

# 都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐： 群論的分岐理論によるアプローチ

池田 清宏<sup>1</sup>・河野 達仁<sup>2</sup>・赤松 隆<sup>3</sup>・柳本 彰仁<sup>4</sup>・八巻 俊二<sup>5</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

<sup>2</sup>正会員 博(学術) 東北大学准教授 東北大学大学院工学研究科(同上)

<sup>3</sup>正会員 工博 東北大学教授 東北大学大学院情報科学研究科(同上)

<sup>4</sup>学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(同上)

<sup>5</sup>学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻(同上)

近年、規模の経済と輸送費および要素移動の相互作用による都市の集積・分散を内生的に解明する分析が盛んに行われている。この分析モデルの代表例である Krugman の Core-Periphery モデルは複数均衡解を持ち、その都市集積・分散過程は輸送費変化による分岐を伴うことが知られている。しかしながら、その集積・分散過程は主に、都市数が 2 の場合しか明らかにされていない。本論文では、Core-Periphery モデルを多都市モデル、具体的には円周上に均等に位置する都市数  $2^2, 2^3, 2^4$  モデルへと拡張し、対称性を持つ系の一般論である群論的分岐理論を用いることにより、均衡解の分岐過程のメカニズムを解明する。その結果、輸送費の変化による周期倍分岐に代表される多段階の対称性破壊分岐を伴う都市の集積・分散の空間的分布の変化を示す。

**Key Words** : 分岐解析, 群論的分岐理論, 人口分析, Core-Periphery モデル, 都市の集積・分散

## 1. はじめに

大規模な交通施設整備は都市間の人口分布を大きく変化させる。例えば、大規模交通施設が隣接した都市間に整備されると、片方の都市が成長してもう一方が衰退する「ストロー効果」が生じることがある。また、リニアモーターカー等の高速交通施設整備は人口の一極集中を加速させる可能性がある。そのため、人口集積のある都市およびその集積の程度を予測することが、交通施設整備の経済効果を捉えるうえで必要となる。そこで都市集積現象を予測するために、都市集積メカニズムを解明する理論構築が重要となってくる。

交通施設整備に伴う都市集積メカニズムを説明する代表的研究として、Krugman(1991)<sup>1),2)</sup>があげられる。Krugman(1991)は Dixit and Stiglitz(1977)<sup>3)</sup>の独占的競争モデルを 2 都市モデルに仮定し、都市間の輸送費変化に伴う工業の集積・分散の進行過程を分析した。この Krugman のモデルは Core-Periphery モデル(以下、CP モデルと略)と呼ばれ、都市集積について示唆に富む分析結果をもたらしている。その代表が、輸送費をパラメータとする分岐現象である。具体的には、対称な空間条件を持つ 2 都市において輸送費低減があると、都市集積力が強くなり対称均衡が不安定となる。その結果、分岐によっていずれかの都市に人口が集中する(i.e., 片方の都市人口はゼロになる)ことが示されている。CP モデルの特徴は、不完全競争と生産における

規模の経済性から都市が集積の経済を持ち、一方で輸送費が人口分散力として働くことである。その後、CP モデルに対して、労働者や資本といった生産要素の移動可能性や効用関数や生産関数を変更したバラエティに富むモデルが多く開発されている。これらのモデルは New Economic Geography (NEG) モデルと呼ばれ、都市の集積・分散メカニズムに関する知見が NEG モデルを用いて多く蓄積されている(例えば、文献<sup>4),5),6),7)</sup>。

しかし、都市の集積・分散過程メカニズムを NEG モデルにより理論分析している従来研究の多くは、都市数を 2 都市に限っている。2 都市モデルの分析では、より一般的な多都市モデルにおける輸送費変化に伴う都市集積・分散の進行過程特性(i.e. 輸送費をパラメータとする分岐経路の規則性とメカニズム)は解明できない。2 都市よりも多くの都市を扱う研究としては、Fujita et al. (1999)<sup>4)</sup>の 6 章において 3 都市および 12 都市の分析がなされている。ただし、輸送費与件の都市間人口分布の均衡解は示されているものの、輸送費変化に伴う分岐経路は分析されていない。また、Krugman (1993,1996)<sup>8),9)</sup>では、連続空間を対象とした分析も行われている。ただし、集積・分散メカニズムを捉える理論分析としては、人口が一様分布である均衡点において線形近似した局所的分析がなされているのみで、人口が一様分布でないケースを含む大域的分析になっていない。また、Fujita et al. (1999)<sup>10)</sup>においては、複数都市の階層構造形成メカニズムが人口をパラメータ

とした分岐解析を用いて示されている。しかし、系統的な分岐経路追跡は行われておらず、特定の分岐経路が数値計算に基づいて示されているだけである。結局、いずれの分析も分岐経路を系統的かつ網羅的に求めている。そのため、従来研究では多都市モデルにおける輸送費変化に伴う都市集積・分散の進行過程の一般的規則は明らかになっていない。

以上の背景のもと、本論文は、多都市モデルにおける輸送費変化に伴う都市集積・分散の進行過程の性質 (i.e. 都市集積・分散パターン変遷の規則性とメカニズム) を明らかにすることを目的とする。そのために、CPモデルを対称な空間条件を持つ  $n (= 4, \dots, 2^k)$  都市モデルへと拡張し、輸送費をパラメータとした分岐解析を行う。本研究で内生的に決定される都市集積・分散パターンは、正の人口を持つ都市の位置、その都市数および規模であり、その都市集積・分散パターンの輸送費変化に伴う変遷が分析対象である。

なお、本研究とほぼ並行して、Tabuchi and Thisse (2006)<sup>11)</sup> は本研究と同様の研究目的で、円周上の対称な  $n (= 4, \dots, 2^k)$  都市を含む NEG モデルに関して輸送費をパラメータとした分岐解析を行っている。しかしながら、本研究と Tabuchi and Thisse を比較すると、1) 分岐解析法、2) 分岐経路の網羅性、3) 分析対象モデルの3点に違いがある。まず 1) 分岐解析法については、本研究は後述するように計算分岐理論と群論的分岐理論を組み合わせた数値解析を用いる。一方、Tabuchi and Thisse は解析的に分岐経路を求めている。本研究の数値解析法は解析的に求解するよりも強力であり、Krugman の CP モデルに限らず、あらゆる NEG モデルの分岐経路を追跡可能な一般的方法である。次に 2) 分岐経路の網羅性については、本研究は CP モデルが持つすべての分岐経路を系統的かつ網羅的に求めている。しかし、Tabuchi and Thisse は一部の分岐経路 (具体的には周期倍分岐を示す経路) に分析を限っている。最後に 3) 分析対象モデルについては、本研究で用いる CP モデルの消費者には、所得増加により財消費が増加する効果 (財消費における所得効果) がある。一方、Tabuchi and Thisse は解析的に分岐経路を求める目的から準線形効用関数を仮定しており、財消費における所得効果がない。そのため CP モデルは、所得増加が財消費を増加させて都市に企業を集積させる一般均衡的波及メカニズムを持つ分、Tabuchi and Thisse より豊富な経済学的構造を持つ。その結果 CP モデルは、より複雑な分岐経路が得られることが予想される。

本論文で用いる分岐解析法は、計算分岐理論<sup>12)</sup>と群論的分岐理論<sup>13),14)</sup>を適切に組み合わせた方法である。前者の計算分岐理論とは、非線形方程式の局所的分岐経路追跡法に基づく数値計算手法である。著者らは既

にこの方法を4都市のCPモデルに適用して分岐経路を求めている<sup>15)</sup>。後者の群論的分岐理論は、構造力学系分野で、対称性を持つ系の分岐メカニズムの解析に利用されている。具体的には、対称性低下を伴いながら進行する分岐 (対称性破壊分岐) により、パターン流の発生や構造や材料の分岐座屈が引き起こされることが解明されている。本論文は、この群論的分岐理論を対称な  $n (= 4, \dots, 2^k)$  都市を含む CP モデルへ適用する。その結果、対称性破壊分岐と周期倍分岐が同様に発生することを示し、それらの分岐が多段階に生じることで現れる都市集積・分散の進行過程を明らかにする。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章は、CPモデルを簡単に説明する。第3章は、非線形連立方程式のパラメータ変化に伴う均衡解の変遷を数値的に追跡する一般的方法を述べる。第4章は、以降の議論のために均衡解の分類を示すとともに、解の安定性の定義を行う。第5章は群論的分岐理論を用いて対称性破壊分岐を説明する。第6章は、第5章の一般理論をわかりやすく示す例として4都市モデルを対象とした分析を示す。第7章は、第5章の群論的分岐理論と計算分岐理論を組み合わせ、多都市のCPモデルの分岐解析を行う。第8章は、分岐解析で得られたCPモデルの分岐経路のうち安定なもののみを整理し、輸送費低下に伴う都市の集積・分散の進行過程の特徴について経済学的含意を併せて議論する。第9章は結論である。

## 2. Core-Periphery モデル

円周上に均等に位置する互いに対等な  $n$  個の都市の人口集積の支配方程式を Core-Periphery モデル (CP モデル) に基づいて誘導する。

### (1) 一般均衡の枠組み

CP モデルは以下に示す一般均衡の枠組みを持つ。詳細は Krugman(1991)<sup>1)</sup> または Fujita et al. (1999)<sup>4)</sup> の5章に譲る。

- 経済は、独占的競争が行われる工業部門と完全競争的な農業部門の2つの部門からなる。
- 経済全体では、工業労働者は  $\mu$ 、農業労働者は  $1 - \mu$  存在する。
- 工業労働者は自身の効用を最大化するように自由に都市間を移動することができるが、農業労働者は移動不可能で、すべての都市に均等に分布しており、賃金1である。
- 工業品の輸送には輸送費がかかり、農業品の輸送には輸送費はかからないこととする。

本研究では、 $n$  個の都市が円周に沿って等間隔に存在する、いわゆる、競技場経済を考える。すなわち、都市  $r$  と都市  $s$  の間の輸送費  $T_{rs}$  を

$$T_{rs} = e^{\tau|r-s|}, \quad (r, s = 1, \dots, n) \quad (1)$$

とする。ここで、 $\tau$  は輸送費パラメータであり、 $|r-s|$  は都市  $r$  から都市  $s$  に至る最短距離である。

## (2) 支配方程式の定式化

消費者の効用最大化行動、生産者の利潤最大化行動、氷塊輸送を考慮したこの CP モデルにおいて、都市  $r$  の工業労働者の賃金  $w_r$  は以下に示す連立方程式によって決定される。

$$Y_r = \mu \lambda_r w_r + (1 - \mu)/n \quad (2)$$

$$G_r = \left[ \sum_{s=1}^n \lambda_s (w_s T_{sr})^{1-\sigma} \right]^{1/(1-\sigma)} \quad (3)$$

$$w_r = \left[ \sum_{s=1}^n Y_s T_{rs}^{1-\sigma} G_s^{\sigma-1} \right]^{1/\sigma} \quad (4)$$

ここで、 $Y_r$  は都市  $r$  の所得、 $G_r$  は都市  $r$  の工業品価格指数、 $T_{sr}$  は工業品を都市  $s$  から都市  $r$  まで輸送したときの輸送費、 $\sigma$  は任意の差別化された 2 財間の代替弾力性である。 $\lambda_r$  は都市  $r$  における工業人口全体に対する割合であり、すなわち次式を満足する。

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \quad (5)$$

都市  $r$  の実質賃金は、次式により表される。

$$\omega_r = w_r G_r^{-\mu} \quad (6)$$

消費者は、都市  $r$  で決定される実質賃金  $\omega_r$  を比較して、実質賃金の高い都市に移住する。したがって、均衡点においては次の相補性条件式が成立する。

$$\begin{cases} \bar{\omega} - \omega_r = 0, & (\lambda_r > 0) \\ \bar{\omega} - \omega_r \geq 0, & (\lambda_r = 0) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\omega}$  は均衡実質賃金である。すなわち、都市  $r$  に正の人口がある場合には、 $\omega_r$  は均衡実質賃金  $\bar{\omega}$  と等しく、都市  $r$  の人口がゼロである場合には、 $\omega_r$  は均衡実質賃金  $\bar{\omega}$  以下となる。

## 3. 非線形支配方程式と解曲線の追跡

CP モデルの非線形連立方程式とその増分表示を示し、均衡解曲線の追跡法についてまとめる。分岐挙動を求める計算分岐理論<sup>12)</sup>の CP モデルへの適用の詳細については、著者等の論文<sup>15)</sup>に譲る。以下、非線形方程式の解曲線の追跡に関連した

- 増分支配方程式の誘導
- 滑らかな解曲線の追跡
- 特異点の判定
- 分岐経路の探索

という項目についてまとめることとする。

### (1) 非線形支配方程式

式 (7) に示した相補性条件は、等式条件

$$(\bar{\omega} - \omega_r)\lambda_r = 0, \quad (r = 1, \dots, n) \quad (8)$$

と、不等式条件式

$$\bar{\omega} - \omega_r \geq 0, \quad \lambda_r \geq 0, \quad (r = 1, \dots, n) \quad (9)$$

とに書き直すことができる。

2.(1) 節で導入した一般均衡の枠組みは、 $n$  次元の非線形支配方程式 (8) と人口一定の条件式 (5) からなる  $n+1$  次元の非線形連立方程式<sup>1)</sup>に帰着できる。

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}, \bar{\omega}, f) \\ = \begin{pmatrix} (\bar{\omega} - \omega_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n, f))\lambda_1 \\ \vdots \\ (\bar{\omega} - \omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n, f))\lambda_n \\ F(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

ここで  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ 、 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$  である。また、 $f$  はあるパラメータであり、この論文では輸送費パラメータ  $\tau$  を用いる。すなわち、 $f = \tau$  である。

非線形連立方程式 (10) の解の中で、不等式条件式 (9) を満たさない解は物理的に起こり得ない許容されない解として排除する。計算分岐理論では等式条件のみを取り扱うのに対し、CP モデルの定式化においては不等式条件式 (9) も用いることが特徴的である。

### (2) 増分支配方程式

CP モデルの解曲線の追跡に先立ち、その増分表示を求めておく。

非線形支配方程式 (10) を増分表示すると、

$$\delta \mathbf{F}(\delta \boldsymbol{\lambda}, \delta \bar{\omega}, \delta f) = J \delta \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} \delta \bar{\omega} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} \delta f = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\delta F(\delta \boldsymbol{\lambda}) = \delta \lambda_1 + \dots + \delta \lambda_n = \mathbf{1}^T \delta \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (12)$$

となる。ここで、 $J$  はヤコビ行列であり、

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \bar{\omega} - \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\omega} - \omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{\omega} - \omega_n \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \omega_{1,1}\lambda_1 & \omega_{1,2}\lambda_1 & \dots & \omega_{1,n}\lambda_1 \\ \omega_{2,1}\lambda_2 & \omega_{2,2}\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n,1}\lambda_n & \dots & \dots & \omega_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\bar{\omega} - \omega_1, \dots, \bar{\omega} - \omega_n) \\ &\quad - \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>1)</sup> 非線形方程式の縮約に基づく具体的な式の誘導は<sup>15)</sup>に譲る。

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} = \lambda, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} = - \begin{pmatrix} (\partial \omega_1 / \partial f) \lambda_1 \\ \vdots \\ (\partial \omega_n / \partial f) \lambda_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

である．ここで， $\omega_{i,j} = \partial \omega_i / \partial \lambda_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )， $\Omega = (\omega_{i,j} \mid i, j = 1, \dots, n)$  であり， $\text{diag}(\dots)$  は括弧内の成分からなる対角行列を表す．

### (3) 滑らかな解曲線の追跡

非線形連立方程式 (10) を満たす解を，増分方程式 (11) と (12) を用いて Newton-Raphson 法などの反復解法により求め，その解の中で不等式条件式 (9) を満足するものを取り出すことにより，物理的に許容される解を求める．

ヤコビ行列  $J$  が正則である場合には，式 (11) を  $\delta \lambda$  について解いた式

$$\delta \lambda = -J^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} \delta \bar{\omega} - J^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} \delta f \quad (15)$$

を，式 (12) に代入すると，

$$A \delta \bar{\omega} + B \delta f = 0 \quad (16)$$

となる．ここで，

$$A = \mathbf{1}^T J^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}}, \quad B = \mathbf{1}^T J^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} \quad (17)$$

である．式 (16) を用いて，非線形方程式 (11) から  $\delta \bar{\omega}$  を消去することにより得た，

$$J \delta \lambda + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} - \frac{B}{A} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} \right) \delta f = \mathbf{0} \quad (18)$$

という  $\delta \lambda$ ,  $\delta f$  に関する増分方程式の解として解曲線を求めればよい．

### (4) 特異点の判定

非線形支配方程式 (10) の解は，ヤコビ行列  $J = J(\lambda, \bar{\omega}, f)$  が特異である点において，特異性条件式

$$\det J(\lambda, \bar{\omega}, f) = 0 \quad (19)$$

を満足する．

特異点において，ヤコビ行列  $J$  の固有値を  $e_i$  とし，固有ベクトルを  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とすると，標準固有値問題は

$$J \psi_i = e_i \psi_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20)$$

となる．このとき，特異点の条件は，少なくとも 1 個以上の固有値がゼロとなること，すなわち，

$$e_i = 0, \quad (i = 1, \dots, M) \quad (21)$$

が成り立つことである．ここで  $M$  は特異点の多重度である．

### (5) 分岐経路の探査

分岐点において枝分かれする分岐経路を追跡することを考える．

単純分岐点の場合は，ゼロ固有値に対応する固有ベクトル  $\psi_1$  の方向に分岐解を探査すればよい．

2 重分岐点では，ゼロ固有値に対応する 2 個の固有ベクトル  $\psi_1, \psi_2$  が存在するので，その線形結合の方向に探査する．全ての線形結合の方向に解が存在するわけではない．後述の群論的分岐理論は解の方向をこの問題の答えを与えるという意味で有用である．

## 4. 解の分類と解の安定性

CP モデルの分岐解析において，色々な種類の解に遭遇する．この章では，理論的基礎として CP モデルの解を分類し，解の安定性について議論しておく．解の分類は，人口がゼロの都市の有無と支配方程式の特異性に着目して行う．

### (1) 人口がゼロの都市の有無による分類

非線形方程式 (10) の解は，全ての都市の人口が正であるか，人口がゼロの都市があるかにより，下記のように分類される．

$$\begin{cases} \text{内点解： 全ての都市の人口が正である解} \\ \text{端点解： 人口がゼロの都市がある解} \end{cases} \quad (22)$$

#### a) 内点解の性質

全ての都市に人口が存在する内点解に対しては，

$$\lambda_r > 0, \quad (r = 1, \dots, n) \quad (23)$$

であるので，式 (10) より，

$$\bar{\omega} - \omega_r = 0, \quad (r = 1, \dots, n) \quad (24)$$

が成り立ち，不等式条件式 (9) も自動的に満足される．内点解に対しては，ヤコビ行列 (13) は下記の形になる．

$$J = -\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega \quad (25)$$

特に，全ての都市が同一の人口を持つ人口一様分布解 ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$ ) 上では，ヤコビ行列は，

$$J = -\frac{1}{n} \Omega \quad (26)$$

という対称行列となる．

#### b) 端点解の性質

$m$  都市以降の人口が消失した端点解

$$\begin{cases} \lambda_r > 0, & (r = 1, \dots, m) \\ \lambda_r = 0, & (r = m + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (27)$$

を考える．一般的には，最初の  $m$  都市だけ人口が存在するという状況ではないが，適宜変数の順番を入れ替えるとすると，このように仮定しても一般性を失わない．

このとき、相補性条件式 (7) より、

$$\begin{cases} \bar{\omega} - \omega_r = 0, & (r = 1, \dots, m) \\ \bar{\omega} - \omega_r \geq 0, & (r = m + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (28)$$

が成り立つので、ヤコビ行列は

$$J = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & \Phi & & & \\ & & & \bar{\omega} - \omega_{m+1} & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ O & & & 0 & & \bar{\omega} - \omega_n \end{array} \right) \quad (29)$$

という形になる。ここで、

$$\Phi = -\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \tilde{\Omega} \quad (30)$$

$$\tilde{\Omega} = - \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \cdots & \omega_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{m,1} & \cdots & \omega_{m,n} \end{pmatrix} \quad (31)$$

である。

## (2) 自明解と非自明解

非線形方程式 (8) は、因数分解された形となっており、後述するように、パラメータ  $f$  を変化させてもそのパターンが崩れない人口一定の解を持つ。この人口一定の解の存在がこのモデルにおいて特徴的である。この種の解の存在に対応し、解を下記の 2 種類に分類する。

$$\begin{cases} \text{自明解：} & \text{人口一定の解} \\ \text{非自明解：} & \text{人口が変化する一般の解} \end{cases} \quad (32)$$

自明解としては、下記の 2 種類の解が代表的である。

- 人口一様分布解：全ての都市が同一の人口を持つ内点解

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n \quad (33)$$

- 一極集中解：1 つの地域に全人口が集積してしまう端点解

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (34)$$

6 都市の場合に対し、図-1(a) に人口一様分布解を、(b) に一極集中解を、(c) に非自明解の一例をそれぞれ示す。

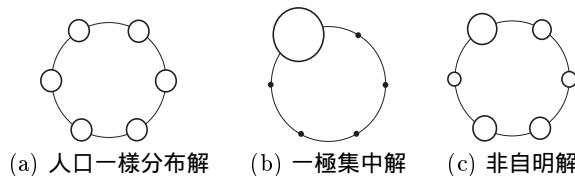


図-1 代表的な自明解 (a),(b) と非自明解 (c) (6 都市)

## (3) 支配方程式の特異性による分類

非線形支配方程式 (10) の解は、ヤコビ行列  $J = J(\lambda, \bar{\omega}, f)$  が正則であるか特異であるかにより、下記のように分類される。

$$\begin{cases} \text{通常点：} & J \text{ が正則} \\ \text{特異点：} & J \text{ が特異} \end{cases} \quad (35)$$

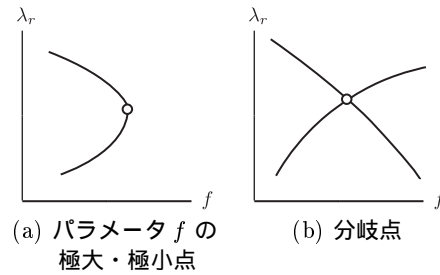
本モデルの特異点は以下のように分類できる。

$$\begin{cases} \text{パラメータ } f \text{ の極大・極小点 } (M = 1) \\ \text{人口の消失点 } (M = 1) \\ \text{分岐点} \begin{cases} \text{単純分岐点 } (M = 1) \\ \text{2重分岐点 } (M = 2) \\ \vdots \end{cases} \end{cases} \quad (36)$$

本論文で取り扱う  $n$  都市モデルのように正  $n$  角形状の対称性を持つ系では、一般的には多重度は  $M = 1, 2$  であることを 6 章で具体的に示す。また、人口の消失点や、4.(1) 節で導入した内点解と端点解の存在が、CP モデル固有の性質である。

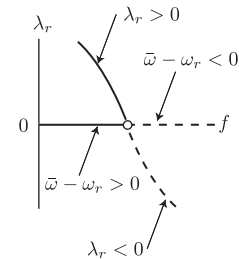
### a) パラメータ $f$ の極大・極小点

パラメータ  $f$  の極大・極小点では、ヤコビ行列  $J$  の固有値  $e_i$  の符号が変化するので、現在安定な解は必ず不安定となり、一方、現在不安定な解は安定となる可能性がある（そのまま不安定な場合もある）。このように、パラメータ  $f$  の極大・極小点では、安定な解が途絶えてしまう。パラメータ  $f$  の極大・極小点の一例を図-2(a) に示す。



(a) パラメータ  $f$  の極大・極小点

(b) 分岐点



(c) 人口の消失点 (自明解と非自明解との交点)

図-2 特異点の分類

### b) 分岐点

分岐点は、さらに下記のように分類される。

$$\begin{cases} \text{単純分岐点 } (M = 1) \\ \text{2重分岐点 } (M = 2) \end{cases} \quad (37)$$

分岐経路では系の対称性が低下する．この対称性の低下の仕組みは5章で取り上げる．

### c) 人口の消失点

都市の人口がゼロとなるという人口の消失点 ( $\lambda_r = 0$ ) では，下記の2種類の特異点が発生する．

$$\begin{cases} \text{自明解と非自明解との交点} \\ \text{人口が正から負へと変化する点} \end{cases} \quad (38)$$

自明解と非自明解との交点の模式図を図-2(c)に示す．横軸上の自明解 ( $\lambda_r = 0$ ) では， $\bar{\omega} - \omega_r$  の符号が変化し，実線で示す式 (9)，すなわち， $(\bar{\omega} - \omega_r > 0)$  を満たす許容される解から，点線で示す式 (9) を満たさない許容されない解 ( $\bar{\omega} - \omega_r < 0$ ) へと移行する．一方，非自明解では， $\lambda_r$  の符号が変化し，実線で示す許容される解 ( $\lambda_r > 0$ ) から点線で示す許容されない解 ( $\lambda_r < 0$ ) へと移行する．この特異点については，下記の2種類の解釈が成り立つ

- 非線形方程式 (8) を満足する全ての解に着目すると，この特異点は分岐点である．
- 許容される解だけに着目すると，この特異点は許容される解が折れ曲がる点となっている．

本論文では，後者の解釈を採用する．

### (4) 局所安定性

Replicator dynamics に基づく，CP モデルの均衡点の局所安定性条件<sup>16),17)</sup>を導入し，その安定性条件を均衡方程式 (8) のヤコビ行列を用いて表すこととする．安定な解では不等式条件式 (9) が自動的に満足され，さらに，分岐解析と整合することが，この安定条件の優れた特質である．安定解が現実起こりえる解であり，一方，安定でない解，すなわち不安定解は現実には起こりえない解である．

人口の動態方程式として次式を仮定する．

$$\dot{\lambda}_i = (\omega_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - \hat{\omega})\lambda_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (39)$$

ただし，

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \quad (40)$$

ここで均衡点においては式 (7) が成立するため，式 (7) を式 (40) に代入すると

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\omega} = \bar{\omega} \quad (41)$$

が均衡点で成立する．

式 (39) の意味合いは，平均より高い実質賃金の地域の人口伸び率はその平均からの乖離に依存するという動的方程式となっており，次式が成立する．

$$\sum_{i=1}^n \dot{\lambda}_i = 0 \quad (42)$$

安定行列は

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \omega_1 - \bar{\omega} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 - \bar{\omega} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_n - \bar{\omega} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial(\omega_1 - \bar{\omega})}{\partial \lambda_1} \lambda_1 & \frac{\partial(\omega_1 - \bar{\omega})}{\partial \lambda_2} \lambda_1 & \dots & \frac{\partial(\omega_1 - \bar{\omega})}{\partial \lambda_n} \lambda_1 \\ \frac{\partial(\omega_2 - \bar{\omega})}{\partial \lambda_1} \lambda_2 & \frac{\partial(\omega_2 - \bar{\omega})}{\partial \lambda_2} \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\omega_n - \bar{\omega})}{\partial \lambda_1} \lambda_n & \dots & \dots & \frac{\partial(\omega_n - \bar{\omega})}{\partial \lambda_n} \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(\omega_1 - \bar{\omega}, \dots, \omega_n - \bar{\omega}) + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\Omega \\ &= -J \end{aligned} \quad (43)$$

である (式 (13) と (41) 参照)．安定行列  $B$  の固有値が全て負の実部を持てば，解は局所的に安定である．一方，一つでも正の実部を持てば，不安定である．行列  $B = -J$  であるので，ヤコビ行列  $J$  の固有値が全て正の実部を持てば，解は局所的に安定である．

## 5. 群論的分岐理論による分岐の記述

対称性を持つ系の分岐の一般理論である群論的分岐理論を本モデルへ適用することにより，本モデルの分岐の仕組みを明らかにする．

### (1) 対称性を表す群

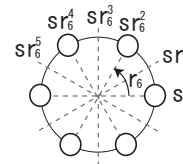


図-3 正6角形状に位置する都市とその幾何学的変換

本研究で扱うモデルは，図-3に示すような  $n$  個の都市が円周に沿って等間隔に存在する状況を考えている．この場合，正  $n$  角形状の対称性を表す2面体群  $G = D_n$  が対称群となる．

2面体群  $D_n$  は

$$D_n = \{e, r_n, \dots, r_n^{n-1}, s, sr_n, \dots, sr_n^{n-1}\} \quad (44)$$

と定義される．ここでこの式の右辺の各要素は下記の幾何学的対称性を表す座標変換である．

- 何も操作しない変換 (恒等変換) :  $e$
- 正  $n$  角形の中心のまわりに反時計方向に  $2\pi/n$  回転する変換 (並進変換) :  $r_n$  ( $r_n^i$ : 変換を  $i$  回行う)
- 軸上に鏡を置いて映した像への変換 (鏡映変換) :  $s$

図-3に， $n = 6$  の場合の座標変換要素を示す．



$n$  都市モデルに対応する群  $D_n$  不変解からは, 対称性が低い解, すなわち分岐解が分岐により発生する. この分岐解は次数  $m$  が  $n$  の約数である 2 面体群

$$D_m^k = \{r_m^i, sr_m^i r_n^{k-1} \mid i = 0, 1, \dots, m-1\} \quad (45)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n/m)$$

や巡回群

$$C_m = \{r_m^i \mid i = 0, 1, \dots, m-1\} \quad (46)$$

に関して不変である. 群  $D_m^k$  において,  $m$  が鏡映変換の軸の個数を,  $k$  が軸の方向を表す. ちなみに,  $n = 4$  に対する分岐解の対称性を表す部分群を図-4 に示す. 図中の の大きさにより, 人口の大きさを示す.

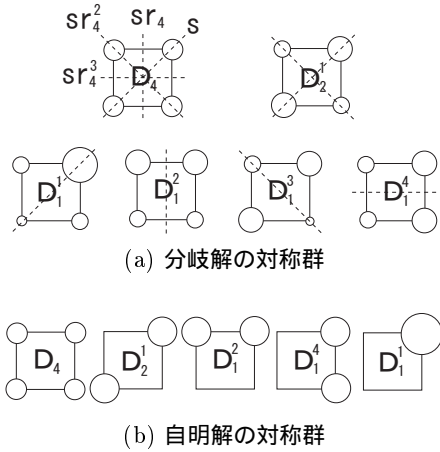


図-4  $n = 4$  の場合の分岐解と自明解の対称群

## (2) 方程式の対称性

一様な安定状態にある系が, パラメータがある値を超えると不安定化し, あるパターンを持つ別な安定解が出現することが知られている. これはパターン形成と呼ばれる現象であり, その仕組みを記述する理論として群論的分岐理論が発展した.

非線形方程式 (10) の対称性は, ある群に関する同変性

$$T(g) \mathbf{F}(\lambda, \bar{\omega}, f) = \mathbf{F}(T(g)\lambda, \bar{\omega}, f), \quad \forall g \in G \quad (47)$$

により表される. ここに  $T(g)$  は対称性を表す座標変換行列であり,  $g$  は対称性を表す座標変換要素であり,  $G$  はこの要素からなるある群である. ただし,  $\bar{\omega}$  と  $F(\lambda)$  は  $g$  が引き起こす座標変換要素に対して不変である.

同変条件式 (47) が成り立つとき, 増分方程式 (11) の群同変性より,  $T(g)\lambda = \lambda$  を満足する  $G$  不変なある解  $(\lambda, f)$  に対して, ヤコビ行列は, 対称条件式

$$T(g)J = JT(g), \quad \forall g \in G \quad (48)$$

を満足し,  $\partial \mathbf{F} / \partial \bar{\omega}$  と  $\partial \mathbf{F} / \partial f$  は, 不変条件式

$$T(g) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}}, \quad T(g) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f}, \quad \forall g \in G \quad (49)$$

を満足する.

同変条件式 (47) を満足する系の分岐によるパターン形成は下記の性質を満たす<sup>14)</sup>.

- 系の対称性は分岐を起こすまでは保持される.
- 系の対称性や解の個数は分岐点で変化する.
- 系の安定性は特異点で変化する.
- 通常点では, 系の対称性・安定性や解の個数は変化しない.

具体的な分岐の仕組みは, 対象とする系がどのような対称性を持つかにより異なる個別論であり, 系毎に調べられている. その具体例は次節で CP モデルに対して紹介する.

## (3) 多段階の対称性破壊分岐

$D_n$  不変な経路の分岐点から分岐した後の対称性は低下し, その対称性は  $D_n$  の部分群により表される. 同様に, 分岐経路からさらに分岐する経路の対称性を求めていくことにより, 階層的分岐の規則が求められる<sup>14)</sup>.

都市数  $n = 4$  に対する, 地域が全て同じ人口を持つ自明解 ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 1/4$ ) からの分岐の模式図を図-5 に示す. 図中一番左側の  $D_4$  不変な 4 都市が等価な解から, 実線の矢印で示すような多段階の分岐を起こすことにより, 色々な集積パターンが生み出されている. この種の図より, 人口が  $n$  都市に分布している状態から一極集中するまでの分岐過程の仕組みを知ることができる.

都市数  $n = 4$  の自明解は, 図-4 (b) に示す 5 つである (都市 1 (右上) が人口最大としたとき). このモデルは, ある地域の人口がゼロとなる場合に自明解と交わる場合があるという特徴をもっている. 図中に点線の矢印により, この種の交点を示す.

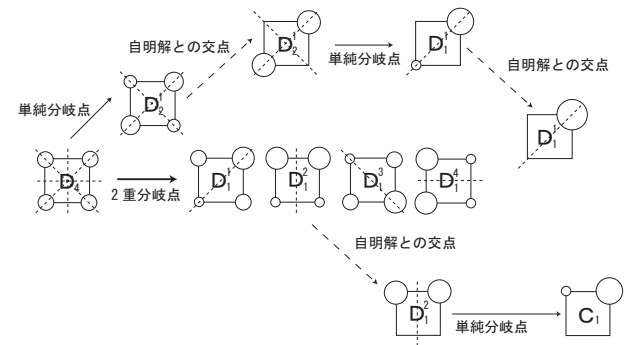


図-5 4 都市 ( $n = 4$ ) の多段階の対称性破壊分岐の模式図

## (4) 周期倍分岐

多段階の対称性破壊分岐の代表例としては, 周期倍分岐が挙げられる. この分岐は,  $n = 2^k$  の場合に発生し,

$$D_{2^k} \longrightarrow D_{2^{k-1}} \longrightarrow D_{2^{k-2}} \longrightarrow \dots \quad (50)$$

という形で対称性を漸次喪失する形で進行する. 分岐により, 同一のパターンが現れる周期が倍々になるこ

とから周期倍分岐と呼ばれている。図-6に都市数  $n = 8 = 2^3$  の場合の周期倍分岐の模式図を示す。

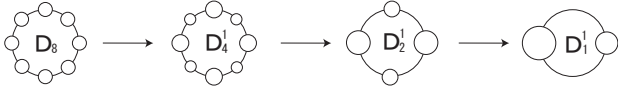


図-6 都市数  $n = 8$  の場合の周期倍分岐の模式図

## 6. 4都市モデルでの分岐の記述例

式 (48) のヤコビ行列の対称条件を本モデルに対して適用することにより，本モデルの分岐の仕組みを調べてみる。ここでは，簡単な例として都市数  $n = 4$  の場合を考えることとする。ちなみに，この議論は任意の  $n(\geq 3)$  に対しても容易に拡張可能である。

- (1) 増分支配方程式の対称性と対称座標系への変換  
 $n = 4$  の場合に，未知変数ベクトルを

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T \quad (51)$$

とすると，表現行列は次式となる。

$$T(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(r_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

一様な自明解  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$  上において，ヤコビ行列  $J = (J_{ij} \mid i, j = 1, \dots, 4)$  を誘導し，対称条件 (48) を用いると，ヤコビ行列の具体形が

$$J = \begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix} \quad (53)$$

という形になる。ここで， $a = -\omega_{1,1}/4 = \dots$  である。

また，対称条件式 (49) より，

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} = (d, d, d, d)^T, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} = (e, e, e, e)^T \quad (54)$$

となる。ここで，

$$d = -\frac{1}{4} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\omega}}, \quad e = -\frac{1}{4} \frac{\partial \omega}{\partial f} \quad (55)$$

である。

座標変換

$$\lambda = H \mathbf{Q} \quad (56)$$

を考える。ここで， $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_4)^T$  は対称座標系であり，座標変換行列  $H$  は次式となる。

$$H = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (57)$$

増分支配方程式 (11) をこの座標系に変換し，ヤコビ行列  $J$  の具体形 (53) を用いると，下記のように変形できる。

$$\begin{aligned} H^T \delta \mathbf{F}(\delta \lambda, \delta f) &= H^T J H \delta \mathbf{Q} + H^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\omega}} \delta \bar{\omega} + H^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} \delta f \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix} \delta \mathbf{Q} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2d \end{pmatrix} \delta \bar{\omega} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2e \end{pmatrix} \delta f = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (58)$$

ここで，ヤコビ行列  $J$  の対角成分，すなわち，固有値は

$$\begin{cases} e_1 = a + c - 2b: & \text{(単純根)} \\ e_2 = e_3 = a - c: & \text{(2重根)} \\ e_4 = a + c + 2b: & \text{(単純根)} \end{cases} \quad (59)$$

である。

人口一定の条件式 (5) は，式 (56) の対称座標系では，

$$\delta \lambda_1 + \delta \lambda_2 + \delta \lambda_3 + \delta \lambda_4 = 2\delta Q_4 = 0 \quad (60)$$

となる。この条件式  $\delta Q_4 = 0$  を用いると，増分方程式 (58) は，下記の4つの式に分解する ( $e_2 = e_3$ )。

$$e_1 \delta Q_1 = 0 \quad (61)$$

$$e_2 \delta Q_2 = 0 \quad (62)$$

$$e_3 \delta Q_3 = 0 \quad (63)$$

$$2d \delta \bar{\omega} + 2e \delta f = 0 \quad (64)$$

式 (61)~(64) はブロック対角形と呼ばれる標準形であり，異なる対称性を持つブロック毎<sup>2</sup>に式が分解する枠組みを示しており，対称性を持つ系の分岐の議論において重要である<sup>18)</sup>。

- (2) 分岐解の分類

式 (61)~(64) より，一様解  $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 1/4$  上の解は

$$\begin{cases} e_1 \neq 0, \quad e_2 = e_3 \neq 0 & \text{通常解} \\ e_1 = 0 & \text{単純分岐点} \\ e_2 = e_3 = 0 & \text{2重分岐点} \end{cases} \quad (65)$$

と分類できる。

- a) 通常解

通常解は一様解  $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 1/4$  から分岐点を除外したものであり， $\delta \bar{\omega}$  と  $\delta f$  の関係は，式 (64) により与えられる。

<sup>2</sup> この場合には，成分ごとに式が分解しているが，一般的にはブロック毎に分解する性質がある。

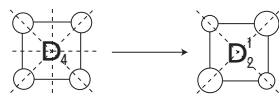


b) 単純分岐点

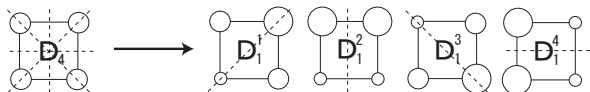
単純分岐点では、

$$\delta\lambda = \begin{pmatrix} \delta\lambda_1 \\ \delta\lambda_2 \\ \delta\lambda_3 \\ \delta\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

の方向に1本の分岐解が存在する。図-7(a)にこの単純分岐の模式図を示す。



(a) 単純分岐点



(b) 2重分岐点

図-7 4都市均等な状況からの対称性破壊分岐の模式図

c) 2重分岐点

2重分岐点では、

$$\delta\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (67)$$

の方向に4本の分岐解が存在する。図-7(b)にこの2重分岐の模式図を示す。

d) 多段階の分岐

図-7のような分岐の仕組みを分岐解に対しても求めて行くことにより、図-5に示すような多段階の分岐の仕組みを求めることができる。

## 7. 分岐解析結果

本章では、輸送費の変化に伴う、本モデルの均衡点の変化を計算分岐理論に従って追跡する。以下に示す解析結果は、パラメータの違いによる影響を見る図-10を除いて、 $\mu = 0.4, \sigma = 10.0$ と固定して解析を行った。ここで、 $\mu$ と $\sigma$ は任意に決められるパラメータであり、 $\mu$ は工業品への支出割合を示すと同時に経済全体での工業人口の占める割合を示し、 $\sigma$ は工業品の多様性を嗜好する度合いを示すパラメータである。

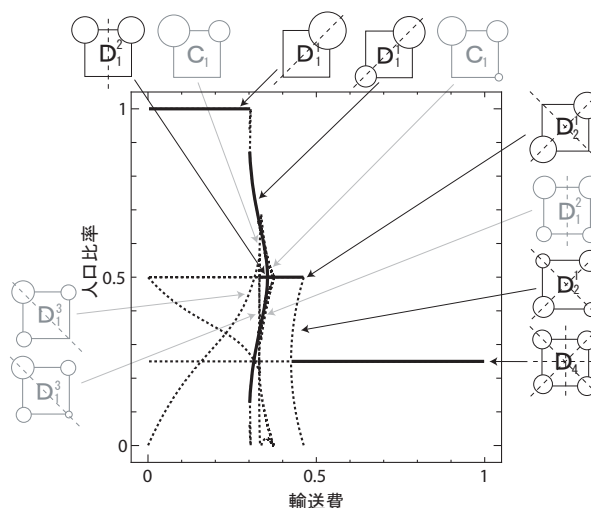
### (1) 4都市モデル

4都市モデルの分岐解析結果についてまとめる。

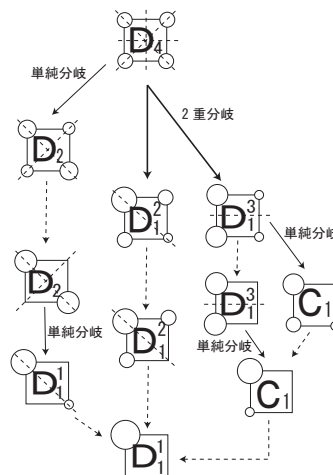
a) 複数均衡解の発現

4都市モデルの分岐解析により求めた解曲線を図-8(a)に示す。図の縦軸はある都市の人口(例えば $\lambda_1$ )を示し、横軸に輸送費を示す。ここで、横軸の輸送費は輸送費パラメータ $\tau$ の関数 $1 - 1/e^{\tau\pi}$ の値を示しており、輸送費0では都市間に全く輸送費がかからない状態を、輸送費1では輸送費が大きく都市間の交流が少ない状態を示している。また、実線は安定な経路、破線は不安定な経路を示している。各経路における人口分布を模式図により示す。模式図において、黒色で示す集積パターンは安定解であり、灰色で示す集積パターンは不安定解である。分岐や自明解との交差に伴う対称性の低下の模式図を図-8(b)に示す。

図-8から明らかなように、分岐を繰り返し起こしており、数多くの均衡解からなる複雑な挙動を示している。

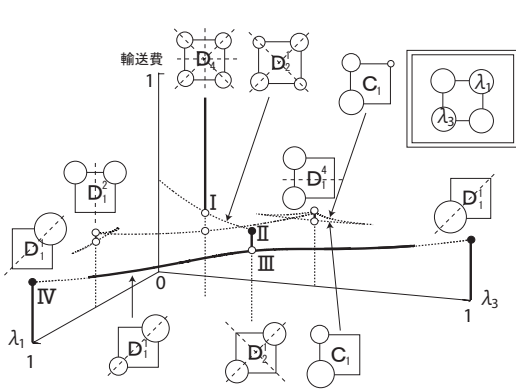


(a) 均衡解曲線

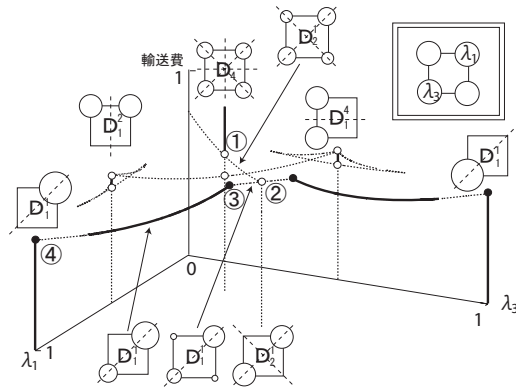


(b) 分岐による対称性の低下の模式図

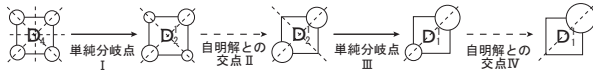
図-8 輸送費パラメータ $\tau$ の変化に伴う均衡解の変化(4都市)



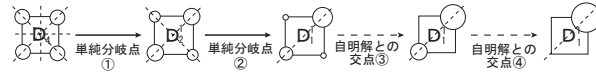
(a) 3次元図（一部抜粋）



(a) 3次元図（一部抜粋）



(b) 分岐による集積パターンの変化



(b) 分岐による集積パターンの変化

図-9 4都市モデルの均衡解の3次元プロット ( $\sigma = 10.0$ )

図-10 4都市モデルの均衡解の3次元プロット ( $\sigma = 5.0$ )

### b) 対称性破壊分岐

図-9(a)は、図-8の経路の中から代表的な安定解を取り出し、図中右上の2重の四角の枠内に示す対角線上の2都市の人口  $\lambda_1, \lambda_3$  の輸送費変化による集積の様子を示す3次元プロットである。経路上に示した○は分岐点であり、●は自明解との交点を示す。分岐は図-9(a)に示した経路のみでも7つの点で起きており、それぞれの分岐点で対称性を順次喪失し、集積パターンに変化が起きていることがわかる。

輸送費が高い状態（鉛直軸の輸送費が1に近い場合）では、4つの都市に人口が均等分布する  $D_4$  不変な4軸対称パターンが安定であり、他の不安定解の存在も確認されない。しかし、輸送費の低下により単純分岐点Iに到達すると、分岐を起こし、4軸対称パターンが不安定となり、2軸対称の対角2都市に均等に分布する  $D_2^1$  不変なパターンが安定な解となる。さらに輸送費が低下すると、単純分岐点IIIにおいて、対称性破壊分岐が起こり、安定状態が1つの都市に集積する  $D_1^1$  不変パターンを経て一極集中へと移行する。この状況の模式図を図-9(b)に示す。この一連の集積パターンの変化は

$$D_4 \longrightarrow D_2^1 \longrightarrow D_1^1 \quad (68)$$

という多段階の分岐により引き起こされている。

### c) 工業品の多様性を示すパラメータ $\sigma$ の影響

本節では、工業品の多様性を選好する度合いを示すパラメータ  $\sigma$  が均衡解に及ぼす影響についてまとめる。そこで、図-9に示す解析結果 ( $\sigma = 10.0$ ) と図-10に示す解析結果 ( $\sigma = 5.0$ ) とを比較する。

$\sigma = 5.0, 10.0$  ともに4都市に均等に分布する状態である  $D_4$  から対称性を順次喪失し、1都市への集積を起

こしており、全ての分岐が図-5に示した規則に従っている。しかし、 $\sigma = 5.0$  (図-10) の場合、 $D_2^1$  における2都市均衡の自明解が存在せず、自明解へ移行する以前に  $D_1^1$  へと分岐している。しかし、この場合も (68) の多段階の分岐の規則に従っている。

### (2) 周期倍分岐

図-9(b)、図-10(b)が示す一連の集積過程では、

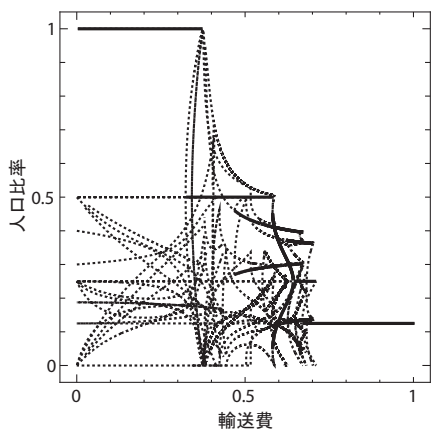
$$4 \text{ 都市均等分布} \quad 2 \text{ 都市への集積} \quad \text{一極集中} \quad (69)$$

という、いわゆる、周期倍分岐と呼ばれる、複雑系の典型的な分岐挙動が発生している。

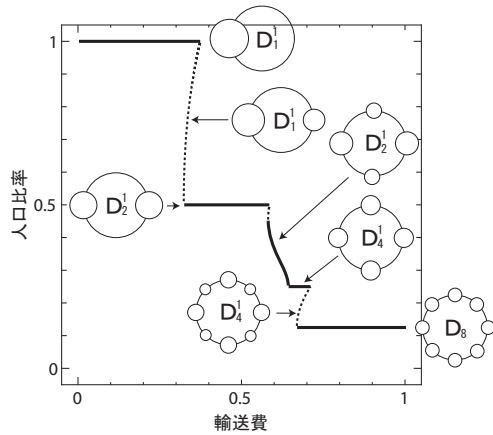
都市数を8都市に増加させて解析した結果を図-11(a)に示す。都市数の増加により、さらに複雑な分岐構造をもつようになり、ある輸送費における均衡解も飛躍的に増加している。しかし、図-11(b)に示すように、

$$8 \text{ 都市均等分布} \quad 4 \text{ 都市への集積} \\ 2 \text{ 都市への集積} \quad \text{一極集中} \quad (70)$$

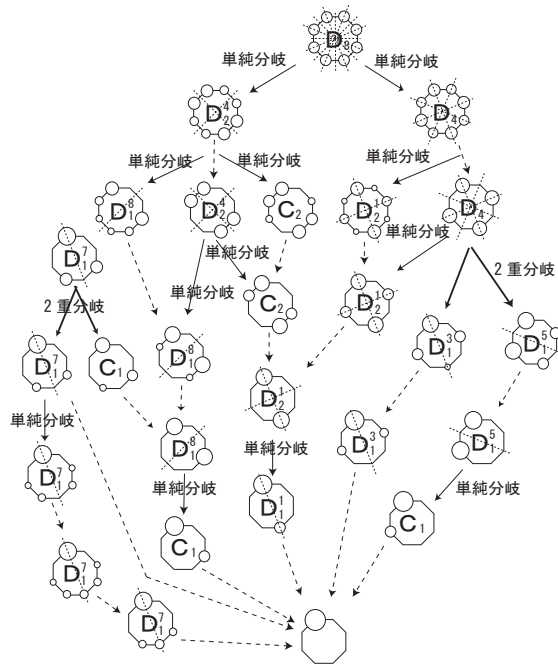
という周期倍分岐が発生している。また、図-12に示す16都市モデルに対しても周期倍分岐が発生している。このように、Tabuchi and Thisse<sup>11)</sup> が本研究と異なるモデルでその発生を示した周期倍分岐がこのモデルでも発生しており、都市の集積・分散現象のNEGモデルにおいて周期倍分岐が一般的な性質である可能性を示唆している。



(a) 全経路



(b) 周期倍分岐経路



(c) 分岐による対称性の低下の模式図

図-11 8都市モデルの解析結果

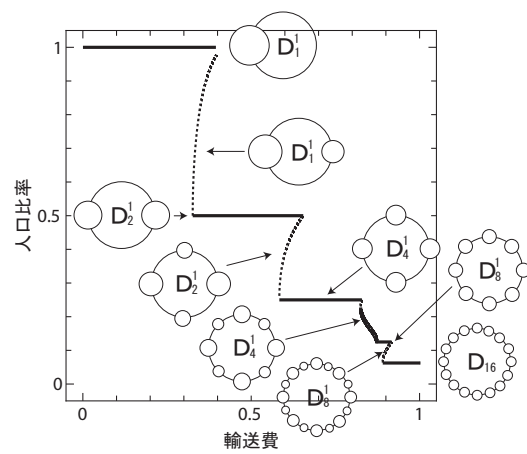


図-12 周期倍分岐経路 (16都市モデル)

## 8. 輸送費低下に伴う都市の集積・分散過程： 都市の位置，都市数およびその規模

7章では，多都市が円周上に等間隔に存在するモデルにおいて，都市の集積・分散過程に対称性破壊や周期倍分岐という特徴があることを明らかにした．本章では，多都市モデルに現れた都市の集積・分散過程（存続する都市の位置，都市数および規模）について，特に2都市モデルであるCPモデルでは見られなかった過程について経済学的観点から指摘する．都市の位置および都市数は2都市モデルでは分析不可能な項目である．なお，輸送費用の高い状況から低い状況への変化に伴う集積・分散過程をみる．特徴は，大きく分けて下記の2点ある．

- (a) 成長する都市に隣接する都市の衰退
- (b) 複数存在する都市集積過程（均衡パターンの変遷パス）と実現しない均衡パターン

各点についてそれぞれ(1)，(2)として以下で説明する．

### (1) 成長する都市に隣接する都市の衰退

図-12に示すように，輸送費低下に伴って，隣接した都市の片方が成長してもう一方が衰退するパターンが発生することがわかる．これは7章で指摘した周期倍分岐である．経済学的にみると，存続する都市の成長とともに隣接都市が衰退する「ストロー効果」が生じているといえる．

こういった現象の発生に，円周上の多都市モデルといった空間的構造が影響しているかどうかを確認するために，線形上に5都市が位置するモデルの安定解を求めた．その分析結果を図-13に示す．交通費減少に伴い，パターンGからパターンFあるいはEに都市パターンが変遷する．次に，パターンFからはパターンE，Cのいずれかに，パターンEからはパターンD，C，Bのいずれかに変遷する．さらに，パターンDが

らはパターン C, B, A のいずれかに変遷する。どのパターン間の変遷においても、成長する都市に隣接の都市は衰退、あるいは元々人口ゼロで変化がない。したがって、線形上に 5 都市が位置するモデルでも、「ストロー効果」が、円周上に都市が位置するモデルと同様に生じている。

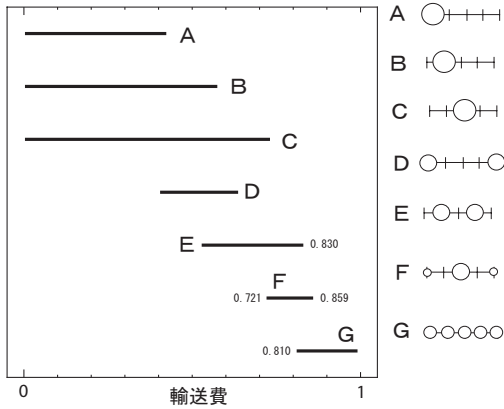


図-13 線形都市の安定パターンの変遷 (5 都市) ( $\mu = 0.4$ ,  $\sigma = 5.0$ )

## (2) 複数存在する都市集積過程 (均衡パターンの変遷パス) と実現しない均衡パターン

輸送費低下に伴う都市集積過程を見るために、4 都市モデル、8 都市モデルについて、それぞれ図-14、図-15 に安定な均衡パターンのみを示した。輸送費低下に伴う安定な均衡パターンの変遷が都市集積過程である。

図-14 に示した 4 都市モデルと見てみると、輸送費の高い状況では、パターン E の人口分散状態が実現し、その後、パターン D に変遷する。次は、パターン C, B のいずれかに変遷し、最後はパターン A の一極集中状態となることがわかる。したがって、分散から集中へのパターンの変遷パスが複数存在している。

次に、図-15 に示した 8 都市モデルを見てみる。輸送費が高い状況では、パターン J の人口分散状態である。その状態から輸送費が低下すると、パターン J の左端の輸送費で安定であるパターン I, G, E の 3 つのパターンが次のパターンになり得ることがわかる。それ以降も輸送費低下による都市パターンの変遷パスは様々あることがわかる。例えば、パターン G からは、パターン H, F, E があり得る。したがって、4 都市と同様に、8 都市モデルには分散から集中へのパターンの変遷パスとして複数存在しており、さらにより多くのパスがあることがわかる。

ここで、パターン D に着目してみると、パターン J の人口分散状態から輸送費低下に伴ってパターン A の人口集中状態に変遷する際のパスにおいても、パターン D は実現しない。すなわち、ある輸送費の元では、パ

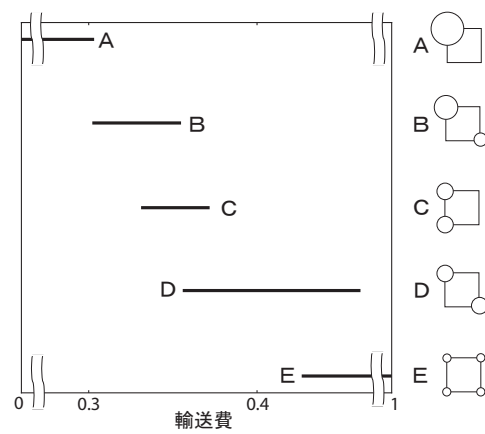


図-14 輸送費による安定パターンの変遷 (4 都市)

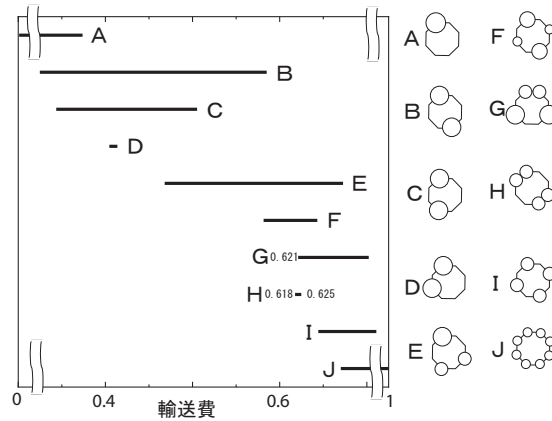


図-15 輸送費による安定パターンの変遷 (8 都市)

ターン D は安定均衡解として存在するものの、人口分散から集中に変遷する現実の経済においては実現可能性がない。このことから、ある輸送費を仮定した静学モデルの元で均衡であっても実現する均衡とは限らず、その均衡が「人口分散から集中へと変遷する経済」で実現する均衡かどうかを別途検討する必要性があることを指摘できる。なお、このような実現しないパターンの発見のためには本研究で採用した群論的分岐理論による網羅的な分岐解析が有用である。

次に、図-15 を用いて、いくつかのパターン変遷の現実性を検討する。パターン E から輸送費低下したとき、次に実現しうるパターンはパターン B と C である。しかし、パターン B で 2 極となる都市の一方はパターン E ではもともと人口がゼロであった都市である。人口ゼロであった場所に、輸送費低下により突然、大きな人口を持つ都市が発生することは現実的には考えにくい。したがって、パターン E から変遷するパターンとしてはパターン C の方が現実的である。パターン F からは、パターン E への変遷は変遷は非現実的であり、パターン B への変遷は現実的といえる。

図-13 に示した線形都市の 5 都市モデルにおいても、

輸送費低下による都市の集積過程（安定均衡パターンの変遷）は様々なパスがありうるということがわかる。ただし、そのパターンの変遷には不自然なものが8都市円形モデルよりも明確に存在する。例えば、パターンEからはパターンD, C, Bがあり得る。しかし、パターンDやCで存在している都市（正の人口を持つ都市）は、パターンEでは存在していない。このように、全く都市が無いところに、輸送費低下で突然都市が発生するという事は現実的ではない。以上に示したことから、安定解パターン間の変遷において、なんらかの法則が現実的には存在することが考えられる。この変遷に関する法則のモデル化はこれまでのNEGモデルでは行われておらず、今後の課題である。

## 9. おわりに

本研究は、分岐解を網羅的に調べることができる群論的分岐理論を多都市を含むNEGモデルの分岐解析に適用した。その結果、都市数が多い場合の輸送費低減に伴う都市の集積・分散の進行過程、すなわち都市集積・分散パターンの変遷を明らかにすることができた。この変遷は、Tabuchi and Thisse(2006)<sup>11)</sup>で分析対象とされた周期倍分岐を示す分岐経路以外にも、多くの複雑な分岐経路を含んでいることがわかった。また、本研究で示した数値的分岐解析方法は、本研究のモデルだけでなく他の多都市のNEGモデルすべてに適用可能な方法である。この解析方法を適用することにより、他のNEGモデルの特性を明らかにすることは今後の課題である。

### 参考文献

- 1) Krugman, P.: Increasing returns and economic geography, *J. of Political Economy* 99, 483-499, 1991.
- 2) Krugman, P.: History versus expectations, *Quarterly Journal of Economics* 106, 651-667, 1991.

- 3) Dixit, A.K. and Stiglitz, J.E.: Monopolistic competition and optimum product diversity, *American Economic Review*, 67(3), pp.297-308, 1977.
- 4) Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A.J.: *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 5) Baldwin, R., Forslid, R., Martin, P., Ottaviano G., and Robert-Nicoud, F.: *Economic Geography and Public Policy*, Princeton University Press, 2003.
- 6) Fujita, M. and Thisse, J.F.: *Economics of Agglomeration*, Cambridge University Press, 2002.
- 7) Henderson, J. V. and Thisse, J.F. eds.: *Handbook of Regional and Urban Economics* vol. 4, Cities and Geography, Elsevier, 2004.
- 8) Krugman, P.: On the number and location of cities, *European Economic Review* 37, 293-298, 1993.
- 9) Krugman, P.: *The Self-Organizing Economy*, Blackwell, 1996. (または Fujita et al. (1999)<sup>4)</sup> の第6章)
- 10) Fujita, M., Krugman, P., and Mori, T: On the Evolution of Hierarchical Urban Systems, *European Economic Review* 43, 209-251, 1999. (または Fujita et al. (1999) の<sup>4)</sup> 第11章)
- 11) Tabuchi, T. and Thisse, J.F.: *Self-organizing urban hierarchy*, Preprint, 2006.
- 12) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ3, コロナ社, 2005.
- 13) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1988.
- 14) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- 15) 柳本彰仁, 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁: 計算分岐理論による都市の集積分散モデルの分岐経路追跡法の提案, 投稿中.
- 16) Tabuchi, T. and Zeng, D.-Z.: Stability of spatial equilibrium, *J. Regional Sci.* 44(4), 641-660, 2004.
- 17) Zeng, D.-Z.: Equilibrium stability for a migration model, *Regional Sci & Urban Economics* 32, 123-138, 2002.
- 18) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 12(2), 273-297, 1991.

(2007. ?. ?? 受付)

## SYMMETRY-BREAKING BIFURCATION OF A CORE-PERIPHERY MODEL OF MANY CITIES: GROUP-THEORETIC APPROACH

By Kiyohiro IKEDA, Tatsuhito KONO, Takashi AKAMATSU, Akito YANAGIMOTO, Shunji YAMAKI

The core-periphery model that expresses the city accumulation phenomenon in association with the change of transportation cost has multiple equilibriums for two or three cities. However, there is scarce knowledge on the pattern of spatial accumulation and decentralization of the population when the number of cities is increased further. In this research, the numerical analysis based on computational bifurcation theory and group-theoretic bifurcation theory is carried out on the Core-Periphery model for many cities with the same population that are located symmetrically along a circle. As a result, complex bifurcation behavior of the model has successfully been traced and the accumulation phenomenon of the city has been shown to be engendered via a phased loss of symmetry and spatial period-doubling bifurcation.