果を示す.

(4) 数値実験結果

a) 居住地面積比の変化に対する均衡解の性質

居住地面積比 $A^* = A_2/A_1$ の変化に対する \mathbf{Q}, ρ の性質を調べた. ただし, A^* の値を変化させる際, A_1 を固定した上で, A_2 の値を変化させた. 図 8,9 は, 各々, \mathbf{Q} と ρ に関する計算結果である.

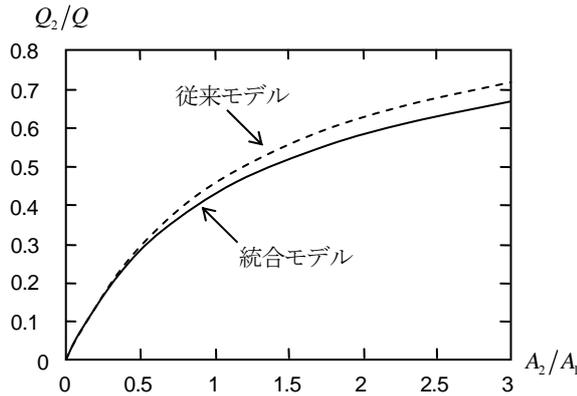


図8 面積比 A_2/A_1 と均衡居住人口比

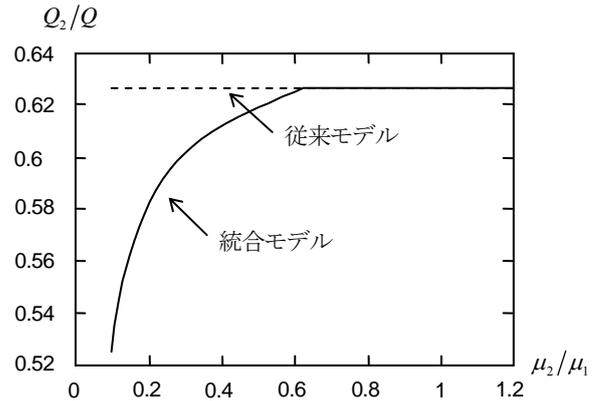


図10 容量比 μ_2/μ_1 と均衡居住人口比

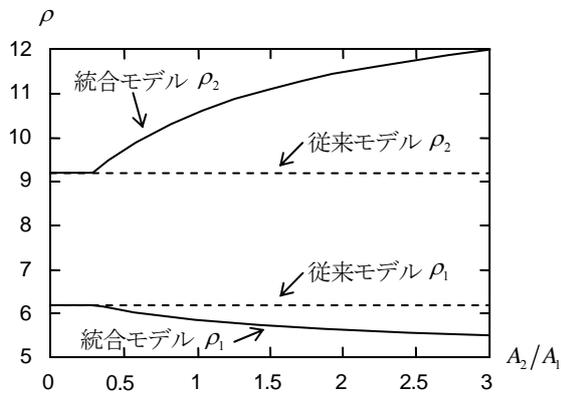


図9 面積比 A_2/A_1 と均衡通勤費用

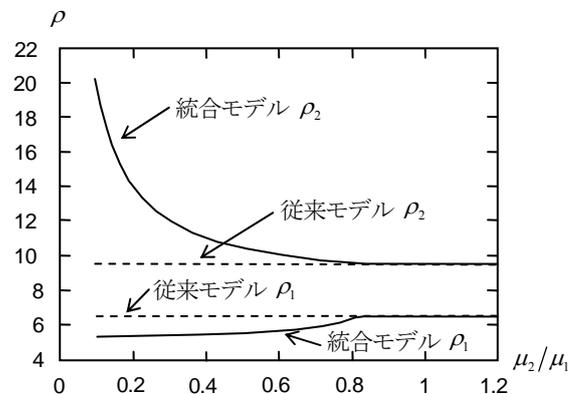


図11 容量比 μ_2/μ_1 と均衡通勤費用

まず、図8から、従来モデル・統合モデルともに、居住地面積比 A^* の増加につれ、 Q_2 が増加することがわかる。両モデル共通に Q_2 が増加する理由は、 A^* が増加すれば、居住地2の土地需給条件が(居住地1との相対的比較で)緩和され、居住地2の相対的な均衡地代が低下するためである。また、 A^* が一定値(約0.3)以上になると、統合モデルの Q_2 は、従来モデルの Q_2 よりも常に少なくなる。これは、この領域では、図9に示す様に、統合モデルでの居住地2の均衡通勤費用 ρ_2 が A^* の増加と共に増加することの効果である。

次に、図9より、 A^* が一定値以上の領域では、 A^* が増加すると ρ_1 は減少 (ρ_2 は増加) することが判る。これは、この A^* の領域に対応する居住地2の人口(人口比 Q_2/Q が約0.2以上の Q_2) では、時間軸の縮約が不可能となる均衡到着パターン2が生じるためである：到着パターン2では、居住地1、2の均衡コストは、各々、 Q_1, Q_2 に関して単調増加な関数(4.5a), (4.5b)で与えられる。一方、 A^* の増加と共に Q_1 は減少 (Q_2 は増加) する。従って、この A^* の領域では、 A^* の増加とともに、 ρ_1 は減少 (ρ_2 は増加) するのである。

b) リンク容量比の変化に対する均衡解の性質

リンク容量比 $\mu^* = \mu_2/\mu_1$ の変化に対する Q, ρ の性質を調べた。ただし、 μ^* の値を変化させる際、 μ_1 を固定した上で、 μ_2 の値を変化させた。図10, 11は、各々、 Q と ρ に関する計算結果である。

まず、図10から、リンク容量比 μ^* が一定値(約0.7)以下の領域では、 μ^* の増加とともに、 Q_2 が増加することがわかる。これは、この領域では、図11に示す様に、 μ^* の増加と共に居住地2の均衡通勤費用 ρ_2 が減少する(改善される)ことの効果である。

次に、図11より、 μ^* が一定値以上の領域では、 μ^* が増加すると、 ρ_2 が減少 (ρ_1 は増加) することがわかる。これは、この μ^* の領域では、(時間軸の縮約が不可能な)均衡到着パターン2が生じるためである：パターン2では、居住地2の均衡コストは、式(4.5b)で与えられ、その係数 b_1 と b_2 が、 μ^* の増加とともに小さくなる。同様に、居住地1の均衡コストは、式(4.5a)で与えられ、その係数 a が、 μ^* の増加とともに大きくなるのである。

5. 時間軸の縮約可能性に関する考察

ここまでで得られた結果から、統合均衡モデルの時間軸の縮約可能性について考えてみよう。まず、第3章の交通均衡サブモデルの解析結果(図7)から、時間軸の縮約が不可能となりやすいのは、以下の2つの場合であることがわかっている。まず1つは、郊外の道路容量 μ_2 が CBD 近郊の道路容量 μ_1 より小さい場合、もう1つは、郊外の立地者数 Q_2 が増加する場合である。これらの情報と第4章で示された数値実験結果を組み合わせれば、時間軸の縮約が不可能となる都市条件を導くことができる。

まず、第4章(4)節 a) の数値実験結果より、居住地面積比 $A^* = A_2/A_1$ が増加するにつれて、居住地2の人口 Q_2 が大きくなることわかる。この結果と第3章の結果を組み合わせると、 A^* が大きい場合、時間軸の縮約が不可能となりやすいと言える。

次に、第4章(4)節 b) の数値実験結果より、リンク容量比 $\mu^* = \mu_2/\mu_1$ が小さい範囲では、 μ^* が増加するにつれて、居住地2の人口 Q_2 が大きくなることわかる。また、 μ^* が大きい範囲では、 Q_2 は変化しない。この結果より、 μ^* がある程度小さい場合、第3章で示した μ^* の効果に加え、 μ^* の増加に伴い郊外人口 Q_2 が増加する効果によって、時間軸の縮約が不可能となりやすいと言える。

さらに、居住地2の均衡通勤費用 ρ_2 に対する容量比 μ^* 、居住地面積比 A^* の同時的効果をみたのが図12である。ここで、図上の曲線は、 ρ_2 の等高線を示しており、 μ^* が小さく、 A^* が大きいほど ρ_2 が大きくなっている。また、ハッチング部分(ρ_2 が一定の最小値をとっている領域)は時間軸の縮約が可能な領域、それ以外は縮約不可能な領域を表している。この図からも、居住地2の総面積が(相対的に)大きい場合、または、リンク2の容量が(相対的に)小さい場合に、時間軸の縮約が不可能になりやすいことがわかる。

以上より、従来の静学モデルでは大きな評価バイアス(特に、交通費用に関して)が生じる都市の条件は、

- 1) CBD から遠い郊外に大規模な住宅地のある都市、
- 2) 郊外の道路の容量がある程度小さい都市

である。この条件に対応する典型例は、十分な道路整備をしないまま郊外型の大規模住宅地を開発した(我が国でもよく見られる)都市である。従って、このような都市で、社会基盤整備事業や混雑料金施策等の経済的評価に従来型静学モデルを適用する際には、その評価バイアスに十分な注意が必要である。より具体的

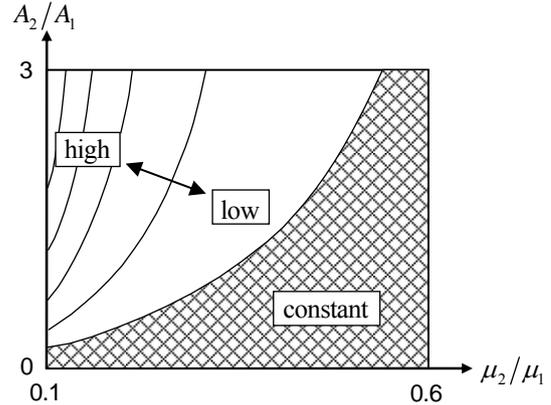


図12 面積比 A_2/A_1 、容量比 μ_2/μ_1 に対する均衡通勤費用 ρ_2 の関係

には、従来モデルで予測される交通費用は、CBD 近郊では過大、郊外では過小評価となりやすいことを前提に分析結果を用いる必要がある。

6. おわりに

本研究は、渋滞現象や出発時刻選択行動といった *intra-day* レベルの交通条件を考慮した住宅立地均衡モデルを構築し、その特性を探った。その結果、これらの条件を無視できると仮定した従来の立地-交通均衡理論では、その予測結果に大きなバイアスが含まれる場合(“時間軸の縮約不可能性”)があることを示した。さらに、どのような都市・交通条件のもとで、従来理論による予測(特に、交通費用)に大きなバイアスが生じるのかを明らかにした。

なお、本研究は、消費者が *intra-day* レベルの選択に関して合理的な行動をすると仮定できるなら生じるであろう現象を理論的に議論したものである。その行動仮説の妥当性を直接、実証的に検証することは困難であろう。しかし、その理論的帰結の一部(eg. 交通費用が、式(3.4)-(3.5)のような“分離不可能関数”となりうること)は、統計学的に検証可能と考えられる。そのような実証的検討は、今後の重要な研究課題である。

付録 A. パターン 3~6 が均衡状態では成立しえないことの証明

ここでは、パターン 3~6 が均衡条件を満たさないことを証明する。ただし、パターン 5 と 6 の証明手順は、ほぼ同じであるため、パターン 6 の証明は省略する。また、待ち時間を金銭費用に換算する時間価値係数 α の値は、結果に全く影響を与えないため、以下

では、 $\alpha=1$ において記述する。

(1) 到着パターン3の証明

パターン3でのCBD到着分布は、

$$q_1(s) > 0, q_2(s) = 0 : s_{1f} \leq s \leq s_{2f} \quad (\text{A.1})$$

$$q_1(s) > 0, q_2(s) > 0 : s_{2f} \leq s \leq s_{2l} \quad (\text{A.2})$$

$$q_1(s) = 0, q_2(s) > 0 : s_{1l} \leq s \leq s_{2l} \quad (\text{A.3})$$

を満たす。ここで、 s_{if} は居住地 i の消費者が最初にCBDに到着する時刻、 s_{il} は居住地 i の消費者が最後にCBDに到着する時刻を表す。また、パターン3では、居住地1の消費者のみが最初、居住地2の消費者のみが最後にCBDに到着する。従って、CBD到着時刻は以下の条件を満たす：

$$s_{1f} < s_{2f} \leq s_{1l} \leq s_{2l} \quad (\text{A.4})$$

正の交通流が流れる時間帯での均衡条件を等式条件に書き換え、到着時刻 s_{if}, s_{il} での均衡条件を示すと、

$$TC_1(s_{1f}) = \beta(t_w - s_{1f}) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.5})$$

$$TC_1(s_{1l}) = \gamma(s_{1l} - t_w) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.6})$$

$$TC_2(s_{2f}) = TC_1(s_{1l}) + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.7})$$

$$TC_2(s_{2l}) = \gamma(s_{2l} - t_w) + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.8})$$

これらの式から、 $s_{1l} = s_{2l}$ が得られる。これは、到着パターン3の s_{1l}, s_{2l} が満たすべき条件 (A.4) に矛盾する。よって、パターン3は、均衡条件を満たさない。

(2) 到着パターン4の証明

付録A(1)と同様、均衡条件を等式条件に書き換え、 s_{if}, s_{il} についての均衡条件を示すと、

$$TC_1(s_{1f}) = w_1(s_{1f}) + \beta(t_w - s_{1f}) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.9})$$

$$TC_1(s_{1l}) = \gamma(s_{1l} - t_w) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.10})$$

$$TC_2(s_{2f}) = \beta(t_w - s_{2f}) + k_1 + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.11})$$

$$TC_2(s_{2l}) = TC_1(s_{1f}) + w_2(s_{2l}) + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.12})$$

ここで、時刻 s_{1l} における、居住地2からの通勤費用 $TC_2(s_{1l})$ を求めると、

$$TC_2(s_{1l}) = TC_1(s_{1l}) + k_2 < \rho_2 \quad (\text{A.13})$$

この関係は、居住地2の出発時刻選択均衡条件に矛盾する。従って、パターン4は均衡条件を満たさない。

(3) 到着パターン5の証明

付録A(2)と同様に、均衡条件を等式条件に書き換え、 s_{if}, s_{il} についての均衡条件を示すと、

$$TC_1(s_{1f}) = d(s_{1f}) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.14})$$

$$TC_1(s_{1l}) = w_1(s_{1l}) + d(s_{1l} - t_w) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{A.15})$$

$$TC_2(s_{2f}) = d(s_{2f}) + k_1 + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.16})$$

$$TC_2(s_{2l}) = w_2(s_{2l}) + d(s_{2l}) + k_1 + k_2 = \rho_2 \quad (\text{A.17})$$

ここで、 $s_{il} < t_w$ と仮定すると、どの居住地の消費者もCBDに到着しない時刻 $s_{il} + ds$ における、居住地1からの通勤費用 $TC_1(s_{il} + ds)$ は、以下ようになる。

$$TC_1(s_{il} + ds) = \beta(t_w - s_{il} - ds) + k_1 < \rho_1 \quad (\text{A.18})$$

従って、 $s_{il} < t_w$ の場合、パターン5は、均衡条件を満たさない。また、 $s_{il} \geq t_w$ と仮定した場合も、同様にパターン5が均衡条件を満たさないことが示される。以上より、パターン5は、均衡条件を満たさないことがわかる。

付録B. パターン1,2の均衡解

ここでは、パターン1,2の均衡解を解析的に求める。ただし、パターン1と2の解析手順自体は、ほぼ同様であるため、ここではパターン1の場合についてのみ説明する。

均衡時の到着パターンがパターン1となる場合、消費者のCBD到着分布は、次のように与えられる：

$$q_1(s) > 0, q_2(s) = 0 : s_{1f} \leq s \leq s_{2f} \quad (\text{B.1})$$

$$q_1(s) > 0, q_2(s) > 0 : s_{2f} \leq s \leq s_{2l} \quad (\text{B.2})$$

$$q_1(s) > 0, q_2(s) = 0 : s_{2l} \leq s \leq s_{1l} \quad (\text{B.3})$$

パターン1では、居住地1の消費者が最初と最後にCBDに到着する。従って、CBD到着時刻は以下の条件を満たす：

$$s_{1f} \leq s_{2f} \leq s_{2l} \leq s_{1l} \quad (\text{B.4})$$

ただし、パターン1は、居住地1と2の消費者が同時に最初、または最後にCBDに到着する場合も含む。

まず、(B.1)と(B.3)の時間帯で成立する均衡条件を考えよう。この時間帯では、 $q_2(s) = 0$ であるからリンク2には渋滞が発生せず、 $TC_2(s)$ は、

$$TC_2(s) = \rho_1 + k_2 \quad (\text{B.5})$$

である。従って、出発時刻選択均衡条件(2.14)は、

$$TC_1(s) - \rho_1 = w_1(s) + d(s) + k_1 - \rho_1 = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$TC_2(s) - \rho_2 = \rho_1 + k_2 - \rho_2 \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

と書ける。さらに、式(B.6)を s について微分すると、以下の関係が得られる。

$$\frac{dw_1(s)}{ds} = \begin{cases} \beta & \text{if } s \leq t_w \\ -\gamma & \text{if } s \geq t_w \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

これより、この時間帯では、リンク 1 に渋滞が発生し ($w_1(s) > 0$)、リンク 2 には渋滞が発生しない ($w_2(s) = 0$) ことが判る。従って、均衡条件(2.17), (2.19) は、各々、以下の等式、不等式で表される：

$$\mu_1 = q_1(s), \quad (\text{B.9})$$

$$\mu_2(1 - dw_1(s)/ds) \geq 0. \quad (\text{B.10})$$

次に、(B.2)の時間帯で成立する均衡条件を考えよう。この時間帯では、 $q_1(s) > 0, q_2(s) > 0$ であるので、均衡条件(2.14) は、以下の等式条件に帰着する：

$$TC_1(s) - \rho_1 = w_1(s) + d(s) + k_1 - \rho_1 = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$TC_2(s) - \rho_2 = \rho_1 + w_2(s) + k_2 - \rho_2 = 0 \quad (\text{B.12})$$

この式(B.12)と式(B.7) より、この時間帯では、リンク 2 には渋滞が発生しない ($w_2(s) = 0$) ことが判る。また、リンク 1 に渋滞が発生する ($w_1(s) > 0$) から、均衡条件(2.17), (2.19) は、各々、

$$\mu_1 = q_1(s) + q_2(s), \quad (\text{B.13})$$

$$\mu_2(1 - dw_1(s)/ds) \geq q_2(s). \quad (\text{B.14})$$

以上の均衡条件から、解析的に均衡通勤費用を求め。まず、居住地 1 から最初、または最後に CBD に到着する消費者は、渋滞に巻き込まれない。従って、CBD 到着時刻 s_{1f}, s_{1l} での均衡条件 (2.14) は、

$$TC_1(s_{1f}) = \beta(t_w - s_{1f}) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{B.15})$$

$$TC_1(s_{1l}) = \gamma(s_{1l} - t_w) + k_1 = \rho_1 \quad (\text{B.16})$$

と書ける。これら 2 式から t_w を消去すると、

$$\rho_1 - k_1 = \delta(s_{1l} - s_{1f}) \quad (\text{B.17})$$

を得る。ここで、 $\delta \equiv \beta\gamma/(\beta + \gamma)$ である。また、到着時刻 s_{2f}, s_{2l} における均衡条件 (2.14) は、パターン 1 ではリンク 2 に渋滞が発生しないため、

$$TC_2(s_{2f}) = TC_2(s_{2l}) = \rho_1 + k_2 = \rho_2 \quad (\text{B.18})$$

と書ける。次に、OD 交通量の保存則 (2.15) に均衡条件式 (B.9), (B.10), (B.13), (B.14) を代入すると、

$$Q = \int (q_1(s) + q_2(s)) ds = \mu_1(s_{1l} - s_{1f}) \quad (\text{B.19})$$

$$Q_2 = \int q_2(s) ds \leq \mu_2 \int_{s_{2f}}^{s_{2l}} (1 - dw_1(s)/ds) ds \quad (\text{B.20})$$

を得る。この式(B.19) に式(B.17)を代入すれば、均衡通勤費用 ρ_1 が、

$$\rho_1 = \delta \frac{Q}{\mu_1} + k_1 \quad (\text{B.21})$$

と得られる。また、このときの ρ_2 は、式(B.18)より、

$$\rho_2 = \rho_1 + k_2 \quad (\text{B.22})$$

である。

付録 C. パターン 1 の成立条件

到着パターン 1 での CBD 到着時刻 s_{1f}, s_{1l} は、付録 B で示した均衡条件式(B.15), (B.16) から、

$$s_{1f} = t_w - (\rho_1 - k_1)/\beta = t_w - \frac{\delta Q}{\beta \mu_1}, \quad (\text{C.1})$$

$$s_{1l} = t_w + (\rho_1 - k_1)/\gamma = t_w + \frac{\delta Q}{\gamma \mu_1}. \quad (\text{C.2})$$

また、到着時刻 s_{2f}, s_{2l} は、均衡条件式 (B.18) から、

$$\rho_2 = \rho_1 + k_2, \quad (\text{C.1})$$

$$\rho_2 = \rho_1 + k_2. \quad (\text{C.2})$$

これらの均衡到着時刻がパターン 1 と整合的であるためには、(B.4) が成立する必要がある。すなわち、

$$s_{1f} = t_w - \frac{\delta Q}{\beta \mu_1} \leq s_{2f} \quad (\text{C.3})$$

$$s_{1l} = t_w + \frac{\delta Q}{\gamma \mu_1} \geq s_{2l} \quad (\text{C.4})$$

到着パターン 1 の均衡状態では、上記条件に加え、付録 B の均衡条件 (B.20) の不等式が成立しなければならない。この不等式右辺に式(B.8) を代入すると、

$$Q_2 \leq \frac{\mu_2}{\beta^*} (t_w - s_{2f}) + \frac{\mu_2}{\gamma^*} (s_{2l} - t_w). \quad (\text{C.5})$$

この関係式に (C.3), (C.4) を代入し整理すれば、

$$\frac{Q_2}{Q} \leq \begin{cases} \mu^* & \text{if } \mu^* \leq \gamma^* \\ \delta \{(\beta\beta^*)^{-1} \mu^* + \gamma^{-1}\} & \text{if } \gamma^* \leq \mu^* \leq \beta^* \\ 1 & \text{if } \beta^* \leq \mu^* \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

を得る。すなわち、パターン 1 は、条件(C.6)を満たした場合にのみ成立する。

付録 D. 均衡条件の有限次元 NCP 表現

分析時間帯を N 個の微小区間に分割し, CBD 到着時刻 s を $s_n (n=0, 1, 2, \dots, N)$ と離散化する. このとき, CBD 到着時刻別の交通流率 $q_i(s) (i=1, 2)$ および渋滞待ち時間 $w_a(s) (a=1, 2)$ は, 各々, $N+1$ 個の要素を持つベクトル

$$\mathbf{q}_i = [q_i(0), q_i(1), \dots, q_i(N)]^T \quad (i=1, 2)$$

$$\mathbf{w}_a = [w_a(0), w_a(1), \dots, w_a(N)]^T \quad (a=1, 2)$$

として表現できる. また, これに加えて, 統合均衡モデルの均衡交通費用 ρ , 均衡居住地人口 \mathbf{Q} , 均衡効用 V をまとめて,

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \rho_1, \rho_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, V]^T \quad (\text{D.1})$$

と書くと, 均衡条件は, 以下の非線形相補性問題(NCP)として表現できる:

Find $\mathbf{X}^* \in \mathbf{R}_+^{4(N+1)+5}$ such that

$$\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^*) = 0, \mathbf{X}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{F}(\mathbf{X}^*) \geq \mathbf{0} \quad (\text{D.2})$$

ここで, $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ は, 以下の様に定義されたベクトル関数である:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{d} - \mathbf{1}\rho_1 \\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{d} - \mathbf{1}\rho_2 \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{q}_2 - \mathbf{Q}_2 \\ \mu_1 \mathbf{1} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \\ \mu_2 (\mathbf{1} - \mathbf{D} \mathbf{w}_1) - \mathbf{q}_2 \\ V - v_1(\mathbf{Q}_1, \rho_1) \\ V - v_2(\mathbf{Q}_2, \rho_2) \\ \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

また, \mathbf{D} は離散化された到着時刻に関する差分演算を表す行列, $v_i(\mathbf{Q}_i, \rho_i)$ は居住地 i の間接効用を居住地人口と交通費用によって表現した(地代 r_i と交通費用 ρ_i で表現された間接効用関数に土地需給均衡条件を代入して得られる)関数である.

付録 E. 問題[EP] と緩和均衡条件の等価性

以下では, 対角化近似した均衡条件と最適化問題 [EP] が等価であることを証明する.

最適化問題[EP] の目的関数 Z は, (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) に関して凸関数である. また, 制約条件 (4.6)~(4.11) で定義される (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) の許容領域は凸集合である. 従って, [EP] の最適性の必要十分条件である Kuhn-Tucker 条件が, 対角

化近似した均衡条件と一致することを示せばよい.

問題 [EP] の Lagrangean を

$$\begin{aligned} L \equiv & Z(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + V^* \{ \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q} \} \\ & + \sum_s w_1^*(s) \{ q_1(s) + q_2(s) - \mu_1 \} \\ & + \sum_s w_2^*(s) \{ q_2(s) - \mu_2 \Delta \tau_2(s)^{(n-1)} \} \\ & + \sum_i \rho_i^*(s) \{ \mathbf{Q}_i^{(n-1)} - q_1(s) - q_2(s) \} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

と定義する. ただし, $w_1^*(s), w_2^*(s), \rho_i^*, V^*$ は, 各々, 制約条件(4.6), (4.7), (4.8), (4.10) に対する Lagrange 乗数である. この L を用いると, [EP] の Kuhn-Tucker 条件は, 以下の様に与えられる:

$$w_a(s) \frac{\partial L}{\partial w_a(s)} = 0, \frac{\partial L}{\partial w_a(s)} \leq 0, w_a(s) \geq 0 \quad \forall a, s \quad (\text{E.2})$$

$$q_i(s) \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} = 0, \frac{\partial L}{\partial q_i(s)} \geq 0, q_i(s) \geq 0 \quad \forall i, s \quad (\text{E.3})$$

$$Q_i \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial Q_i} \geq 0, Q_i \geq 0 \quad \forall i \quad (\text{E.4})$$

and (4.8), (4.10).

ここで, (E.3), (E.4) に現れる偏微分を計算すると,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(s)} = d(s) + \sum_{a=1}^i w_a^*(s) - \rho_i^* \quad \forall i, s \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -v_i(Q_i, \rho_i^{(n-1)}) + V^* \quad \forall i \quad (\text{E.6})$$

である. 従って, Lagrange 乗数 $w_a^*(s)$ を CBD 到着時刻別のリンク a の渋滞待ち時間 $w_a(s)$, ρ_i^* を居住地 i の均衡通勤費用 ρ_i , V^* を均衡効用水準 V と考えると, 上記 Kuhn-Tucker 条件は, 対角化近似した均衡条件に一致する. より具体的には, まず, (E.2) は, 渋滞待ち時間条件 (2.17), (2.19) と一致する. 次に, (E.4) は, 出発時刻選択の無裁定条件 (2.14) と一致する. 最後に, (E.5) は居住地選択の無裁定条件 (2.10) と一致する.

参考文献

- 1) Alonso, W. *Location and land use: Toward a general theory of land rent*, Harvard University press, Cambridge, 1964.
- 2) Arnott, R., De Palma, A. and Lindsey, R. "Departure time and route choice for the morning commute," *Transportation Research B*, Vol.24, pp.209-228, 1990.
- 3) Arnott, R., De Palma, A. and Lindsey, R. "A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand," *American Economic Review*,

- Vol.83, pp. 161-179, 1993.
- 4) Daganzo, C.F. "The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck," *Transportation Science*, Vol.19, pp.29-37, 1985.
 - 5) Fujita, *Urban economic theory*, Cambridge University press, 1989.
 - 6) Hendrickson, C. and Kocur, G. "Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model," *Transportation Science*, Vol.15, pp.62-77, 1981.
 - 7) Kuwahara, M. "Equilibrium queuing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak," *Transportation Science*, Vol.24, pp.217-229, 1990.
 - 8) Mun, S. "Optimal cordon pricing," *Journal of Urban Economics*, Vol.54, pp.21-38, 2003.
 - 9) Newell, G.F. "The morning commute for non-identical travelers," *Transportation Science*, Vol.21, pp.74-88, 1987.
 - 10) Smith, M.J. "The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck," *Transportation Science*, Vol.18, pp.385-394, 1984.
 - 11) Wheaton, W.C. "Land use and density in cities with congestion," *Journal of Urban Economics*, Vol.43, pp.258-272, 1998.
 - 12) Vickrey, W.S. "Congestion theory and transportation investment," *American Economic Review*, Vol.59, pp.251-260, 1969.
 - 13) 赤松隆 : "交通流の予測・誘導・制御と動的なネットワーク配分理論," 土木計画学研究・論文集 13, pp.23-48, 1996.
 - 14) 桑原雅夫 : "道路交通における出発時刻選択に関する研究解説," 土木学会論文集, IV-41, pp.73-84, 1998.
- (2006. 11. 受付)

Irreducibility of Dynamic Traffic Conditions in a Model of Residential Location and Departure Time Choice Equilibrium with Bottleneck Congestion

Takashi AKAMATSU and Yuki TAKAYAMA

The standard residential location theory describes transportation cost in a static framework, assuming that detailed transportation conditions have negligible significance. Recent studies on bottleneck congestion, however, indicate that the static transportation modeling may give a large estimation error. This paper aims to clarify the urban conditions in which the conventional location theory leads to significant biases in the transportation cost. To achieve the purpose, we present a residential location equilibrium model with a bottleneck congestion model. By comparing the transportation cost obtained from our model to that in conventional models, we specify the urban conditions in which conventional theory yields biased results.