

集積経済下における 地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス

織田澤 利守¹・赤松 隆²

¹正会員 博（工） 東北大学大学院情報科学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06）

E-mail:ota@plan.civil.tohoku.ac.jp

²正会員 博（工） 東北大学大学院情報科学研究科（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06）

E-mail:akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究では、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みでの完全予見的 (perfect-foresight dynamics) ダイナミクスを導入した新しい均衡選択原理を提案する。具体的には、経済環境に不確実性（確率動的なゆらぎ）が存在する下で、将来起こりうるすべて状況を確率的に織り込んだ労働者の地域間移住に関する意思決定モデルの定式化を行う。その結果、地域間移住ダイナミクスの均衡経路が確率的に実現するサンプルパスに応じて一意に決定されることを明らかにする。その上、従来研究における解の不定性が確定論的な枠組みのみで必要となる仮定に依存した結果であることに言及し、確率論的な枠組みへと拡張した提案モデルに基づく均衡選択原理が頑健であることを示す。さらに、長期的に実現する都市の集積・分散パターンの性質について検討を行う。

Key Words : *core-periphery model, multiple equilibria, perfect-foresight dynamics, economic uncertainty*

1. はじめに

(1) 背景と目的

土木計画学分野では、交通施設をはじめとした、広域的な社会・経済的影響を及ぼす社会基盤整備事業の評価法に関する研究が蓄積されてきた。その結果、例えば、SCGE(空間的応用一般均衡)モデルの発展により、社会基盤のもたらす広域的な経済便益を定量的に評価することができるまでになっている。しかし、既存のSCGEモデルは、生産要素の地域（都市）間移動は無いとの前提に立った（短期的視野の）分析法である。そのため、生産要素の移動に伴って生じる、均衡解の変遷過程や長期的な性質について考慮することができないという限界がある。

一方、新経済地理学(New Economic Geography ;NEG)分野において、Krugman¹⁾のCore-Peripheryモデル（以下、CPモデル）は、労働力（生産要素）の地域間移動、及び、それに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論的に扱った先駆的研究である。そこでは、集積の外部性に起因して複数の均衡解が存在しうることが示され、財の輸送費用が都市の集積・分散パターンを決定する重要な要因であることが明らかにされた。しかし、複数の均衡解のうち、どのような要因によっていずれの均衡解が実現するか（均衡選択問題）については詳しく分析されていない。複数均衡

が存在する経済において、どの均衡解が実際に生じるのかを予測することは政策立案上の重要な課題である。こうした均衡選択問題を扱うためには、どのような経路で均衡解が実現するかを記述するダイナミクスに関する分析が必要となる。

本研究の目的は、従来の研究では未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みを導入した新しい均衡選択原理を提案し、その上で長期的な均衡解の性質について明らかにすることである。なお、本研究から得られる知見は、今後、人口・資本の地域間移動を考慮したSCGEモデルや社会基盤整備の評価法を開発する際に必須の理論的基盤となると考えられる。

(2) 従来研究と本研究の位置づけ

複数均衡下の経済における均衡選択に関しては、マクロ経済学や貿易理論、産業組織論の各分野に研究蓄積がある²⁾⁻⁴⁾。そこでは、*history*と*expectation*に基づく異なる2つの均衡選択原理が提案されてきた。前者は、初期状態値のみによって実現する均衡が特定されること（“*history matters*”）であり、後者は、予見的 (forward-looking) な主体（企業や消費者）の自己実現的な期待のみによって均衡が決定されること（“*expectation matters*”）である。Matsuyama⁵⁾は、工業部門と農業部門の2セクターで構成される経済において、工業部

門の収穫逓増性がもたらす複数均衡問題を対象に分析を行った。その結果、局所的安定均衡に陥った経済が完全予見的な主体の *expectation* によって大域的安定均衡へ到達可能であることが明らかにし、均衡選択における *expectation* の重要性を示した。Krugman⁶⁾, Fukao and Benabou⁷⁾ は、Matsuyama⁵⁾ とは異なるダイナミクスを想定し、各均衡選択原理が有効となる条件を示した。なお、Matsuyama⁵⁾ では、労働者は与えられたある一時点においてのみ就労部門を選択できるのに対して、これらの研究では、労働者が就労部門を変更するタイミングを選択でき、その結果、変更タイミングに関する均衡状態が成立するようなダイナミクス（以降、Krugman 型ダイナミクスと呼ぶ）を想定している。しかし、Matsuyama⁵⁾ や Krugman⁶⁾ の想定する確定論的な枠組みでは、*expectation* に応じて複数の均衡経路が存在するため、均衡解を理論的に全く特定できないという問題（解の不定性）が存在する。

Krugman¹⁾ 以降、都市における経済活動の集積現象を説明する研究が膨大に蓄積されてきたが、均衡選択問題を明示的に扱った研究は少ない。Fujita et al.⁸⁾ は、近視眼的な労働者を仮定し、各時点においてより大きな瞬間効用をもたらす地域へと移住が進むような複製ダイナミクス（replicator dynamics）を分析している。その結果、初期状態値のみによって実現する均衡解が決定される。これに対し、Ottaviano⁹⁾, Baldwin¹⁰⁾ は、Krugman⁶⁾ の考え方を CP モデルに応用し、確定論的な枠組みにおいて労働者が将来にわたって獲得する総効用に基づき移住地域を選択する予見的ダイナミクス（forward-looking dynamics）を分析している。その結果、均衡選択に関しては、初期状態のみによって特定の均衡解が決定されるか、または、解は不定であるという Krugman⁶⁾ と同様な非常に極端な結論しか得られていない。

昨今、ゲーム理論分野の抽象研究において、不確実性の導入により均衡選択問題における解の不定性が解消される可能性が示されている。Frankel and Pauzner¹¹⁾ は、Matsuyama⁵⁾ を拡張し、不確実性の導入により（長期的な）均衡解に向かう経路がパラメータのサンプルパスに応じて一意に決定することを明らかにし、自己実現的期待がロバストとはいえないことを示した。しかし、極めて単純化されたダイナミクスを想定しているため、都市集積のダイナミクスを扱うのに十分とは言えない。

本研究では、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みでの完全予見的（perfect-foresight dynamics）ダイナミクスを導入した新しい均衡選択原理を提案する。具体的には、Krugman 型ダイナミクスを想定し、

経済環境に不確実性（確率動的なゆらぎ）が存在する下で、将来起こりうるすべて状況を確率的に織り込んだ労働者の地域間移住に関する意思決定モデルの定式化を行う。その結果、地域間移住ダイナミクスの均衡経路が確率的に実現するサンプルパスに応じて一意に決定されることを明らかにする。その上で、長期的に実現する都市の集積・分散パターンの性質について検討を行う。

本論文の構成は、以下のとおりである。2. ではモデルの定式化を行い、不確実性下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクスが標準形の相補性問題に帰着することを示す。3. では、提案モデルと従来の確定論的モデルとの対応関係を示す。4. では、不確実性を明示的に考慮した本モデルにおいては、都市の集積・分散パターンが確率分布として表現されることを述べ、3. までの分析結果を用いて、その性質を明らかにする。5. では結論を述べる。なお、織田澤ら¹²⁾ は、提案モデルの数理的構造に焦点を当て、その効率的なアルゴリズムの開発を行うものであり、上述の本論文の目的達成のための第1段階として位置付けられる。そのため、本稿2. のモデルは、その内容に織田澤ら¹²⁾ と重複する部分があるが、本稿のみでの完結性を確保するため重複を厭わず掲載することとする。

2. モデル

(1) モデルの設定

本研究での短期均衡の分析においては、CP モデルを扱いやすくした Forslid and Ottaviano¹³⁾ の定式化を採用する。このモデルは、労働者の間接効用を地域間の人口配分の関数として陽的に表現できるという特徴がある。経済は対称的な2地域 ($m, n = 1, 2; m \neq n$) から構成される。この経済には、高技能労働（skilled）と低技能労働（unskilled）という2つのタイプの生産要素が存在し、全ての労働者は自らのタイプにあった1単位の労働を非弾力的に供給するものとする。経済全体における skilled, unskilled の労働者数をそれぞれ $H = H_1 + H_2, L = L_1 + L_2$ で表す。ただし、 $H_m (L_m)$ は、地域 m における skilled (unskilled) の労働者数である。skilled の労働者は地域間を自由に移動可能であると仮定する。その結果、地域 m における skilled の労働者数は内生変数であり、時間の経過に伴って変化する。一方、unskilled の労働者は地域間を移動不可能であり、 L_m は固定とする。また、この経済には、農業部門 A（以下、部門 A）と工業部門 M（以下、部門 M）の2部門があるとする。農業部門 A は、収穫不変の技術により、unskilled を生産要素として1種類の同質な財を生産する完全競争的な部門である。一方、工業部門 M

は、収穫逓増の技術により、skilled及びunskilledを生産要素として、広範囲の差別化された財を生産する独占競争的な部門である（したがって、「農業」、「工業」という言葉は必ずしも文字通りに解釈する必要はない）。各部門の生産物をM財、A財と呼ぶ。M財の輸送費用は、Krugmanモデルなどの標準的なNEGモデルと同様に、氷塊費用の形をとると仮定する。すなわち、1単位の財が一方の地域からもう一方の地域へ輸送されると、当初の1単位のうち一部は途中で融けてしまい1/τだけが実際に到達する。定数τは、1単位の財が到着するために必要な発送量である。これに対し、A財の輸送には費用がかからないものと仮定する。

いま、時刻 $t \in [0, \infty)$ における輸送費用を $\tau(t) \equiv X(t) + 1$ と定義しよう。本研究のモデルでは、 $X(t)$ が以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dz, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

ここで、 μ はドリフト、 σ はボラティリティ、 dz は標準Wiener過程の増分である。 $X(t) > 0$ より、 $\tau(t) > 1$ が成立する。すなわち、本研究では、経済環境に内在する不確実性として輸送費用が時々刻々と変化する状況を想定している。ただし、経済システム全体に影響を持つ、輸送費用以外のパラメータに不確実性を導入しても、以下での議論と同様の結論（均衡解の一意性や長期的な集積・分散パターンの性質）が導かれることが予想される。本論文では、従来研究の結果との関係を明確にするために、輸送費用に不確実性が介在するという仮定を採用する。

(2) 短期均衡

a) 消費者の行動

地域 m における代表的消費者の効用最大化行動は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \max .U_m &= M_m^\lambda A_m^{1-\lambda} & (2) \\ \text{s.t.} & \\ \int_{s \in N_m} p_{mm}(s) d_{mm}(s) ds &+ \int_{s \in N_n} p_{nm}(s) d_{nm}(s) ds \\ + p_m^A A_m &= Y_m \quad (m, n = 1, 2; m \neq n) & (3) \end{aligned}$$

代表的消費者の選好は、式(2)のCES型効用関数で表される¹⁴⁾。ここで、 A_m はA財の消費、 M_m はM財の消費を表す指数を表し、 $\lambda \in (0, 1)$ は工業品への支出割合を表す定数である。数量指数 M_m は、差別化された財に関する連続空間において定義される部分効用関数を表し、CES関数を用いて、

$$M_m = \left[\int_{s \in N} d_m(s)^{(\xi-1)/\xi} \right]^{\xi/(\xi-1)} \quad (4)$$

と定義される。ここで、差別化に対応するインデックスを連続変数 s として、 $d_m(s)$ を多様な各M財の消費量

とする。また、 N は利用可能な財の種類を表し、 N_m を地域 m におけるM財の種類とすると、 $N_1 + N_2 = N$ となる。パラメータ ξ は任意の差別化された2財間の代替の弾力性を表す。

式(3)は、地域 m における代表的家計の予算制約を表し、 p_m^A は地域 m でのA財の価格、 $p_{nm}(s)$ は地域 n で生産され地域 m で消費される各M財の価格である。 d_{nm} は、地域 n で生産され地域 m で消費される各財の消費量を表す。また、 Y_m は、地域 m での所得を表し、skilledの所得 w_m とunskilledの所得 w_m^L から構成される：

$$Y_m = w_m H_m + w_m^L L_m \quad (5)$$

このとき、地域 m におけるskilled労働者の間接効用関数は、

$$W_m = \eta w_m P_m^{-\lambda} (p_m^A)^{-(1-\lambda)} \quad (6)$$

と表される。ただし、 $\eta \equiv \lambda^\lambda (1-\lambda)^{(1-\lambda)}$ 、 P_m は地域 m の価格指数を表す。

$$P_m =$$

$$\left[\int_{s \in N_m} p_{mm}(s)^{1-\xi} ds + \int_{s \in N_n} p_{nm}(s)^{1-\xi} ds \right]^{1/(1-\xi)} \quad (7)$$

b) 企業の行動

部門Aでは、unskilledのみを生産要素とし、同質な財Aを完全競争のもとで、収穫不変の技術により生産するものとする。一般性を失うことなく、1単位のunskilledにより、1単位の財が生産されると基準化できる。したがって、完全競争下では、A財の価格は、unskilledの賃金に等しくなる：

$$p_m^A = w_m^L \quad (8)$$

A財の地域間輸送には費用がかからないため、その価格はどちらの地域でも等しい： $p_1^A = p_2^A$ 。従って、 $p_m^A = w_m^L$ より $w_1^L = w_2^L$ という関係も明らかである。以下、単純化のため、A財をニューメレールとし、 $p_m^A = w_m^L = 1$ とする。なお、unskilledの労働者は地域間を移動することが不可能である。ここではモデルを単純化するため、unskilled労働者 L は2地域に均等に分布しているという仮定をおき、 $L_m = L/2$ とする。

部門Mでは、企業はDixit-Stiglitz型の独占的競争を行う。すなわち、収穫逓増の技術により差別化されたM財を生産するものとする。規模の経済、消費者の多様性選好、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、部門Mでは、各種類の財が唯一の特化した企業により、唯一の地域において生産される。企業がM財を $x_m(s)$ 単位生産する場合、生産要素として α 単位のskilledと、 β 単位のunskilledが必要となると仮定する。従って、部門Mにおいては、生産を行う企業の数 は供給される財の種類に等しく、地域 m に存在する部

部門Mの企業数 N_m は、以下ようになる。

$$N_m = \frac{H_m}{\alpha} \quad (9)$$

以上より、部門Mにおける企業の利潤最大化行動は、次のように表される。

$$\max_{P_{mm}, P_{mn}} \Pi_m(s) = p_{mm}(s)d_{mm}(s) + p_{mn}(s)d_{mn}(s) - (w_m\alpha + \beta x_m(s)) \quad (10)$$

ただし、短期均衡において、以下に示すM財の市場清算条件が成立する。

$$x_m(s) = d_{mm}(s) + \tau d_{mn}(s) \quad (11)$$

また、企業は費用を要せず参入・撤退が可能であるため、利潤は発生しない。

c) 短期均衡解

上述のシステムから、skilled労働者の総数 H のうち地域1に居住する比率

$$h \equiv H_1/H \quad (12)$$

を与件とすれば、地域 m の部門Mの企業数 N_m 、企業の生産量 x_m 、価格指数 P_m 、均衡賃金 w_m 、所得 Y_m が決定される。均衡賃金 w_m は h の陽関数として、以下のように導かれる：

$$w_1 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi h + B(\phi) \cdot (1-h)}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (13)$$

$$w_2 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi \cdot (1-h) + B(\phi)h}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (14)$$

ただし、 $A \equiv (\lambda/\xi)/\{1 - (\lambda/\xi)\}$ 、 $B(\phi) \equiv 1 - (\lambda/\xi) + \{1 + (\lambda/\xi)\}\phi^2$ と置く。 $\phi \equiv \tau^{1-\xi} \in (0, 1]$ は、自地域内で生産される財の需要に対する輸入財の需要の比率であり、貿易の自由度を表す。輸送費用 τ が大きい（小さい）とき、 ϕ は小さい（大きい）値をとる。

式(6),(13),(14)より、間接効用関数 W_m は次のように導かれる。

$$W_m(h) = \eta \frac{w_m(h)}{P_m(h)^\lambda} \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

ただし、価格指数 P_m は

$$P_1(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\xi}} [h + \phi(1-h)]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (16)$$

$$P_2(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\xi}} [(1-h) + \phi h]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (17)$$

となる。以降の分析では経済全体のskilled労働者数を $H = 1$ と基準化する。なお、本研究では、短期均衡の定式化において既存のForslid and Ottavianoモデルを採用している。短期均衡モデルの詳細は、参考文献^{12),13)}を参照されたい。

(3) 地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス

CPモデルにおける地域間移住ダイナミクスは、skilled労働者の長期的な効用最大化行動に基づく地域間の移住によって生じる。なお、移住は任意の移動期

間 $[0, T]$ ($T \in [0, \infty)$) で行われるものとする。skilled労働者は、期間 $[0, T]$ 中に発生する総効用フローの期待純現在価値を最大化するように、時刻 t での居住地域 $m(t) \in \{1, 2\}$ を決定する。時刻 t において地域 m に居住するskilled労働者にもたらされる単位時間当たりの間接効用フローは、輸送費用 X と地域1のskilled労働者数 h の関数 $W_m(X, h)$ で表される。ここで、間接効用フローは、 X の関数であるため、それ自身が確率過程である。一方、地域間の移住には費用

$$C_m(t) = \frac{f_{mn}(t)}{\gamma} \quad (18)$$

を要する。ここで、 $f_{mn}(t) (\geq 0)$ は地域 m から n へ移住フローを表し、 γ は移住費用のパラメータである。すなわち、移住には混雑現象を伴い、その時点で同時に移住を行うフロー f_{mn} が大きいほど、移住費用 $C_m(t)$ が大きくなる。時刻 t における経済全体の移住の純フロー $dh(t)$ は、

$$dh(t) = \{f_{21}(t) - f_{12}(t)\} dt \quad (19)$$

と表される。従って、時刻 t に地域 $m(t)$ に居住している状況下で、期間 $[t, T]$ に発生する総効用フローの、時刻 t での期待純現在価値は、以下の式で表される：

$$J(t, m(\cdot)) \equiv \int_t^T W_{m(s)}(X(s), h(s)) e^{-r(s-t)} ds - \sum_{k \in K(t)} e^{-r(\theta_k - t)} C_m(\theta_k)(\theta_k) \quad (20)$$

ただし、 r は割引率、 θ_k は k 回目に行われた移住の時刻を表す。また、 $K(t)$ は時刻 t 以後に行われる移住のインデクス集合を表す。式(20)において、第1項は対象期間中の総期待効用を、第2項は移住に必要とされる費用を表す。

ここでは、各瞬間における地域間移住のダイナミクスが満たす均衡条件を示す。まず、時刻 t において輸送費用 $X(t) = X$ 、地域1の人口 $h(t) = h$ が観測された状況を (t, X, h) と表す。地域 m にいるskilled労働者が状況 (t, X, h) において、以後最適に行動した場合に得られる総効用フローの期待純現在価値 $V_m(t, X, h)$ を最適値関数として以下のように定義する。

$$V_m(t, X, h) \equiv \max_{\{m(s)|s \in [0, T]\}} E_t [J(t, m(\cdot)) | X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m] \quad (21)$$

ただし、 $J(t, m(\cdot))$ は式(20)で定義される $[0, T]$ 間に得られる総効用フローの期待純現在価値である。以下では、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において定義される最適値関数 $V_m(\cdot)$ を“地域 m の価値”と呼ぶ。式(22)は期待値のネストを用いて、以下のように記述できる。

$$V_m(t, X, h) = E_t \left[\int_t^{\theta_m} W_m(X(s), h(s)) e^{-r(s-t)} ds + \left\{ V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m)) - C_m(\theta_m) \right\} e^{-r(\theta_m - t)} \right]$$

$$\left[X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m \right] \quad (22)$$

ただし、 θ_m は地域 m から地域 n への移住が行われる時刻である。また、 $V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ は、状況 $(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ で地域 n が居住地として選択されているときの最適値関数を表す。式 (22) で表される最適値関数 $V_m(t, X, h)$ は、状況 (t, X, h) で地域 m を選択している skilled 労働者が、**i)** 時刻 t に地域 m から n に移住するか、**ii)** 微小時間 dt だけ地域 m を選択し続ける、のいずれかを離散的に選択する問題として表すことができる。このとき、地域間移住の均衡フローは状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ に依存し、 $f_{mn}(\cdot)$ 、 $f_{nm}(\cdot)$ と表される。また、 f_{mn} 、 f_{nm} が同時に正の値をとることはないことから、

$$dh(\cdot) = \begin{cases} f_{21}(\cdot)dt & \text{if } dh(\cdot) \geq 0 \\ -f_{12}(\cdot)dt & \text{if } dh(\cdot) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

が成立する（証明は参考文献¹²⁾を参照）。従って、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において地域 m を選択している skilled 労働者の行動は、以下のように場合分けすることができる。

a) 移動なし ($f_{mn}(\cdot) = 0$) の場合

$f_{mn}(\cdot) = 0$ より地域 m から n に移住する skilled 労働者数は 0 である。従って、地域 m の価値が地域 n の純価値を上回るため、以下の不等式:

$$V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \quad (24)$$

が成立する。このとき、地域 m において微小時間 dt だけ移住を延期するため、最適値関数の定義より、以下の等式:

$$V_m(t, X, h) = W_m(X, h)dt + e^{-rdt} E_t \left[V_m(t + dt, X + dX, h + dh) \right] \quad (25)$$

が成立する。DP 分解、伊藤の補題¹⁵⁾を用いて式 (25) の期待値演算内を展開・整理すれば、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ で成立すべき以下の等式を得る（導出は付録 A-I を参照）。

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (26)$$

ここで、 $\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})$ は、偏微分作用素で、以下の式:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_{12}, f_{21}) \equiv & \frac{\partial}{\partial t} + \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial h} (f_{21} - f_{12}) - r \end{aligned} \quad (27)$$

で定義される。

b) 移動あり ($f_{mn}(\cdot) > 0$) の場合

微小時間 dt の間に地域 m から n に移住する skilled 労働者数は $f_{mn}dt$ と表される。均衡においては、地域 m の価値が地域 n の純価値と等しくなる水準まで移住が行われる。すなわち、

$$V_m = V_n - \frac{f_{mn}}{\gamma} \quad (28)$$

が成立する。一方、残りの skilled 労働者は微小時間 dt だけ移住を延期することとなる。したがって、 $f_{mn} = 0$ の場合と同様に、最適値関数の定義より、等式 (25) が成立する。先ほどと同様に、DP 分解、伊藤の補題を用いて式 (25) の期待値演算内を展開・整理すれば、式 (26) と同様の等式を得る。

以上 **a)**、**b)** をまとめると、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 m に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は次のように表現される。

$$\begin{cases} V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) = 0 \\ V_m(\cdot) = V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (30)$$

同様にして、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 n に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は、

$$\begin{cases} V_n(\cdot) > V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) = 0 \\ V_n(\cdot) = V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_n(\cdot) + W_n(\cdot) = 0 \quad (32)$$

と表される。

(4) 非線形相補性問題としての表現

前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、解析的に解くことが困難なため、数値解法を用いる必要がある。以下では、この均衡条件が数理計画分野においてよく知られる非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) として記述されることを明らかにする。非線形相補性問題は、その解の一意性やアルゴリズムに関する理論解析が発展しているため、それらを活用することによって見通しの良い数値解法の開発が可能となる。前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、以下の非線形相補性問題 (33) 及び偏微分方程式 (34) として表現できる。

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} = 0 \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (34)$$

$$(m, n = 1, 2; n \neq m)$$

ただし、未知変数は $f_{mn}(\cdot)$ と $V_m(\cdot)$ である。これらの条件は、以下のように無限次元の偏微分方程式制約付き相補性問題 [P-NCP] として表現できる。

[P-NCP] Find $\{f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)\} \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0, \end{cases}$$

where

$$\Omega = \{ (f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)) | \mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \}$$

$$(\cdot) = (t, X, h), \forall X \in (0, \infty), \forall h \in [0, 1]$$

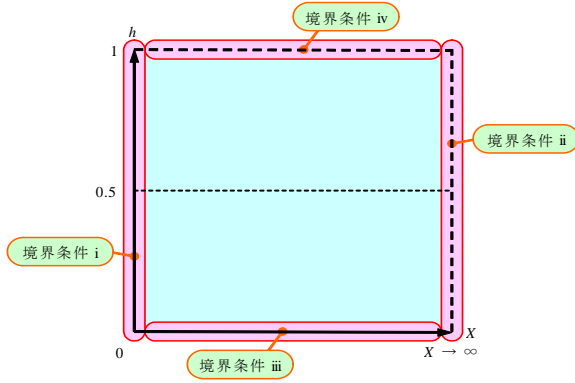


図-1 (X, h) 状態平面上の境界条件

Ω は、 (f_{mn}, V_m) 空間内で偏微分方程式制約(34)を満たす集合を表す。本モデルでは、 $T = \infty$ とし無限期間 $[0, \infty)$ に及ぶダイナミクスを考慮する。このとき、偏微分作用素(27)内の $\partial/\partial t$ の項がゼロとなり、最適値関数 V_m 及び地域間移住フロー f_{mn} は、時間には依存せず、状態 (X, h) にのみ依存する形で表わすことができる。

問題[P-NCP]を解くためには、境界条件を設定する必要がある。最適値関数 $V_m(\cdot)$ の境界条件は、図-1に示すように (X, h) 状態平面上的各境界($X \rightarrow 0, X \rightarrow \infty, h = 0, h = 1$)に応じて以下のように決定される。

境界条件 i) $X \rightarrow 0$

$X \rightarrow 0$, すなわち輸送費用がゼロの場合、skilled労働者にとって地域1, もしくは2に居住することは無差別となるため、将来にわたって移住は発生しない。したがって、地域 m の居住者は恒久的に $W_m(0, h) = W^0$ (一定)を得つづける。従って、 $X \rightarrow 0$ における地域 m の価値 $\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h)$ は以下のように表される：

$$\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h) = \frac{W_m^0}{r} \quad (35)$$

境界条件 ii) $X \rightarrow \infty$

$X \rightarrow \infty$, すなわち輸送費用が非常に大きい場合、直ちに対称均衡パターンへと収束し、その後、地域 m, n の居住者は恒久的に $\lim_{X \rightarrow \infty} W_m(X, 0.5) = \lim_{X \rightarrow \infty} W_n(X, 0.5) = W^\infty$ (一定)を得続ける。状態 $0 \leq h < 0.5$ において、地域2の居住者は、即座に移住費用を支払い地域1へ移住する。従って、 $\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h)$ 及び $\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h)$ は以下のようになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (36)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{0.5 - h}{\gamma} \quad (37)$$

同様に、状態 $0.5 \leq h \leq 1$ において、地域1の居住者は、即座に移住費用を支払い地域2へ移住する。従って、以

下のようなになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{h - 0.5}{\gamma} \quad (38)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (39)$$

境界条件 iii) $h = 0$

$h = 0$ の境界では $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{21} および $V_1(X, 0), V_2(X, 0)$ のみとなる。したがって、 $m = 2, n = 1$ の下で $h = 0, f_{12} = 0$ として[P-NCP]を解けばよい。

境界条件 iv) $h = 1$

$h = 1$ の境界では、 $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{12} および $V_1(X, 1), V_2(X, 1)$ のみとなる。したがって、 $m = 1, n = 2$ の下で $h = 1, f_{21} = 0$ として[P-NCP]を解けばよい。

非線形相補性問題([P-NCP]について、以下の命題が成立する(証明は付録.IIを参照)。

命題.

経済環境に不確実性が存在する下での完全予見的ダイナミクス(perfect-foresight dynamics)では、状態平面上的の任意の状態 (X, h) に対して地域間移住の均衡フロー $f_{mn}(X, h)$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$)が一意に決定される。

上記の命題.は、確率的に発生する X のサンプルパスに応じて地域間移住ダイナミクスの均衡経路が一意に決定されることを表す。詳細は3.(3)で述べる。

3. 考察

(1) 確定的なCP均衡選択モデルとの対応関係

本節では、提案モデルが従来研究における確定的なCP均衡選択モデルを包括した、より一般的モデルであることを示す。提案モデルの特殊ケースとして、割引率が非常に大きいケース($r \rightarrow \infty$)、輸送費用が一

定であるケース ($\mu = 0, \sigma = 0$) の2ケースについて考える。

割引率が非常に大きいケース : $r \rightarrow \infty$

$r \rightarrow \infty$ の場合、式(22)で表される地域 m の価値 $V_m(\cdot)$ は、当該期に獲得される(純)効用フローと等しくなる。したがって、地域 m の価値 $V_m(\cdot)$ は次のように表される。

$$V_m(\cdot) = \max \left[W_m(\cdot), W_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right] \Big|_{(\cdot) = (X, h, t)} \quad (40)$$

式(40)の右辺第一項は、時刻 t に移住を行わなかった場合に得られる効用を、第二項は当該時刻に地域 m から n へ移住を行った場合に得られる純効用を表す。 $W_n(\cdot) > W_m(\cdot)$ であれば、式(40)の右辺第一項と第二項が等しくなる水準まで地域 m から n へskilled労働者の移住が進む。労働者の移住が行われない状態 $dh/dt = 0$ 、すなわちシステムが定常状態となるのは、 $h \in (0, 1)$ において $W_n(\cdot) = W_m(\cdot)$ が成立する場合と端点 $h = 1$ ($h = 0$)の場合は $W_1(\cdot) > W_2(\cdot)$ ($W_1(\cdot) < W_2(\cdot)$)が成立する場合のいずれかである。以上を整理すると、このケースにおける地域間移住ダイナミクスは以下のよう表される：

$$\frac{\dot{h}}{\gamma} = \begin{cases} W_1(\cdot) - W_2(\cdot) & \text{if } h \in (0, 1) \\ \min\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if } h = 1 \\ \max\{0, W_1(\cdot) - W_2(\cdot)\} & \text{if } h = 0 \end{cases} \quad (41)$$

式(41)は、Ottaviano⁹⁾の近視眼的ダイナミクスと一致している。このダイナミクスでは、より高い瞬間の間接効用が得られる地域へとSkilled労働者の移動が進むため、初期状態値のみに依存して実現する均衡解(停留点)が特定される("history matters")。

輸送費用が一定であるケース : $\mu = 0, \sigma = 0$

式(22)において $\mu = 0, \sigma = 0$ とおけば、 X は定数、 h は時刻 t の関数となることから最適値関数 V_m も t のみの関数として表される。したがって、式(26)は以下のように書き換えることができる。

$$dV_m(t)/dt = rV_m(t) - W_m(t) \quad (m = 1, 2) \quad (42)$$

さらに、 $\nu(t) = V_1(t) - V_2(t)$ とすれば、

$$\dot{\nu}(t) = r\nu(t) - \{W_1(t) - W_2(t)\} \quad (43)$$

が成立する。また、式(23)、(28)より

$$\dot{h}(t) = \gamma\nu(t) \quad (44)$$

が成立する。式(43)、(44)の微分方程式で表現されるシステムは、Ottaviano[2001]における確定論的な予見のダイナミクスと一致する。

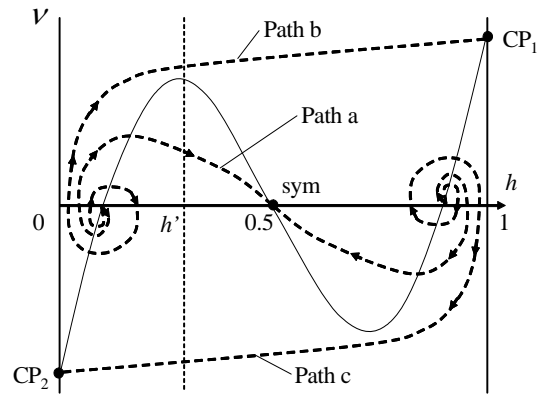


図-2 Expectationによる均衡選択

(2) 確定論的なCPモデルの地域間移住ダイナミクス

式(43)、(44)の微分方程式のシステムとして表現される確定論的な予見的ダイナミクスについて考察しよう。Ottaviano⁹⁾、Baldwin¹⁰⁾は、Fukao and Benabou⁷⁾に基づき、“労働者の地域間移動が必ず一定時間後にローカルに安定な停留点のいずれかに収束する”という終端条件($\dot{h}(t) = 0, \dot{\nu}(t) = 0 (t \geq T)$)を採用した上で、導出される地域間移住ダイナミクスの性質について分析している。図-2は、確定論的なCPモデルにおける地域間移住ダイナミクスの均衡経路を表している。同図の横軸は地域間の人口分布 h を、縦軸は h に対する地域の価値の差 ν を表す。ある人口分布 h' において、複数の均衡経路が同時に存在する。いずれの均衡経路が選ばれるかは、終端条件として外生的に設定される停留点に依存する。

Krugman⁶⁾をはじめとする既存研究では、このようなシステムの性質を*self-fulfilling expectation*という概念を用いて解釈している。その結果、労働者の期待する均衡が自己実現的に到達されることや*expectation*の変化に伴い、ある経路から別の経路(例えば、Path aからPath bやc)へと不連続にジャンプする可能性があることを述べている。しかし、後述のように、このような議論はFukao and Benabou⁷⁾の終端条件が有効となる確定論的な枠組みのみで成立するものである。さらに、既存研究では、いずれの停留点を選択することが合理的な労働者にとって望ましいかについては全く検討されておらず、停留点の選択をモデルにおいて内生的に決定できないという問題がある。

(3) 提案モデルにおける地域間移住ダイナミクス

経済環境の不確実性を明示的に考慮した場合、確率的に変動する X に応じて h も変化する。仮に地域間移住ダイナミクスが確定論的モデルにおける停留点に到達しても、その点が長期的に安定である保証はない。そのため、既存の確定論的モデルで採用されるFukao and

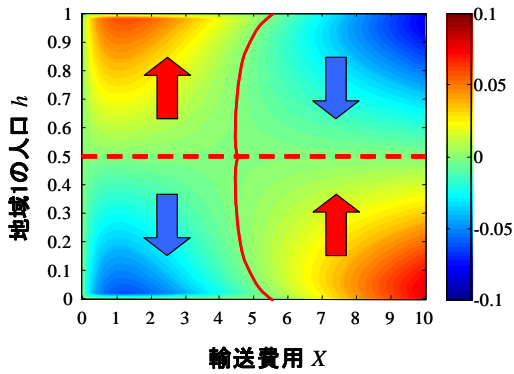


図-3 輸送費用と地域間移住の均衡フロー

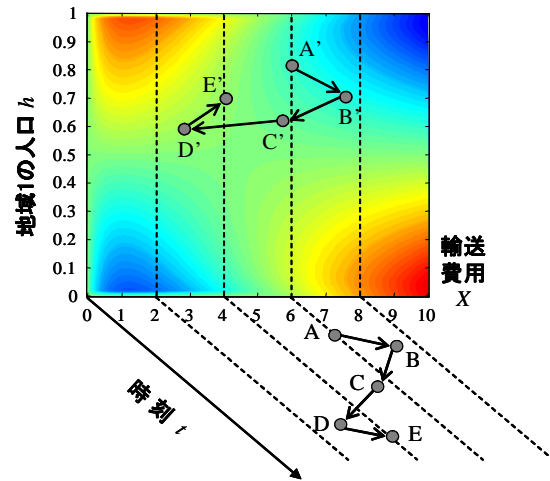


図-4 地域間移住ダイナミクスの均衡経路

Benabou⁷⁾の終端条件を設定することは適当ではない。

提案モデルでは、状態平面 (X, h) 上で每期成立する地域間移住ダイナミクスの均衡条件より、任意の状態 (X, h) において均衡移住フロー $f_{mn}(X, h)$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) が一意に決定される (命題.)。したがって、確率的に発生する輸送費用 X のサンプルパスに応じて地域間移住ダイナミクスの均衡経路を一意に特定することができる。以降では、数値解析結果を用いて、提案モデルにおける地域間移住ダイナミクスについて述べる。数値実験に用いる各パラメータの設定は、以下のとおりである。

- ・短期均衡に関するパラメータ： $H = L = 1, \lambda = 0.50, \xi = 2.00, \alpha = 0.01, \beta = 0.01$.
- ・長期的な地域間移住ダイナミクスに関するパラメータ： $\mu = 0.00, \sigma = 0.40, r = 0.08, \gamma = 0.02$.

図-3は、確率的に変動する輸送費用 X と時々刻々と成立する均衡状態から導かれる、状態平面 (X, h) 上の各点における地域間移住フロー $dh/dt = f_{21} - f_{12}$ の関係を示す。地域間移住の均衡フロー dh/dt が正 (負) となる状態 (X, h) は暖色 (寒色) で、また色の濃淡は dh/dt の大小を表す。図中の破線は、フロー dh/dt の正負がスイッチする境界となる閾値曲線であり、矢印の向きは地域間移住の方向を示す。同図より、任意の状態 (X, h) において地域間移住フローの大きさと方向が一意に決定されることが確認できる。さらに、財の輸送費用、unskilledの労働者数について対称的な2地域を想定している本数値計算では、図-2の path b, cのように $h = 0.5$ を跨いだ人口移動は起こらないことが明らかになった。

続いて、地域間移住ダイナミクスの均衡経路の一意性について、図-4を用いて模式的に説明しよう。同図は、時間-輸送費用の平面 (t, X) と状態平面 (X, h) を組み合わせて作成した図である。平面 (t, X) 上の $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ は、輸送費用 X に関する確率過程 (1) のサンプルパスを表す。命題.より、任意の状態 (X, h) 対

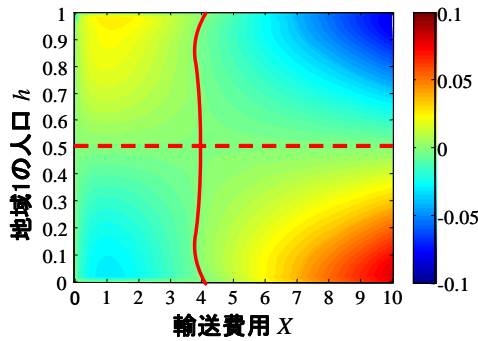
して地域間移住の均衡フロー $f_{mn}(X, h)$ が一意に決定されることから、 A' を初期状態とする経済の地域間移住ダイナミクスは、 X の変動に伴って $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow D' \rightarrow E'$ と一意的に推移する。このように、地域間移住ダイナミクスの均衡経路は、確率的に発生する X のサンプルパスに応じて一意に決定される。すなわち、不確実性の導入により均衡経路の不定性が解消されることがわかる。

図-5は、不確実性の度合い (ボラティリティ σ の大きさ) に応じた地域間移住フローのパターンを示す。図-5(a) から (d) へとボラティリティを次第に小さくすると、地域間移住フローのパターンはおおよそ連続的に変化している。特筆すべきは、 σ を十分にゼロに近づけた (d) の場合においても、地域間移住フローが一意に決定される点である。この数値計算結果から、ほぼ確定的といえる状況下でも、expectationによる均衡選択は起こりえないことが明らかにされた。

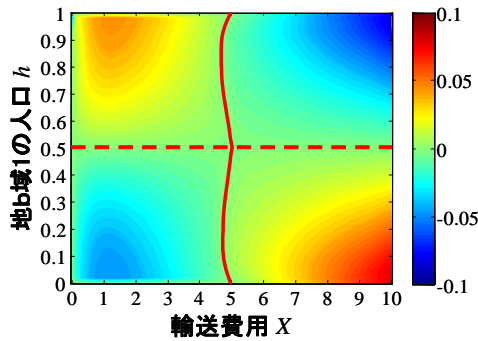
4. 長期的な都市集積・分散パターン

(1) 均衡解確率分布の性質

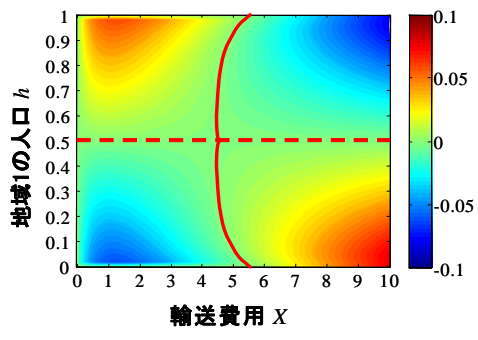
ここでは、2. のモデルから導かれる地域間移住ダイナミクスの結果として長期的に実現する都市集積・分散パターンの性質について検討する。命題.より、確率的に発生する X のサンプルパスに応じて地域間移住ダイナミクスの均衡経路が一意に決定されることが明らかになった。したがって、ある初期状態 (X_0, h_0) から出発し、任意の時間が経過した後に実現する経済状態は、確率分布として知ることができる。本研究では、これを均衡解確率分布と呼ぶ (導出は付録.IIIを参照)。以下では、図-6で示す Case1~Case9の9通りの初期状態について分析を行う。



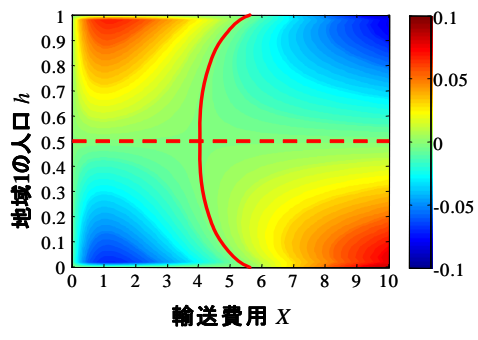
(a) $\sigma = 0.6$



(b) $\sigma = 0.4$



(c) $\sigma = 0.2$



(d) $\sigma = 1.0 \times 10^{-4}$

図-5 不確実性の度合いと地域間移住フローパターン

図-7(a), 8(a) は, 各 Case において地域2に集積する ($0 \leq h \leq \Delta h$) 確率の時系列的な変化を示している. なお, Δh は, 数値解析において離散表現の際の格子間隔を表し, $\Delta h = 0.01$ である. 一方, 図-7(b), 8(b)

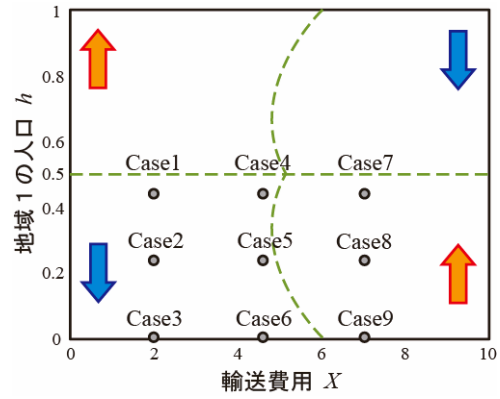


図-6 各 Case の初期状態

は, 分散する ($0.5 - \Delta h \leq h \leq 0.5$) 確率を表す. これらの図より, いずれのケースにおいても, 集積, 分散する確率が長期的に一定の水準に収束する, すなわち定常状態が存在することがわかる. 従って, 以下の性質 1. を得る.

性質 1.

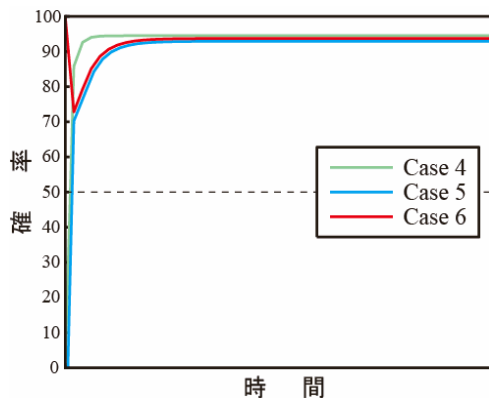
均衡解確率分布には, 集積 (分散) する確率が時間に依らず一定となる定常状態が存在する.

次に, 初期状態が定常状態における確率分布に及ぼす影響を明らかにする. まず, 図-7 は, 地域1の人口 h の初期値のみを変更した Case4, 5, 6 における確率分布を示している. 十分に時間が経過すると, 集積 (分散) する確率は, 地域1の人口 h の初期値に依存しないことがわかる. なお, Case1, 2, 3, および Case7, 8, 9 の場合も同様の性質が成立することが確認されている. 続いて, 図-8 は, 輸送費用 X の初期値のみを変更した Case2, 5, 8 における確率分布を示している. 輸送費用の初期値が大きいほど, 集積 (分散) する確率が小さく (大きく) なることがわかる. 従って, 以下の性質 2. を得る.

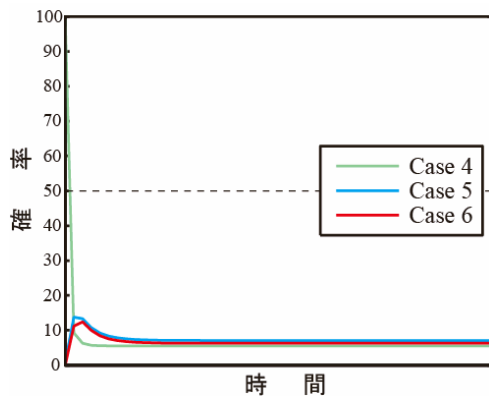
性質 2.

定常状態における均衡解確率分布は, 地域1の人口 h の初期値には依存せず, 輸送費用 X の初期値のみに依存する.

最後に, 不確実性の度合い (ボラティリティ σ) が定常状態における確率分布に及ぼす影響について分析する. 図-9 は, ボラティリティ σ に対する均衡解確率分布の性質を示す. 同図では, Case5 において3つの σ の値について分析を行った. その結果, σ がいずれの値であっても, 十分に時間が経過すると均衡解確率分布が定常状態に到達することがわかる. このとき, ボラティリ

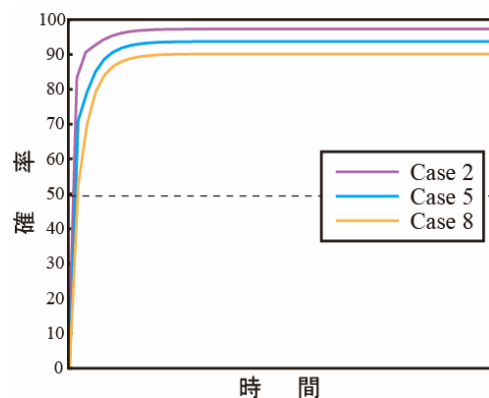


(a) 地域2に集積する ($0 \leq h \leq 0.01$) 確率

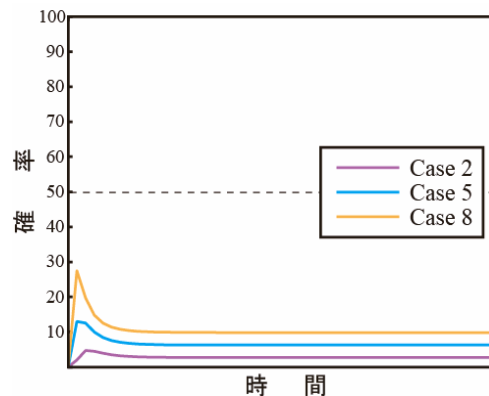


(b) 分散する ($0.49 \leq h \leq 0.5$) 確率

図-7 h の初期値と均衡解確率分布 (Case 4,5,6)



(a) 地域2に集積する ($0 \leq h \leq 0.01$) 確率



(b) 分散する ($0.49 \leq h \leq 0.5$) 確率

図-8 X の初期値と均衡解確率分布 (Case 2,5,8)

ティが小さいほど、定常状態に到達するまでの時間は長くなるが、定常状態における集積（分散）する確率はボラティリティに依存しないことが明らかになった。なお、輸送費用 X の初期値のみを変えた Case 2, 8 においても同様の性質が確認された。さらに、Case 1, 4, 7, および 3, 6, 9 の場合、性質 2 より、同様の結果が得られることがわかる。従って、以下の性質 3 を得る。

性質 3.

定常状態における均衡解確率分布は、輸送費用の不確実性の度合いに依らず一定である。

なお、これらの性質は数値解析の結果から導かれたものであり、数学的に厳密な検討は残された課題である。

(2) 政策的含意

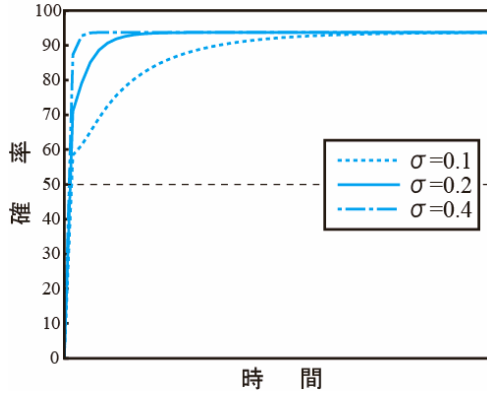
本モデルでは、外部性の存在によって、均衡によって実現する都市の集積・分散パターンが社会的最適な状態と異なる可能性がある。こうした場合、なんらかの政策を講じ、社会的により望ましい人口配分を実現することが必要となる。ここでは、移住促進政策と輸送費用低減政策について、それぞれ有効性について検

討しよう。

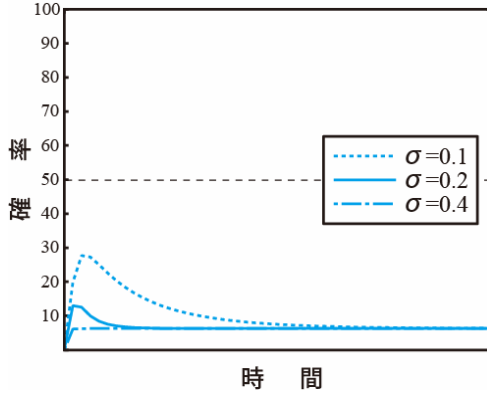
いま仮に、社会的効率性の観点から、一方の地域に集積する便益が大きいものとする。移住促進政策としては、移住者への所得や移住費用に対する補助などが挙げられる。しかし、性質 2 は、こうした移住促進政策が短期的なものであれば、その効果は長期的には消失してしまうことを述べている。一方で、交通インフラ整備によって輸送費用が低減すれば、集積パターンが実現する可能性が高まり、インフラの性質上、その効果は長期にわたって持続されることとなる。また、性質 3 は、こうした結論が、長期的な意味において、経済の不確実性の度合いにほとんど依存せずに成り立つことを示している。

5. おわりに

本研究では、都市集積均衡パターンの選択問題に対して、経済環境の不確実性が存在する下での地域間移住の完全予見的ダイナミクス (perfect-foresight dynamics) を記述したモデルを構築した。解析の結果、動的な均衡経路が確率的に発生する輸送費用のサンプルパスに応じて一意に決定されることが示された。すなわち、不



(a) 地域2に集積する ($0 \leq h \leq 0.01$) 確率



(b) 分散する ($0.49 \leq h \leq 0.5$) 確率

図-9 ボラティリティ σ と均衡確率分布

確実性の導入が“*expectation*”に基づく均衡選択の不定性を克服できることを明らかにした。その上で、均衡ダイナミクスによって実現する長期均衡解の性質について分析を行い、短期的に人口分布を変化させる移住促進政策が長期的にはその効果が消失してしまう一方で、交通インフラ整備政策などの輸送費用の低減をもたらす政策は、長期的に有効であることが明らかになった。なお、今後に残された課題として、本研究で導出した均衡経路の（資源配分の）効率性を把握するために、社会的に最適な集積ダイナミクスを解析し、均衡経路とその最適経路の乖離する場合の改善政策について探る必要がある。

付録.

A-I. 偏微分方程式 (26) の導出

状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ の近傍において最適値関数 V_m を Taylor 展開する。

$$V_m(t + dt, X + dX, h + dh) = V_m(\cdot) + \frac{dV_m(\cdot)}{dt} dt + \frac{dV_m(\cdot)}{dX} dX + \frac{1}{2} \frac{d^2 V_m(\cdot)}{dX^2} (dX)^2 + \frac{dV_m(\cdot)}{dh} dh + o(dt)$$

式 (1) と $(dK)^2 = \sigma^2 \bar{K}^2 (dW)^2$ を代入する。伊藤過程の定義より $E[dW] = 0$, $E[(dW)^2] = dt$ である。

$$E[V_m(t + dt, X + dX, h + dh)] = V_m(\cdot) + \frac{dV_m(\cdot)}{dt} dt + \mu X \frac{dV_m(\cdot)}{dX} dt + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{d^2 V_m(\cdot)}{dX^2} dt + \frac{dV_m(\cdot)}{dh} (f_{21} - f_{12}) dt + o(dt)$$

上式を式 (25) に代入し、両辺を dt で割れば次式を得る。

$$\frac{\{1 - \exp(-rdt)\} V_m(\cdot)}{dt} = W(\cdot) + \exp(-rdt) \left[\frac{dV_m(\cdot)}{dt} + \mu X \frac{dV_m(\cdot)}{dX} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{d^2 V_m(\cdot)}{dX^2} + \frac{dV_m(\cdot)}{dh} (f_{21} - f_{12}) + \frac{o(t)}{dt} \right]$$

ここで、 $dt \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= rV_m(\cdot) \lim_{-rdt \rightarrow 0} \frac{\exp(-rdt) - \exp(0)}{-rdt} \\ &= rV_m(\cdot) \left. \frac{d \exp(x)}{dx} \right|_{x=0} = rV_m(\cdot) \end{aligned}$$

また $\lim_{dt \rightarrow 0} o(dt)/dt = 0$, $\lim_{dt \rightarrow 0} \exp(-rdt) = 1$ より式 (26) を得る。

A-II. 解の一意性の証明

[P-NCPd] の解の一意性を検討するため、[P-NCPd] と等価な変分不等式問題 [P-VIPd] へと書き換える。

[P-NCPd] Find $(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\Psi(\mathbf{f}^*, \mathbf{V})(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) \geq \mathbf{o}$$

where

$$\Omega = \{ \mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}, \mathbf{V} \in \mathcal{R}_+^{2JK} \mid \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{o} \}$$

変分不等式問題 [P-VIPd] において、 Ω が有界凸閉集合で写像 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ は Ω 上で連続であることから、変分不等式問題 [P-VIPd] には解が存在する。さらに、写像 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ が上で連続、微分可能で、その Jacobian が正定値であることから、 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V})$ は狭義単調である。以上より、変分不等式問題 [P-VIPd] の解の一意性が示される。したがって、[P-VIPd] と等価な [P-NCPd] の解の一意性が保証される。

A-III. 均衡確率分布の導出

経済状態 (V, h) は時間の進展に伴い、方程式 (1)、および (19) に従って遷移する。なお、ここでの分析において、(19) の均衡移住フロー $f_{12}(\cdot)$, $f_{21}(\cdot)$ は、[P-NCP] を解くことにより既知である。初期状態 (X_0, h_0) が与えられたときの、時刻 t における経済状態 (X, h) の条件付き確率密度関数を $q(t, X, h | 0, X_0, h_0)$ と表す。輸送費用 X が確率過程 (1) に従うことから、確率密度関数 $q(t, X, h | 0, X_0, h_0)$ の時間的進展は、Fokker-Planck 方

程式を用いて表現される．ここで，時刻・状態空間および確率密度関数をそれぞれ次のように離散化する．

$$(t, X, h) \rightarrow (t^i, X^j, h^k) \equiv (i\Delta t, j\Delta X, k\Delta h)$$

$$p(t, X, h) \rightarrow p_{j,k}^i \equiv p_t(X^j, h^k)$$

時刻 t^i での条件付き確率密度関数を JK 次元列ベクトル $\mathbf{q}^i(\cdot) \equiv [q_{1,1}^i(\cdot), \dots, q_{J,1}^i(\cdot), \dots, q_{1,K}^i(\cdot), \dots, q_{J,K}^i(\cdot)]'$ で表現しよう．ただし， (\cdot) は初期条件 (j_0, k_0) を表す．このとき，2 時点 t_i, t_{i+1} の確率密度関数 $\mathbf{q}^i(\cdot), \mathbf{q}^{i+1}(\cdot)$ は，以下の関係を満たす．

$$\mathbf{L}^i \mathbf{q}^i(\cdot) + \mathbf{M}^i \mathbf{q}^{i+1}(\cdot) = \mathbf{o}$$

これは，連続時間-連続状態の枠組における確率密度関数の時間進展を表わす Fokker-Planck 方程式 (Kolmogorov の前進方程式) に対応する．なお， $\mathbf{L}^i, \mathbf{M}^i$ は，それぞれ， $JK \times JK$ のブロック三項帯行列であり， X および h の遷移方程式 (1) および (19) から一意に決定される．上式を変形すれば，確率密度関数 $\mathbf{q}^i(\cdot)$ は，以下の線形方程式に従う：

$$\mathbf{q}^{i+1}(\cdot) = \mathbf{A}^i \mathbf{q}^i(\cdot)$$

従って，確率関数列 $\mathbf{q}^0(\cdot), \mathbf{q}^1(\cdot), \dots, \mathbf{q}^i(\cdot), \dots$ が非定常離散 Markov モデルとして表現でき，その遷移行列 \mathbf{A}^i が，経済状態 (X, h) の遷移方程式 (1), (19) から一意に決定されることを意味している．初期条件より，上式を逐次演算を行うことにより任意の時刻 i における経済状態の確率関数 \mathbf{q}^i を導くことができる．

参考文献

- 1) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy* 99, pp.483-499, 1991a.
- 2) Howitt, P., McAfee, R.P.: Stability of Equilibria with Externalities, *Quarterly Journal of Economics* 103, pp.261-78, 1988.

- 3) Murphy, K., Shleifer, A., Vishny, R.: Industrialization and the Big Push, *Journal of Political Economy* 97, pp.1003-23, 1989.
- 4) Either, W.: Decreasing Costs in International Trade and Frank Graham's Argument for Protection", *Econometrica* L, pp.1243-68, 1982.
- 5) Matsuyama, K.: Increasing Returns, Industrialization, and Indeterminacy of Equilibrium, *Quarterly Journal of Economics*, 106, pp.617-650, 1991.
- 6) Krugman, P.: History versus Expectations, *The Quarterly Journal of Economics* 106, pp.651-667, 1991b.
- 7) Fukao, K., Benabou, R.: History versus Expectations: A comment, *The Quarterly Journal of Economics* 108, pp.651-667, 1993.
- 8) Fujita, F., Krugman, P., Venables, A.: *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, The MIT Press, 1999.
- 9) Ottaviano, G.I.P.: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics* 29, pp.51-77, 2001.
- 10) Baldwin, R.: Core-Periphery model with forward-looking expectations, *Regional Sciences and Urban Economics* 31, pp.21-49, 2001.
- 11) Frankel, D. M., Pauzner, A.: Resolving Indeterminacy in Dynamic Settings; The Role of Shocks, *Quarterly Journal of Economics*, 115, pp.285-304, 2000.
- 12) 織田澤利守, 赤松隆, 藤原誠: 不確実な経済環境における都市集積の均衡ダイナミクス: 非線形相補性アプローチ, 土木計画学研究・論文集, 2007 (投稿中) .
- 13) Forslid, R., Ottaviano, G.I.P.: An Analytically Solvable Core-Periphery Model, *Journal of Economic Geography* 3, pp.229-240, 2003.
- 14) Dixit, A.K., Stiglitz, J.E.: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *American Economic Review* Vol.67, pp.297-308, 1977.
- 15) Dixit, A.K., Pindyck, R.S.: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

(2007.5.28 受付)

Equilibrium Dynamics of Interregional Migration Timing Decision in Agglomeration Economies

Toshimori OTAZAWA and Takashi AKAMATSU

We propose a novel long-term migration dynamics that can overcome the equilibrium indeterminacy of Core-Periphery (CP) model a la Krugman (1991b). This goal is achieved by introducing uncertainty of economic environment into CP model with Perfect foresight migration dynamics. We show that an equilibrium path of migration dynamics can be uniquely determined in accordance with each stochastic sample path. We also reveal some properties of long-run outcomes.