

危険物輸送のためのカタストロフ回避戦略

長江 剛志¹・赤松 隆²

¹正会員 博士 (情報科学) 神戸大学大学院 自然科学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

²正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

先進工業国において、可燃性液体や放射性物質などの危険物の日常的な輸送は欠かせない。一方、これらの危険物が(交通事故などによって)輸送中に流出した場合、周辺の住民・環境・経済に甚大な損害を及ぼす。本研究では、こうした流出事故に特有の“低頻度・大損害”特性を考慮しつつ、そのリスクを最小限に抑える輸送計画問題に対する定量的分析手法を開発する。具体的には、まず、輸送起終点間の各経路への最適な輸送配分比率を決定する問題を、maximin 問題として定式化する。そして、この問題が、交通計画分野で知られる logit 型の確率的均衡交通配分と類似した数理構造を持つ凸計画問題に帰着することを明らかにする。これを活用して、現実的な規模の一般ネットワークに対しても、効率的に最適な輸送戦略を評価できる数値計算法を開発する。

Key Words : 危険物輸送, 混合戦略輸送問題, ロバスト性, 確率的均衡交通配分

1. はじめに

(1) 背景と目的

危険物輸送は、産業活動を継続する上で欠かせないが、一方で、人命、経済、環境に深刻な悪影響を及ぼすリスクを持つ。ここで、危険物とは、火薬、液化ガス、可燃性の液体・固体、酸化剤、毒劇物、放射性物質、腐食性液体などである。これらは、一般に、生産される(もしくは廃棄物として発生する)場所と使用される(もしくは処分・無害化処理される)場所が異なるため、先進工業国においては、大規模かつ長距離の危険物輸送が日常的に行なわれている^{1),2)}。これらの危険物は、一方で、環境および人体にとって極めて有害であり、その輸送車両を巻き込む事故がひとたび発生した場合、周辺の社会経済および環境に深刻な被害(e.g. 金融・実物資産の損失、避難・健康被害・負傷・死亡による近隣住民の便益損失、環境汚染)をもたらす。以下では、このような被害をもたらす確率事象を“(危険物の)流出事故”と呼ぶ。

近年、危険物輸送車両の起終点、経路およびスケジュールの適切な管理によってこうした流出事故のリスクの軽減をはかる輸送計画問題が、交通計画およびオペレーションズ・リサーチの分野で注目を集めている。その中でも、危険物の輸送経路選択問題に関しては、数多くの研究蓄積^{3)~14)}が存在し、HazTrans⁴⁾や PC*HazRoute¹⁵⁾などの商用の意思決定支援システムも開発されている(より詳細なレビューについては、続く(2)節も参照されたい)。

しかし、これらの従来研究の多くは、危険物流出事故に特有の、“滅多に起こらないが、生起すれば大惨事

を招く”という LPHC (*Low Probability with High Consequence*: 低頻度・大損害) 特性を適切に考慮できていない。具体的には、従来のモデルでは、(本来、推計することが極めて困難なはずの)各経路での流出事故の生起確率が、当該経路長を単調変換したものに置き換えられてしまっている。そして、それ故に、これらのモデルが不適切な経路を導き得ることが指摘されている^{11),16)}。

Bell¹⁶⁾は、こうした LPHC 特性を考慮する場合、単一の経路に全ての危険物輸送車両を集中させるよりも、複数の経路に輸送車両を分散させる方が、よりロバストであることを示した。そして、その各経路への輸送量を決定する問題(以下、“混合戦略輸送問題”)を、maximin 問題として定式化し、数値解法を提案した。しかし、この手法は、Bell¹⁶⁾自身が認めるように、現実の交通ネットワークを対象とした定量的評価の観点からは、以下の2つの問題点を残している：i) 最適戦略の一意性が保証されない；ii) 提案解法が heuristic であり、その大域的収束や効率性が保証されていない。

そこで、本研究では、LPHC 特性を考慮した危険物の混合戦略輸送問題に対して、現実的な規模のネットワークにも適用可能な定量的分析手法を開発する。具体的には、まず、Bell¹⁶⁾の混合戦略輸送モデルを、より一般的な枠組へと拡張する。次に、こうして一般化された輸送計画問題が凸計画問題に帰着することを示す。そして、この凸計画問題が、交通計画の分野でよく知られる logit 型確率的均衡交通配分モデルと共通の数理構造を持つことを明らかにする。これを活用することで、サイクルを含む大規模な一般ネットワークを対象とした問題に対しても、効率的で大域的収束の保証された解法アルゴリズムを開発する。

本稿は、以下のように構成される：まず、続く(2)において、危険物輸送問題に関する従来研究を俯瞰し、それらに対する本研究の位置付けを示す。次に、2.では、Bell¹⁶⁾の混合輸送計画問題を一起点多終点ネットワークに拡張した基本モデルを示す。続く3.では、この基本モデルを、経路の多様性に関する輸送計画者の選好を考慮した、より一般的な枠組へと拡張する。そして、この拡張モデルが、双対関係にある2つの異なる凸計画問題へと帰着することを明らかにする。このことは、輸送計画問題に対するより豊かな経済学的解釈を与えるだけでなく、現実的な大規模ネットワークに適用可能な効率的な数値解法をも開発可能とする。4.では、こうして導かれた凸計画問題の数理的特性を活用した効率的な求解アルゴリズムを開発する。続く5.では、数値計算例を用いて、提案アルゴリズムが正しく作動することを確認する。6.では、提案モデルの、より一般的かつ現実的な枠組への拡張について議論する。最後に、7.はまとめである。

(2) 本研究の位置付けと基本的考え方

本節では、危険物輸送計画に関する従来研究を俯瞰し、本研究の位置付けを明らかにする。そのために、まず、ある交通ネットワークを考え、そのノード集合を $N \equiv \{1, \dots, N\}$ 、リンク集合を $L \equiv \{1, \dots, L\}$ で表わそう。このネットワーク上に1つの起終点ペア (o, d) を設け、その輸送起点 o から輸送終点 d までの経路の集合を K とする。

従来研究の多くは、起終点間の経路 $k \in K$ を1単位の危険物輸送車両が通過するときの流出事故リスク C_k を、後述するような指標で計量し、それを最小にする経路(以下、最小リスク経路)を求める問題：

$$\min_{k \in K} C_k$$

を対象としている^{3)~15)}。各経路の流出事故リスクの指標 C_k としては、一般に、以下で定義される当該経路上のリンクの期待損害の総和：

$$C_k \equiv \sum_{ij \in L} \delta_{ij,k} c_{ij} q_{ij}. \quad (1)$$

が用いられる。ここで、 $\delta_{ij,k}$ はリンク ij が経路 k に含まれているとき1、それ以外で0となる Kronecker のデルタである。

式(1)における c_{ij} および q_{ij} は、それぞれ、以下のように定義される：まず、 c_{ij} は、リンク ij で流出事故が起きたときに発生する社会的損失(e.g. 財や資産の損失、環境汚染、周辺住民の避難、負傷、死亡)を定量的指標で測ったものである。以下では、これをリンク ij の潜在的暴露(potential exposure)と呼ぶ。従来研究において、この潜在的暴露の指標としては、当該リンクから一定の距離内の居住者人口が最も一般的に用いられる^{3),5)~11),16)}。

Abkowitz⁴⁾は居住者人口を適当に累乗したものをを用いることで、計画者のリスク回避性向を表現しようとした(これに対しては、Erkut and Ingolfsson¹¹⁾が否定的な批判を述べている)。杉木ら¹³⁾および Asakura¹⁴⁾は、あるリンク周辺の居住者人口を計算する際に、居住地点から当該リンクまでの距離に応じた減衰係数を乗じる方法を提案している。

次に、 q_{ij} は、当該リンク上を1単位の危険物輸送車両が通過する度に、流出事故が発生する確率である。以下では、これをリンク ij の事故確率(incident probability)と呼ぶ。本来、この確率は、各リンクにおける過去の危険物の流出事故記録などから推計される必要がある。ところが、危険物の流出事故は極めて稀であるため、全てのリンクについて事故確率 $\{q_{ij}\}$ を推計するのに十分なデータが得られることは、殆ど皆無である。そのため、従来研究の多くは、単位距離あたりの経験的な事故生起確率(例えば、Erkut and Verter¹⁰⁾では 10^6 マイルあたり $0.1 \sim 0.8$)に基づいて、リンク ij の距離を単調変換したものを事故確率として採用している。

しかし、こうした従来研究のアプローチは、以下の2つの問題を残している。第1の問題点は、リンク事故確率 $\{q_{ij}\}$ の推計方法が不適切なことである。本来、危険物流出事故は、運転手の健康状態、心理状態、運転技術などの人的要因、当該リンクの曲率、勾配、幅員などの構造的要因、さらには、天候、路面性状、明るさ、周囲の交通状況などの要因が複合的に組み合わせることで生起する。そして、これらの要因が事故確率に及ぼす影響を定量的に評価・推計することは、(流出事故が稀少事象であるため)事実上、不可能である。従来手法は、こうした複合的要因を完全に無視し、流出事故の生起確率をリンク長だけで無理矢理説明する便法でしかないと言える。第2の問題点は、リンク事故確率の推計誤差の影響を無視していることである。一般に、潜在的暴露の高い市街地などのリンクを含む経路のリスク C_k は、リンク事故確率がわずかに違うだけでも大きく異なる。従って、微小なリンク事故確率の推計誤差によって不適切な輸送経路が導かれ、結果として社会が直面するリスクが増加し得る可能性を否定できない。こうした問題は、いずれも、従来手法が、危険物流出事故に特有の、LPHC (low-probability with high-consequence: 低頻度・大損害)特性を適切に考慮できていないことに起因する。

これに対し、Bell¹⁶⁾は、LPHC特性を明示的に考慮した上で、危険物輸送問題を記述・分析するための新たな枠組を提案した。Bell¹⁶⁾のモデルには、LPHC特性を考える上で極めて自然な、以下の2つの考え方が(暗黙的に)取り入れられている。第1に、リンク事故確率を推計することが極めて困難な場合、輸送計画者は、①強引

に推計されたリンク事故確率から求められる単一のリンク最小経路に全ての危険物輸送車両を集中させるよりも、②想定できる範囲内のどんなリンク事故確率に対しても一定のパフォーマンスを保てるように、複数の経路に輸送車両を分散させると考えるのが自然である。第2に、輸送計画者(あるいは社会)は、LPHC特性を持つリスクに対してカタストロフ回避的(catastrophe averse)¹¹⁾であると仮定している。すなわち、 10^{-3} の確率で10人だけに影響を与え得る経路と 10^{-7} の確率で10,000人を巻き込み得る経路がある場合、期待値が同じであっても、計画者は“万が一”のことを考えて前者の経路を選好すると仮定している。

なお、このカタストロフ回避性向は、経済学における資産価格評価理論および意思決定科学の分野においては“ambiguity”(あるいはKnight流不確実性¹⁷⁾)回避性向として知られている^{18),19),20),21)}。その詳細は本稿の範囲を超えるために省略するが、興味のある読者は、赤松・長江²²⁾などを参照されたい。

Bell¹⁶⁾の研究は、以下のように要約できる。まず、各経路 $k \in K$ のリスクを当該経路への輸送量 h_k とその経路の(輸送1単位あたりの)期待損害 C_k の積として再定義し、その全経路についての総和 $\sum_{k \in K} h_k C_k$ を、流出事故のリスクを測る指標(以下、期待損害)とした。次に、輸送計画問題を、各経路への輸送量と各リンクの事故確率という2つの戦略変数を同時に決定する問題として定式化した。そこでは、経路輸送量 $\{h_k\}$ はこの期待損害を最小化するように決定される一方で、リンク事故の生起確率 $\{q_{ij}\}$ は(カタストロフ回避性向を反映して)期待損害を最大化するように決定される。以下では、このモデルをmaximin混合戦略(MM)輸送問題と呼ぶ。Bell¹⁶⁾は、このmaximin混合戦略輸送問題に対して、最短経路探索アルゴリズムと逐次平均化法(MSA: Method of Successive Averages)を組み合わせた解法を提案した。

しかし、このMM輸送モデルは、現実の交通ネットワークを対象とした輸送戦略の定量的評価という観点からは、以下の3つの問題点を残している。第1に、このMM輸送問題に対しては、その最適戦略(i.e. 経路輸送量およびリンク事故確率)の一意性が保証されない。第2に、Bellが提案した数値解法はheuristicsでしかなく、一般的なネットワークに対する効率性や収束可能性が保証されていない。そのため、この手法を、現実のネットワークにおける危険物輸送計画にそのまま適用するには無理がある。この2点は、Bell¹⁶⁾自身がその論文上で言及している。最後に、第3の問題点として、Bellは1起点1終点のMM輸送モデルのみを扱っている。そして、複数の起終点ペアが存在する場合は、個々の起終点ペアごとに最適輸送戦略が独立に求められる

と主張している。しかし、これは、以下に示すように、明らかな誤謬である: まず、2つの起終点ペア (o, d_1) と (o, d_2) を考え、 (o, d_1) 間の全経路が (o, d_2) 間の経路集合に含まれているとしよう; このとき、各起終点ペア間の輸送戦略は、明らかに、それぞれの輸送需要の大小に応じて決定されるべきである。それにも関わらず、Bell¹⁶⁾は、輸送戦略と輸送需要の大きさが無関係であると主張しているのである。

本研究の提案手法は、Bell¹⁶⁾の手法が持つ上述の難点を克服するものである。まず、第1に、本研究は、MM輸送問題を1起点多終点の枠組で定式化し直した上で、(輸送計画者の)選択経路の多様性に対する選好を組み込んだ枠組へと一般化する。これにより、混合戦略輸送問題に対してより現実的かつ豊かな経済的解釈を与えられる。第2に、こうして一般化されたMM輸送問題が、互いに双対関係にある2つの異なる凸計画問題に帰着することを示す。そして、その凸計画問題の数理的特性を分析することにより、経路輸送量について最適解の一意性を保証できる。最後に、本研究では、こうして得られた凸計画問題が、交通計画分野で知られる確率的利用者均衡配分問題と類似した数理的構造を持つことを明らかにする。これを活用することで、現実的な規模の一般ネットワークに対しても、最適な輸送戦略を効率的に求められる数値計算法を開発できる。これらは、いずれも、本研究のオリジナルな貢献である。

2. 基本モデル

本章では、基本モデルとして、1起点多終点ネットワークにおけるmaximin混合戦略(MM)輸送モデルを示す。具体的には、まず、(1)で1起点多終点ネットワークの枠組を示す。次に、(2)において、1起点1終点ネットワークを対象として開発されたBell¹⁶⁾のMMモデルを、この1起点多終点の枠組へと拡張する。最後に、(3)において、この基本モデルが、双対関係にある2つの異なる線形計画問題に帰着することを明らかにする。

(1) モデルの枠組

ある(サイクルを含む)一般的な有向グラフで表わされるネットワーク \mathcal{G} を考え、そのノード集合を $N \equiv \{1, \dots, N\}$ 、リンク集合を $L \equiv \{1, \dots, L\}$ と記述する。このネットワーク上に1つの起点 o と、 D 個の終点集合 D を設け、任意の起終点 (o, d) 間の経路集合を $K^d, \forall d \in D$ と記述する。

このネットワーク上で、1単位の危険物輸送車両が何らかの事故に巻き込まれ、周辺地域に被害をもたらす事象を“流出事故”と呼び、あるリンク $ij \in L$ 上で流出事故が発生する事象を“リンク ij 上の流出事故”と呼ぶ。

複数のリンク上で同時に流出事故が発生することはないものと仮定する．本研究では，リンク ij 上の流出事故によって発生する社会的損失（潜在的暴露）を，当該リンクから一定距離内の居住者人口 c_{ij} として定義する．

ネットワーク \mathcal{G} 上のいずれかのリンクで流出事故が発生する事象を“ネットワーク上の流出事故”と呼ぶ．ネットワーク上の事故を与件としたリンク ij 上の流出事故の条件付生起確率（以下，単にリンク ij の事故確率）を q_{ij} で表わし， $\mathbf{q} \equiv \{q_{ij} | ij \in L\}$ とベクトル表現する．リンク事故確率 \mathbf{q} は，条件付確率としての保存則：

$$\sum_{ij \in L} q_{ij} = 1. \quad (2)$$

および非負制約

$$q_{ij} \geq 0, \quad \forall ij \in L \quad (3)$$

を満足する．

あるリンク事故確率 \mathbf{q} の下で，1 単位の危険物が起終点 (o, d) 間の経路 $k \in K^d$ を輸送されるときに条件付期待損害を，“経路 k の（期待）損害”と呼び，

$$C_k^d(\mathbf{q}) \equiv \sum_{ij \in L} c_{ij} q_{ij} \delta_{ij,k}^d, \quad \forall k \in K^d, \forall d \in D. \quad (4)$$

で表わす．ここで， $\delta_{ij,k}^d$ は，Kronecker のデルタを一般化したもので，起終点 (o, d) 間の経路 k がリンク ij を n 回通過するとき n ，経路 k がリンク ij を通過しないとき 0 となる．

輸送計画者は，終点 $d \in D$ への危険物輸送需要 f^d を与件として， (o, d) 間の各経路への輸送量を決定する．ある終点 d への経路 $k \in K^d$ への輸送量を h_k^d で表し， $\mathbf{h} \equiv \{h_k^d | k \in K^d, d \in D\}$ とベクトル表現する．経路輸送量 \mathbf{h} は，以下の保存則：

$$\sum_{k \in K^d} h_k^d = f^d, \quad \forall d \in D. \quad (5)$$

および非負制約

$$h_k^d \geq 0, \quad \forall k \in K^d, d \in D. \quad (6)$$

を満足する．

本研究では，ある経路輸送量 \mathbf{h} の下でのリンク ij の輸送量に潜在的暴露を乗じたもの：

$$\pi_{ij}(\mathbf{h}) \equiv c_{ij} \sum_{d \in D} \sum_{k \in K^d} h_k^d \delta_{ij,k}^d, \quad \forall ij \in L. \quad (7)$$

を，リンク ij の暴露 (exposure) と呼ぶ．ここで， $\delta_{ij,k}^d$ は，式 (4) で用いられているのと同じ，一般化された Kronecker のデルタである．

あるリンク事故確率 \mathbf{q} および経路輸送量 \mathbf{h} が選択されたときの，（ネットワーク上の流出事故を与件とした）条件付期待損害を，

$$\begin{aligned} Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &\equiv \sum_{d \in D} \sum_{k \in K^d} \sum_{ij \in L} h_k^d c_{ij} \delta_{ij,k}^d \\ &= \sum_{d \in D} \sum_{k \in K^d} h_k^d C_k^d(\mathbf{q}) \\ &= \sum_{ij \in L} q_{ij} \pi_{ij}(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

と定義する．以下では， $Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q})$ を，“ $(\mathbf{h}$ および \mathbf{q} の下での) 期待損害”と呼ぶ．

(2) 基本モデルの定式化

本研究では，前章で述べた危険物流出事故の LPHC (LPHC: *Low Probability with High Consequence*) 特性を明示的に考慮するために，輸送計画者がカタストロフ回避的であるとする．すなわち，輸送計画者は，最悪の (i.e. 期待損害を最大化する) リンク事故確率 \mathbf{q} を推定すると同時に，期待損害を最小とするような経路輸送量 \mathbf{h} を決定すると仮定する．上述の 1 起点多終点ネットワークにおいて，この行動は，以下の maximin 問題：

$$\begin{aligned} \text{[P0]} \quad &\max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{h}} Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}), \\ \text{s.t.} \quad &(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \in \Omega_{\mathbf{h}} \times \Omega_{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

として定式化される．ここで， $\Omega_{\mathbf{h}}$ は経路輸送量 \mathbf{h} の許容領域であり，等式制約 (5) および非負制約 (6) を満足する領域として定義される．同様に， $\Omega_{\mathbf{q}}$ は，リンク事故確率 \mathbf{q} が満足すべき等式制約 (2) と非負制約 (3) から構成される領域である．以下では，問題 [P0] を，(1 起点多終点の) maximin 混合戦略 (MM) 輸送問題と呼ぶ．

この MM 輸送問題は，非対称な 2 主体間のゲームとしても解釈できる¹⁶⁾：まず，各経路への危険物の輸送量を決定する“配分者”と，輸送戦略がロバストであるか否かを検証する“検査者”という，非対称な 2 主体を考える．ここで，配分者は，各経路への輸送の配分比率 (i.e. 経路選択確率) を戦略変数とし，期待損害の最小化を目的とする．一方で，検査者は，リンク事故確率を戦略変数とし，期待損害を最大化を目的とする (i.e. 最悪ケースを想定する)．このとき，MM 輸送問題 [P0] の解はこのゲームの混合戦略 Nash 均衡解であり，(配分者にとって不都合な状況を想定する) 検査者によってロバスト性が保証された輸送戦略として解釈できる．

(3) 線形計画問題としての表現

Bell¹⁶⁾ は，1 起点 1 終点ネットワークを対象とした MM 輸送問題が，2 つの異なる線形計画問題 (LP: *Linear Programming*) —それぞれが互いに双対関係にある—として表現し直せることを示した．本節では，1 起点多終点の MM 輸送問題 [P0] に対しても，同様に，等価な線形計画問題を導出できることを示す．

まず、問題 [P0] は、リンク事故確率 q のみを未知変数とした以下の問題

$$[\text{P0'-Dual}] \quad \max_q Z_0(q), \quad \text{s.t.} \quad q \in \Omega_q.$$

として表現し直せる．ここで、 $Z_0(q)$ は、経路輸送量 h に関する以下の線形計画問題：

$$[\text{LP0'}(q)] \quad Z_0(q) \equiv \min_h Z_0(h, q), \quad \text{s.t.} \quad h \in \Omega_h.$$

の最適解における目的関数である．この問題 $[\text{LP0'}(q)]$ の双対問題は、以下のように定式化できる．

$$[\text{LP0'-(}q\text{)-Dual}] \quad Z_0(q) = \max_{S_0} \sum_{d \in D} f^d S_0^d, \\ \text{s.t.} \quad S_0^d \leq C_k^d(q), \quad \forall k \in K^d, \forall d \in D. \quad (8)$$

ここで、制御変数 $S_0 \equiv \{S_0^d | d \in D\}$ は、経路輸送量の保存則 (5) に対する Lagrange 乗数に相当する．さらに、制約条件 (8) より、 S_0^d は、起終点 (o, d) 間の (輸送 1 単位あたりの) 最小経路損害としても解釈できる．

問題 $[\text{LP0'-(}q\text{)-Dual}]$ の最適解における目的関数 $Z_0(q)$ を問題 $[\text{P0'-Dual}]$ に代入すれば、maximin 問題 [P0] は、リンク事故確率 q および最小経路損害 S_0 を明示的な制御変数とする以下の線形計画問題に帰着する．

$$[\text{LP0-Dual}] \quad \max_{q, S_0} \sum_{d \in D} f^d S_0^d, \\ \text{s.t.} \quad S_0^d \leq C_k^d(q), \quad \forall k \in K^d, \forall d \in D, \\ q \in \Omega_q.$$

ここで、起終点 (o, d) 間の最小経路損害 S_0^d をリンク事故確率 q についての既知関数：

$$S_0^d(q) \equiv \min_{k \in K^d} C_k^d(q), \quad \forall d \in D. \quad (9)$$

として記述することで、問題 $[\text{LP0-Dual}]$ は、 q のみを制御変数とする以下の凸計画問題としても記述できる．

$$[\text{CP0-Dual}] \quad \max_q \sum_{d \in D} f^d S_0^d(q), \quad \text{s.t.} \quad q \in \Omega_q.$$

次に、問題 $[\text{LP0-Dual}]$ の双対問題は、経路輸送量 h およびリンク事故確率の保存則 (2) に関する Lagrange 乗数 Q_0 を明示的な制御変数とする以下の線形計画問題：

$$[\text{LP0-Primal}] \quad \min_{h, Q_0} Q_0, \\ \text{s.t.} \quad Q_0 \geq \pi_{ij}(h), \quad \forall ij \in L, \quad (10) \\ h \in \Omega_h.$$

として定式化できる．ここで、 $\pi_{ij}(h)$ は、式 (7) で定義されるリンク ij の暴露である．

ここで、問題 $[\text{LP0-Primal}]$ の目的関数 Q_0 は、制約条件 (10) より、ある経路輸送量 h の下での最大リンク暴

露と解釈できる．そして、これを経路輸送量 h についての既知関数：

$$Q_0(h) \equiv \max_{ij \in L} \pi_{ij}(h) c_{ij} \quad (11)$$

として記述することで、問題 $[\text{LP0-Primal}]$ は、 h のみを制御変数とする以下の凸計画問題としても記述できる．

$$[\text{CP0-Primal}] \quad \min_h Q_0(h), \quad \text{s.t.} \quad h \in \Omega_h.$$

(4) 基本モデルの問題点

前節までで、MM 輸送問題 [P0] が、双対関係にある 2 つの線形計画問題 $[\text{LP0-Dual}]$ および $[\text{LP0-Primal}]$ に帰着できることを示した．しかし、これらの LP は、いずれも、定量的分析を目的とする本研究の立場からは、以下の 2 つの問題点を残している．

第 1 に、線形計画問題 $[\text{LP0-Dual}]$ および $[\text{LP0-Primal}]$ は、いずれも、最適な経路輸送量 h およびリンク事故確率 q の一意性が、一般に、保証されない．なお、許容領域が有界凸集合であるため、目的関数の最適値は一意に決定される．

第 2 に、問題 $[\text{LP0-Dual}]$ および $[\text{LP0-Primal}]$ は、いずれも、経路についての変数 $\{h_k^d\}$ および $\{C_k^d(q)\}$ を明示的に含むため、これらの線形計画問題を直接解くためには、各起終点 (o, d) ごとに経路集合 K^d を列挙する必要がある．そのため、サイクルを含むような一般的なネットワークにおいては、これらの問題を、そのままの形で厳密に解く方法は存在しない．

Bell¹⁶⁾ は、経路を列挙せずに MM 輸送問題 [P0] を解く方法として、最短経路探索と逐次平均法 (MSA: *Method of Successive Averages*) を組合せたアルゴリズムを提案した．しかし、Bell 自身が言及しているように、この解法は heuristic であり、一般的な規模のネットワークに対する大域的収束および効率性は全く保証されていない¹⁶⁾．

3. 拡張モデル

本章では、前章で述べた MM 輸送モデル [P0] を、より一般的な枠組へと拡張する．この一般化は、混合戦略輸送モデルに対して豊かな経済的解釈を与えるのみならず、現実的な規模のネットワークに対しても効率的な求解アルゴリズムの開発を可能とする．具体的には、まず、問題 [P0] を、輸送計画者が、(期待損失だけでなく) 経路選択の多様性 (variation) に関する選好を持つ枠組へと一般化する．次に、こうして一般化された混合戦略輸送問題の最適性条件より、最適経路選択確率が解析的に求められることを明らかにする．これにより、一般化された混合戦略輸送モデルと等価な 2 つの凸計画問題——互いに双対関係にある——を導出する．これ

らは、いずれも、4.において、大域的収束の保証された効率的解法を開発する鍵となる。

(1) 定式化

本研究では、問題 [P0] の目的関数に経路選択エントロピーを加えた以下の問題を考える。

$$\begin{aligned}
 \text{[P1]} \quad & \max_q \min_h Z_1(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \\
 & \equiv Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}) - \frac{1}{\theta} \sum_{d \in D} f^d H_K^d(\mathbf{h}), \\
 \text{s.t.} \quad & (\mathbf{h}, \mathbf{q}) \in \Omega_h \times \Omega_q.
 \end{aligned}$$

ここで、 Ω_h および Ω_q は、経路輸送量 \mathbf{h} およびリンク事故確率 \mathbf{q} の許容領域であり、それぞれ、経路輸送量の保存則 (5) と非負制約 (6)、およびリンク事故確率の保存則 (2) と非負制約 (3) を満足する領域として定義される。以下では、問題 [P1] を、ロバスト混合戦略 (RM) 輸送問題と呼ぶ。

RM 輸送問題 [P0] の目的関数第 2 項に表われる $H_K^d(\mathbf{h})$ は、起終点 (o, d) 間の経路選択エントロピーであり、全ての $d \in D$ について、以下の式で定義される。

$$H_K^d(\mathbf{h}) \equiv - \sum_{k \in K^d} \frac{h_k^d}{f^d} \ln \frac{h_k^d}{f^d}. \quad (12)$$

この経路選択エントロピー $H_K^d(\mathbf{h})$ については、以下の性質が知られている： $H_K^d(\mathbf{h})$ は、起終点 (o, d) 間の全ての経路輸送量が等しい (i.e. $h_1^d = h_2^d = \dots$) ときに最大値 $\ln \|K^d\|$ を取り、いずれか一つの経路に全ての輸送車両が集中する場合 (i.e. $\exists k \in K^d | h_k^d = f^d, h_{k'}^d = 0, \forall k' \neq k$) に最小値 0 を取る。これより、エントロピー $H_K^d(\mathbf{h})$ は、起終点 (o, d) 間の経路選択の多様性を表す指標と見なせる。すなわち、危険物輸送車両が特定の経路に集中するときには $H_K^d(\mathbf{h})$ は小さくなり、多くの経路がまんべんなく利用されるときには $H_K^d(\mathbf{h})$ は大きくなる。

このことは、RM 輸送問題 [P1] が以下のように解釈できることを意味している：輸送計画者はリンク損害確率 \mathbf{q} を“悲観的に”推定すると同時に、経路輸送量 \mathbf{h} については、選択経路の多様性を確保しつつ期待損害を最小にするように決定する。このとき、パラメータ θ は、経路選択の多様性 (i.e. エントロピー) に対する期待損害の重みとして解釈できる。すなわち、 $\theta \rightarrow 0$ の場合、輸送計画者にとって期待損害 $Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q})$ は何の意味も持たず、全ての経路を等確率で選択することが輸送計画者にとって最適となる。一方、 $\theta \rightarrow \infty$ の場合、経路選択の多様性は無視され、RM 輸送問題 [P1] は MM 輸送問題 [P0] に帰着する。

(2) 最適性条件と等価な凸計画問題の導出

RM 輸送問題 [P1] は、その最適性条件の性質を利用することで、双対関係にある 2 つの凸計画問題——それぞれが、リンク事故確率 \mathbf{q} あるいは経路輸送量 \mathbf{h} のみを明示的な未知変数とする——に帰着させられる。

まず、RM 輸送問題 [P1] は、リンク事故確率 \mathbf{q} のみを未知変数とした以下の問題として定式化できる：

$$\text{[P1'-Dual]} \quad \max_q Z_1(\mathbf{q}), \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{q} \in \Omega_q.$$

ここで、 $Z_1(\mathbf{q})$ は、リンク事故確率 \mathbf{q} を与件として経路輸送量 \mathbf{h} を決定する以下の凸計画問題：

$$\begin{aligned}
 \text{[CP1'(\mathbf{q})]} \quad & Z_1(\mathbf{q}) \equiv \min_h Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}) - \frac{1}{\theta} \sum_{d \in D} f^d H_K^d(\mathbf{h}), \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{h} \in \Omega_h.
 \end{aligned}$$

の最適解における目的関数である。

問題 [CP1'(\mathbf{q})] は、各経路損害 $\{C_k(\mathbf{q})\}$ を経路走行費用と見なした logit 型確率的均衡交通配分問題²³⁾として解釈できる。このことを利用すれば、最適経路輸送量は、任意の終点 $d \in D$ について、

$$h_k^d(\mathbf{q}) \equiv f^d \frac{\exp[-\theta C_k^d(\mathbf{q})]}{\sum_{k' \in K^d} \exp[-\theta C_{k'}^d(\mathbf{q})]}, \quad \forall k \in K^d. \quad (13)$$

と求められる。こうして得られた最適経路輸送量を $Z_1(\mathbf{q})$ に代入すれば、以下を得る。

$$Z_1(\mathbf{q}) \equiv \sum_{d \in D} f^d S_1^d(\mathbf{q}). \quad (14)$$

ここで、 $S_1^d(\mathbf{q})$ は、起終点 (o, d) 間の“期待最小経路損害”であり、任意の $d \in D$ について、以下の式：

$$S_1^d(\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{k \in K^d} \exp[-\theta C_k^d(\mathbf{q})]. \quad (15)$$

で定義される。

式 (14) および (15) を代入すれば、RM 輸送問題 [P1] は、リンク事故確率 \mathbf{q} のみを明示的な未知変数とした以下の凸計画問題に帰着する。

$$\begin{aligned}
 \text{[CP1-Dual]} \quad & Z_1(\mathbf{q}) \equiv \max_q \sum_{d \in D} f^d S_1^d(\mathbf{q}), \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{q} \in \Omega_q.
 \end{aligned}$$

ここで、 Ω_q はリンク事故確率 \mathbf{q} の保存則 (2) および非負制約 (3) を満足する領域である。

この問題の双対問題は、経路輸送量 \mathbf{h} のみを明示的な未知変数とした以下の凸計画問題：

[CP1-Primal]

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}} \quad & Q_1(\mathbf{h}) - \frac{1}{\theta} \sum_{d \in D} f^d H_K^d(\mathbf{h}), \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{h} \in \Omega_{\mathbf{h}} \end{aligned}$$

として定式化できる．ここで， $\Omega_{\mathbf{h}}$ は，経路輸送量 \mathbf{h} が満たすべき保存則 (5) および非負制約 (6) から構成される許容領域である． $Q_1(\mathbf{h})$ は，以下の式で定義される最大リンク暴露：

$$Q_1(\mathbf{h}) \equiv \max_{ij \in L} \pi_{ij}(\mathbf{h}) \quad (16)$$

である．明らかに，この問題 [CP1-Primal] もまた，元の RM 輸送問題 [P1] と等価である．

(3) リンク変数表示の凸計画問題

凸計画問題 [CP1-Primal] は，その logit 型確率的交通配分モデルと等価な数理構造を活用することで，さらに，リンク輸送量のみを明示的な未知変数とする凸計画問題としても表現できる．これにより，続く (4) に述べるように，最適なリンク輸送量の一意性を保証できる．

まず，式 (13) で表わされる logit 型の経路選択確率は Markov 的な性質を持つため，その経路選択エントロピー $H_K^d(\mathbf{h})$ が以下のようにリンク輸送量のみを用いた表現に分解できることが知られている²⁴⁾．

$$H_K^d(\mathbf{h}) = H_L^d[x(\mathbf{h})] - H_N^d[x(\mathbf{h})], \quad \forall d \in D. \quad (17)$$

ここで， $x(\mathbf{h})$ は，以下の式：

$$x_{ij}^d(\mathbf{h}) \equiv \sum_{k \in K^d} h_k^d \delta_{ij,k}^d, \quad \forall ij \in L, \forall d \in D. \quad (18)$$

で定義されるリンクの輸送量をベクトル表現したものである． $H_L^d(x)$ および $H_N^d(x)$ は，それぞれ，任意の $d \in D$ について以下の式で定義される：

$$\begin{aligned} H_L^d(x) &\equiv - \sum_{ij \in L} \frac{x_{ij}^d}{f^d} \ln \frac{x_{ij}^d}{f^d}, \\ H_N^d(x) &\equiv - \sum_{i \in N} \left\{ \left(\sum_{j \in O(i)} \frac{x_{ij}^d}{f^d} \right) \ln \left(\sum_{j \in O(i)} \frac{x_{ij}^d}{f^d} \right) \right\}, \\ &= - \sum_{j \in N} \left\{ \left(\sum_{i \in I(j)} \frac{x_{ij}^d}{f^d} \right) \ln \left(\sum_{i \in I(j)} \frac{x_{ij}^d}{f^d} \right) \right\}. \end{aligned}$$

ただし， $O(i) \equiv \{j | ij \in L\}$ および $I(j) \equiv \{i | ij \in L\}$ は，それぞれ，ノード i を起点とするリンクの終点ノード集合，およびノード j を起点とするリンクの起点ノード集合である．

これを利用すれば，問題 [P1-Primal] は，リンク選択確率 $x \equiv \{x_{ij}^d | ij \in L, d \in D\}$ のみを明示的な未知変数とした，以下の凸計画問題として表現し直せる．

[CP1-Primal-Link]

$$\begin{aligned} \min_x \quad & Q_1(x) - \frac{1}{\theta} \sum_{d \in D} f^d \{H_L^d(x) - H_N^d(x)\}, \\ \text{s.t.} \quad & x \in \Omega_x \end{aligned}$$

ここで， $Q_1(x)$ は，式 (16) で定義される最大リンク暴露を，リンク輸送量 x を用いて表現しなおしたものである． Ω_x は，リンク輸送量 x の許容領域であり，各ノードにおけるリンク輸送量の保存則：

$$\sum_{n \in I(i)} p_{ni}^d - \sum_{m \in O(i)} x_{im}^d + b_i^d = 0, \quad \forall i \in N, \forall d \in D. \quad (19)$$

および非負制約：

$$x_{ij}^d \geq 0, \quad \forall ij \in L, \forall d \in D. \quad (20)$$

を満たす領域として定義される．ここで， b_i^d は， i が起点のとき f^d ， i が終点のとき $-f^d$ となり，それ以外では 0 となる．

(4) 解の一意性

前節までで求めた凸計画問題 [CP1-Dual]，[CP1-Primal] および [CP1-Primal-Link] の解の一意性について述べておこう．まず，主問題 [CP1-Primal] については，目的関数の第 1 項が経路選択確率 \mathbf{h} についての凸関数で，第 2 項の経路選択エントロピー $H_K^d(\mathbf{h})$ が \mathbf{h} についての狭義凹関数であることが明らかであるため，この問題の目的関数は \mathbf{h} に関して狭義凸である．そして，許容領域は有界な閉凸集合であるため，最適な経路選択確率 \mathbf{h} および目的関数の最適値に関して一意性が保証される．同様に，リンク変数表示の問題 [CP1-Primal-Link] については，目的関数の第 1 項がリンク選択確率 x についての凸関数，第 2 項，第 3 項の $H_L^d(x) - H_N^d(x)$ が， x についての狭義凹関数であることが知られている²⁴⁾ ことから，この問題の目的関数は x に関して狭義凸である．さらに，許容領域が有界閉凸集合であることから，最適なリンク輸送量 x および目的関数の最適値がいずれも一意に決められる．

一方，双対問題 [CP1-Dual] に関しては，任意の起終点 (o, d) 間の期待最小経路損害 $S_1^d(q)$ がリンク事故確率 q についての凹関数 (経路期待損害 $C^d \equiv \{C_k^d | k \in K^d\}$ については狭義凹関数) である．そして，リンク事故確率 q の許容領域は有界な閉凸集合である．このため，最適解における経路損害 $\{C^d\}$ ，期待最小経路損害 S および目的関数の値は一意に決められるが，最適なリンク事故確率 q については一意性は保証されない．ただし， q が一意に決まらないことは，次章で述べる数値解法の大域的収束や効率性には何らの影響も及ぼさないことに注意されたい．なお，問題 [P1] をさらに一般化する

ことで、 q の一意性が保証された問題を考えることもできる。その詳細は7.で議論する。

4. アルゴリズム

前章までで、RM 輸送問題 [P1] は、リンク事故確率 q のみを明示的な未知変数とする凸計画問題 [CP1-Dual] に帰着することが判った。本章では、この凸計画問題に対する大域的収束が保証された効率的求解法として、logit 型確率的交通配分アルゴリズムと勾配法を組み合わせた数値計算方法を示す。(Bell¹⁶)の手法が最短経路への all-or-nothing 交通配分と逐次平均法の組合せによる heuristic であったことを思い出されたい)。

勾配法の効率性は、各繰り返し計算において、以下の3つの要素— a) 目的関数 Z_1 ; b) 降下方向 d ; および c) 最適なステップ・サイズ α —を効率的に評価できるか否かに依存する。以下では、まず、(1)において、ある実行可能解 q に対して、降下方向および目的関数値を効率的に評価する方法を示す。ここでは、logit 型の確率交通配分アルゴリズムを活用することにより、経路集合を列挙することなく、これらを効率的に評価できることを明らかにする。次に、(2)において、最適なステップ・サイズを効率的に決定するための方法を示す。ここでは、確率的利用者均衡 (SUE: *Stochastic User Equilibrium*) 配分問題を対象として Maher²⁵が提案した二次補間アプローチを採用する; これにより、目的関数を評価する回数を最小限に留めながら効率的にステップ・サイズを計算できる。

(1) 許容降下方向の決定および目的関数の評価

本節では、許容降下方向および目的関数の効率的な評価方法を示す。具体的には、まず、あるリンク事故確率 q における目的関数の値 $Z_1(q)$ およびその勾配 $\nabla Z_1(q)$ が、logit 型確率交通配分アルゴリズムを用いて効率的に計算できることを示す。次に、こうして得られた勾配から、許容降下方向 d をシステムティックに求める方法を示す。

まず、ある実行可能解 q における目的関数の勾配を $\nabla Z_1(q)$ とするとき、その ij 番目要素は、以下の式で表わされる。

$$[\nabla Z_1(q)]_{ij} \equiv \sum_{d \in D} f^d \frac{\partial S_1^d(q)}{\partial q_{ij}} = \pi_{ij}(q), \quad \forall ij \in L. \quad (21)$$

ここで、 $\pi_{ij}(q)$ は、リンク事故確率を q としたときのリンク ij の暴露であり、任意の $ij \in L$ について、以下の式で定義される。

$$\pi_{ij}(q) \equiv c_{ij} \sum_{d \in D} x_{ij}^d(q), \quad (22)$$

$x_{ij}^d(q)$ は、リンク事故確率 q の下での最適リンク輸送量

であり、任意の $ij \in L$ および $d \in D$ について、以下の式で定義される。

$$x_{ij}^d(q) \equiv \sum_{k \in K^d} h_k^d(q) \delta_{ij,k}^d, \quad (23)$$

$h_k^d(q)$ は、式 (13) で定義される、リンク事故確率 q に対する最適な経路輸送量である。

式 (21)~(23) は、 q における目的関数の勾配 $\nabla Z_1(q)$ が、任意の終点 $d \in D$ について、各経路 $k \in K^d$ の(輸送1単位あたりの)期待損害 $C_k(q)$ を当該経路の“走行費用”と見なしたときの logit 型の確率交通配分 $x(q) \equiv \{x_{ij}^d(q) | ij \in L, d \in D\}$ を用いて求められることを意味している。

式 (23) の logit 型確率交通配分モデルに対しては、その効率的な配分アルゴリズムが確立されている。まず、サイクルを含まない(あるいは経路が限定できる)ネットワークに対する配分法としては、Dial²⁶)のアルゴリズムが利用できる。一方、対象ネットワークがサイクルを含む場合、あるいはシステムティックな経路の限定が困難な場合に対しても、Bell²⁷)および Akamatsu²⁸)によって効率的な配分アルゴリズムが確立されている。以下では、この手法の基本的考え方を概説しよう。

Bell-Akamatsu アルゴリズム^{27),28)} は、リンク輸送量 $x(q)$ および期待最小経路損害 $S_1(q) \equiv \{S_1^d(q) | d \in D\}$ の評価を、ある種の線形方程式を解くことに帰着させるものであり、サイクルを含む一般ネットワークに対してもその評価が効率的であることが知られている。その手続きは、以下のようにまとめられる: まず、任意の2ノード $i, j \in N$ 間の“重み”を以下のように設定する。

$$W_{ij}(q) \equiv \begin{cases} \exp[-\theta c_{ij} q_{ij}] & \text{if } ij \in L, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (24)$$

このとき、任意の終点 $d \in D$ について期待最小費用 $S_1^d(q)$ は、

$$S_1^d(q) = -\frac{1}{\theta} \ln V_{od}(q). \quad (25)$$

と求められ、リンク輸送量 $x_{ij}^d(q)$ は、任意の終点 $d \in D$ およびリンク $ij \in L$ について、以下の式で求められる。

$$x_{ij}^d(q) = f^d \frac{V_{oi}(q) W_{ij}(q) V_{jd}(q)}{V_{od}(q)}. \quad (26)$$

ここで、 $V_{ij}(q)$ は、以下に定義される行列の i 行 j 列要素である。

$$V(q) \equiv [I - W(q)]^{-1} - I. \quad (27)$$

$W(q)$ は $N \times N$ 行列で、その i 行 j 列要素が式 (24) で定義される。 I は $N \times N$ 単位行列である。なお、具体的に $V(q)$ を評価する際には式 (27) の逆行列を直接求める必要はなく、いくつかの線形方程式を独立に解けばよい。その詳細については付録 II を参照されたい。

ところで、目的関数の勾配 $\nabla Z_1(\mathbf{q})$ は、そのままでは、問題 [CP1-Dual] の許容降下方向とはならないことに注意されたい。これは、 $\nabla Z_1(\mathbf{q}) \geq \mathbf{0}$ であるため、任意のステップ・サイズ α について、補助解 $\mathbf{q} + \alpha \nabla Z_1(\mathbf{q})$ が、式 (2) および (3) で定義される \mathbf{q} の許容領域 Ω_q を満足しないためである。

そこで、本研究では、 n 回目繰り返し計算において、勾配 $\nabla Z_1(\mathbf{q}^{(n)})$ を線形変換し、ステップ・サイズに適当な上限 $\alpha_{\max}^{(n)}$ を設けることで、許容降下方向 $\mathbf{d}^{(n)}$ を求める。具体的には、まず、実行可能解 $\mathbf{q}^{(n)}$ における目的関数の勾配を $\mathbf{z}^{(n)} \equiv \nabla Z_1(\mathbf{q}^{(n)})$ とする。次に、最大の勾配を持つリンク $r(n) \equiv \arg. \max_{ij \in L} z_{ij}^{(n)}$ を、 n 回目繰り返し計算における“参照リンク”とする。そして、参照リンク以外のリンク集合を $\hat{L}(n) \equiv L \setminus r(n)$ とし、任意の $ij \in \hat{L}(n)$ について、許容降下方向を、

$$[\mathbf{d}^{(n)}]_{ij} \equiv \begin{cases} z_{ij}^{(n)} - z_{r(n)}^{(n)} & \text{if } q_{ij}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{if } q_{ij}^{(n)} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

とする。参照リンクについては、その許容降下方向を

$$[\mathbf{d}^{(n)}]_{r(n)} \equiv - \sum_{ij \in \hat{L}(n)} d_{ij}^{(n)}. \quad (29)$$

とする。このとき、 $\sum_{ij \in L} d_{ij}^{(n)} = 0$ であるため、任意のステップ・サイズ α について、補助解 $\mathbf{q}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$ は、リンク事故確率の保存則 (2) を満足する。

こうして得られた許容降下方向の ij 番目要素は、参照リンク $r(n)$ においてのみ $d_{ij}^{(n)} \geq 0$ となり、それ以外のリンクにおいては $d_{ij}^{(n)} < 0$ となる。これより、 n 回目繰り返し計算におけるステップ・サイズの上限 $\alpha_{\max}^{(n)}$ を

$$\alpha_{\max}^{(n)} \equiv \min_{ij \in \hat{L}} \{-d_{ij}^{(n)} / d_{ij}^{(n)}\}. \quad (30)$$

とすることで、任意の $\alpha \in [0, \alpha_{\max}^{(n)}]$ について、補助解 $\mathbf{q}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$ は、リンク事故確率の非負制約 (3) をも満足する。

(2) ステップ・サイズの決定

本節では、 n 回目繰り返し計算におけるステップ・サイズ $\alpha^{(n)} \in [0, \alpha_{\max}^{(n)}]$ の効率的な決定方法を示す。前節で述べたように、ある実行可能解 \mathbf{q} における目的関数の値 $Z_1(\mathbf{q})$ を評価するためには、logit 型確率的交通配分を行なう (i.e. 式 (27) で定義される $V(\mathbf{q})$ を解とする線形方程式を解く) 必要がある。従って、①補助解における目的関数 $Z_1(\mathbf{q}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)})$ を最大にするステップ・サイズ $\alpha^{(n)}$ を (黄金分割法などの一次元探索によって) 厳密に求めるよりも、②適当な近似によって目的関数の計算回数を減らす方が、アルゴリズム全体の効率性を向上させ得る。

本研究では、こうした方法の一つとして、SUE 配分問題に対して Maher²⁵⁾ が提案した二次補間 (quadratic in-

terpolation) アプローチを採用する。いま、 n 回目繰り返し計算における実行可能解 $\mathbf{q}^{(n)}$ および許容降下方向 $\mathbf{d}^{(n)}$ を与件とし、ステップ・サイズを α と選んだときの補助解における目的関数を、 $\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha) \equiv Z_1(\mathbf{q}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)})$ と定義しよう。Maher²⁵⁾ の二次補間アプローチは、 $\alpha \in [0, \alpha_{\max}^{(n)}]$ における目的関数 $\hat{Z}_1^{(n)}(\cdot)$ を二次曲線で補間し、そこからステップ・サイズを求める方法である。その具体的な手続きは、以下のようにまとめられる：まず、ステップ・サイズを $\alpha = 0, \alpha_{\max}^{(n)}$ と選んだときの $\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha)$ の導関数を、それぞれ、以下の式で近似する。

$$\frac{d\hat{Z}_1(0)}{d\alpha} \simeq \nabla Z_1(\mathbf{q}^{(n)})' \mathbf{d}^{(n)} \equiv g_0^{(n)}, \quad (31)$$

$$\frac{d\hat{Z}_1(\alpha_{\max}^{(n)})}{d\alpha} \simeq \nabla Z_1(\mathbf{q}^{(n)} + \alpha_{\max}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)})' \mathbf{d}^{(n)} \equiv g_{\max}^{(n)}. \quad (32)$$

これらを用いて、最適なステップ・サイズ $\alpha^{(n)}$ を、以下の式で計算する。

$$\alpha^{(n)} := - \frac{g_0^{(n)}}{g_{\max}^{(n)} - g_0^{(n)}} \alpha_{\max}^{(n)}. \quad (33)$$

式 (31)~(33) の詳細な導出方法については、付録 I を参照されたい。

結局、提案アルゴリズムは、以下のようにまとめられる。

[Algorithm 1]

Step 0 (初期設定) :

初期可能解 $\mathbf{q}^{(1)} \in \Omega_q$ を選ぶ。 $n := 1$ とする。

Step 1 (収束判定) :

$\mathbf{q}^{(n)}$ が収束条件を満足していれば停止し、 $\mathbf{q}^{(n)}$ を問題 [CP1-Dual] の解とする。

Step 2 (許容降下方向の決定) :

式 (21)~(30) より、許容降下方向 $\mathbf{d}^{(n)}$ およびステップ・サイズの上限 $\alpha_{\max}^{(n)}$ を計算。

Step 3 (ステップ・サイズの決定) :

式 (21)~(27) より、補助解における勾配 $\nabla Z_1(\mathbf{q}^{(n)} + \alpha_{\max}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)})$ を求める。式 (31)~(33) より、ステップ・サイズ $\alpha^{(n)}$ を計算する。

Step 4 (解の改訂) :

$\mathbf{q}^{(n+1)} := \mathbf{q}^{(n)} + \alpha^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}$, $n := n + 1$. Step 1 へ。

5. 数値計算例

本章では、簡単な数値計算例を用いて、提案アルゴリズムが適切に動作していることを確認する。まず、図 1 のような、9 つのノードと 12 本のリンクからなるネットワークを考える。各リンクの傍らの斜体で記された数値は、当該リンクの潜在的暴露 (e.g. 当該リンクから一定距離内の居住者人口) を表わす。ノード ① を起点、ノード ⑨ を終点とする 1 つの輸送起終点ペアを設ける。

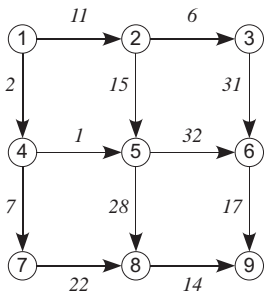


図-1 ネットワーク例と各リンクの暴露

その経路集合 K は、表 1 の第 2 列に示すような 6 本の経路で構成される。起終点間輸送量は $f^9 = 1$ とする。

上記の設定の下で、経路選択の多様性への選好パラメータ $\theta = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ としたときの RM 輸送問題 [P1] に対して、最適解における経路選択確率 $\{h_k^*\}$ 、経路損害 $\{C_k^* \equiv C_k(q^*)\}$ および期待最小経路損害 (i.e. 目的関数の最適値) $Z_1^* \equiv S_1^* \equiv -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k e^{-\theta C_k^*}$ を求めた。初期実行可能解 $q^{(1)}$ として、全てのリンクに等しい事故確率 $q_{ij} = 1/12$ を与えた。

まず、各 θ に対する各経路の輸送量 h および期待最小経路損害 S_1 を、それぞれ、表 1 および表 2 に示す。ここで、表 2 の $\theta \rightarrow \infty$ の列は、MM 輸送問題 [P0] の解として得られる経路損害 $\{C_k\}$ と期待損害 $S_0^* \equiv \sum_k C_k^* h_k^*$ を表わす。これらの表より、以下のことが判る。第 1 に、 θ が大きくなるほど、各経路間での輸送量 $\{h_k\}$ の差は大きくなる。これは、輸送量を決定する“計画者”が、選択経路の多様性よりも期待損害最小化を重視するようになるため、わずかな経路損害の差にも敏感に反応することを反映している。第 2 に、 θ が大きくなるほど、各経路間の損害 $\{C_k\}$ の差は小さくなる。これは、期待損害最大化を目的としてリンク事故確率を決定する“検査者”の行動を考えると、以下のように解釈できる： θ が大きい (i.e. “計画者”が経路損害の差に敏感になる) 場合、特定の経路の損害が大きくなるようにリンク事故確率を選ぶと、その経路が極端に選ばれにくくなるため、各経路間での経路損害の差を小さくする必要がある。特に、 $\theta \rightarrow \infty$ の極限においては、全ての経路損害が等しくなる¹。最後に、 θ が小さくなるほど、期待最小経路損害 S^* が小さくなる。これは、(RM 輸送問題 [P1] と類似の数学的構造を有する) 確率的利用者均衡モデルが持つ性質と整合的である。

図 2 に、 $\theta = 1$ における目的関数の収束パターンを示す。この図は、横軸に繰り返し計算回数 n を取り、縦軸に、各実行可能解 $q^{(n)}$ における問題 [CP1-Dual] の目的関数値 $Z_1^{(n)} \equiv S_1(q^{(n)})$ を実線でプロットしたものであ

¹ この場合、最適リンク事故確率は $[q_{6,9}, q_{8,9}] = \left[\frac{c_{6,9}}{c_{6,9}+c_{8,9}}, \frac{c_{8,9}}{c_{6,9}+c_{8,9}} \right] \approx [0.452, 0.548]$ と一意に求められ、経路損害は、 $S_0 = c_{6,9}q_{6,9} = c_{8,9}q_{8,9} = 7.677$ となる。

表-1 経路輸送量

ID	通過ノード	経路輸送量 (h_k^*)				
		$\theta = .01$	$\theta = .05$	$\theta = .1$	$\theta = 1$	$\theta = 10$
1	①→②→③ →⑥→⑨	0.184	0.216	0.212	0.212	0.212
2	①→②→⑤ →⑥→⑨	0.148	0.123	0.120	0.120	0.120
3	①→②→⑤ →⑧→⑨	0.169	0.140	0.137	0.137	0.137
4	①→④→⑤ →⑥→⑨	0.148	0.123	0.120	0.120	0.120
5	①→④→⑤ →⑧→⑨	0.169	0.140	0.137	0.137	0.137
6	①→④→⑦ →⑧→⑨	0.184	0.259	0.274	0.274	0.274
分散		0.000	0.003	0.004	0.004	0.004

表-2 経路損害および期待最小経路損害

ID	経路損害 (C_k^*)					
	$\theta = .01$	$\theta = .05$	$\theta = .1$	$\theta = 1$	$\theta = 10$	$\theta \rightarrow \infty$
1	0	3.540	5.833	7.493	7.659	7.677
2	22.055	14.900	11.513	8.061	7.716	7.677
3	8.702	12.229	10.177	7.928	7.702	7.677
4	22.055	14.900	11.513	8.061	7.716	7.677
5	8.702	12.229	10.177	7.928	7.702	7.677
6	0	0	3.246	7.234	7.633	7.677
分散	98.727	39.776	11.629	0.116	0.001	0
期待最小経路損害 (S^*)						
-169.33 -27.077 -9.693 5.940 7.504 7.677						

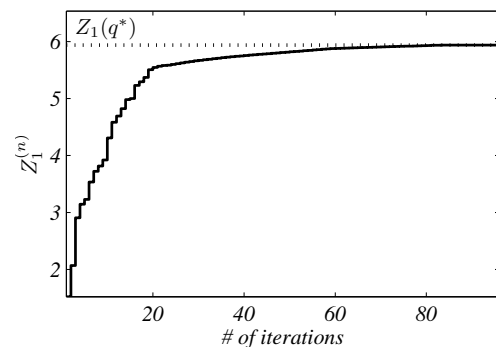


図-2 最適解への収束パターン

る。点線は、最適解における目的関数値 $Z_1^* = 5.940$ を表わす。この図より、60 回程度の繰り返しでほぼ収束していることが確認できる。この収束速度は、問題の規模 (未知変数が 12 個) を考えれば、決して早くはない。しかし、Bell¹⁶⁾ の heuristics が収束まで 100 回以上の計算を要する (その上、正しい解に収束する保証がない) ことに比べれば、十分に効率的と言えるだろう。

6. 本研究の拡張方向

本文では述べなかったが、本研究で提案したモデルは、さらに、いくつかの方向へ容易に拡張可能である。

本章では、こうした拡張モデルおよびその効率的解法についての基本的考え方を述べておこう。

(1) 処理施設選択を組み込んだ統合モデルへの拡張

本モデルが対象とした1起点多終点ネットワークの枠組は、ある1つのプラント (i.e. 輸送起点) で発生した産業廃棄物を複数の施設で処理できる場合に、各処理施設 (i.e. 輸送終点) への輸送計画問題を記述するのに適している。本文では、このような状況において、各処理施設 $d \in D$ への輸送量 (i.e. 処理量) $f \equiv \{f^d | d \in D\}$ を与件とした。これは、各施設での危険物処理量 f を決定する戦略レベル (strategic level) での意思決定と、経路輸送量 h を決定する運用レベル (operational level) での意思決定を独立に考えていることに相当する。一般に、各施設の処理量 f と各経路の輸送量 h とを同時に決定する方が、それらを個別に決定するよりも、ネットワーク全体の期待損害を減少させ得ることが知られている。本モデルは、このような統合型の混合戦略輸送問題の枠組へも容易に拡張可能である。

まず、危険物処理施設においても、危険物が流出して周囲の環境や居住者に被害を及ぼす事故が生起し得るとする。ある施設 $d \in D$ で1単位の危険物を処理することによる損害 (e.g. 事故が起きた場合に影響を受ける居住者人口) の期待値を、所与の定数 Ψ^d で表わす。そして、ある施設処理量 f の下での処理施設全体における期待損害を、以下の式で定義する。

$$Z_D(f) \equiv \sum_{d \in D} f^d \Psi^d. \quad (34)$$

次に、各施設での処理量は、以下の保存則：

$$\sum_{d \in D} f^d = E. \quad (35)$$

および非負制約：

$$f^d \geq 0, \quad \forall d \in D. \quad (36)$$

を満足すると仮定する。ここで、 E は、起点で発生する危険物の総量である。以下では、簡単のために、 $E = 1$ と基準化しておく。

上記の枠組の下で、施設での処理量と経路輸送量を同時に決定する以下の問題：

$$\begin{aligned} \text{[P2]} \quad & \max_q \min_{h, f} Z_2(\mathbf{h}, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \\ & \equiv Z_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + Z_D(\mathbf{q}) - \frac{1}{\theta} \sum_{d \in D} f^d H_K^d(\mathbf{h}) - \frac{1}{\xi} H_D(\mathbf{f}), \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) \in \Omega_q \times \Omega_h \times \Omega_f. \end{aligned}$$

を考える。ここで、 H_D は以下の式：

$$H_D(\mathbf{f}) \equiv - \sum_{d \in D} f^d \ln f^d. \quad (37)$$

で定義されるエントロピーであり、処理施設選択の多様性を表わす指標と見なせる。そして、パラメータ ξ は、

(期待損害に対する) 処理施設選択の多様性についての輸送計画者の選好の強さを表わす。施設処理量 f の許容領域 Ω_f は、処理量の保存則 (35) および非負制約 (36) を満足する領域として定義される。

処理施設選択を組み込んだ統合型輸送問題 [P2] は、交通計画分野における分布-配分統合型の確率的均衡配分問題²⁹⁾と共通の数理的構造を持つ。これを活用することで、問題 [P2] に対しても、RM 輸送問題 [P1] と同様の等価な凸計画問題を導くことができる。まず、問題 [P2] においてリンク事故確率 q を与件としたとき、 h および f についての最小化問題の最適性条件より、最適な施設処理量および経路輸送量が、任意の輸送終点 $d \in D$ について、以下の nested-logit 型の式で求められる。

$$f^d(\mathbf{q}) \equiv \frac{\exp[-\xi \{S_1^d(\mathbf{q}) + \Psi^d\}]}{\sum_{d' \in D} \exp[-\xi \{S_1^{d'}(\mathbf{q}) + \Psi^{d'}\}]}, \quad (38)$$

$$h_k^d(\mathbf{q}) \equiv f^d(\mathbf{q}) \frac{\exp[-\theta C_k^d(\mathbf{q})]}{\sum_{k' \in K^d} \exp[-\theta C_{k'}^d(\mathbf{q})]}, \quad \forall k \in K^d. \quad (39)$$

ここで、 $S_1^d(\mathbf{q})$ は、リンク事故確率を q としたときの起終点 (o, d) 間の期待最小経路損害であり、式 (15) で定義される。こうして得られた最適解を用いることで、リンク事故確率 q のみを未知変数とした、問題 [P2] と等価な以下の凸計画問題を導出できる。

$$\begin{aligned} \text{[CP2-Dual]} \quad & \min_q Z_2(\mathbf{q}) \equiv -\frac{1}{\xi} \ln \sum_{d \in D} \exp[-\xi \{S_1^d(\mathbf{q}) + \Psi^d\}], \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{q} \in \Omega_q. \end{aligned}$$

これにより、問題 [P2] に対しても、効率的な数値解法を開発できる。まず、問題 [CP2-Dual] の目的関数 $Z_2(\mathbf{q})$ の勾配の ij 要素は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} [\nabla Z_2(\mathbf{q})]_{ij} &= \frac{\partial Z_2(\mathbf{q})}{\partial q_{ij}} = \sum_{d \in D} \frac{\partial Z_2}{\partial S_1^d} \frac{\partial S_1^d(\mathbf{q})}{\partial q_{ij}} \\ &= c_{ij} \sum_{d \in D} x_{ij}^d(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、リンク輸送量 $x_{ij}^d(\mathbf{q})$ は、任意の $ij \in L$ および $d \in D$ について、以下の式で定義される。

$$x_{ij}(\mathbf{q}) \equiv \sum_{k \in K^d} h_k^d(\mathbf{q}) \delta_{ijk}^d. \quad (41)$$

$h_k^d(\mathbf{q})$ は、リンク事故確率 q の下での最適な経路輸送量であり、式 (39) で定義される。

従って、問題 [CP2-Dual] は、[Algorithm-1] の Step 2 における目的関数の勾配 $z(\mathbf{q})$ を、上記の $\nabla Z_2(\mathbf{q})$ に置き換えた手法を用いて効率的に解くことができる。なお、勾配 $\nabla Z_2(\mathbf{q})$ は、下記の手順に従って効率的に評価できる：①式 (25) および (27) より、各起終点間の期待最小経路費用 $S_1(\mathbf{q})$ および $V(\mathbf{q})$ を求める；② $S_1(\mathbf{q})$ を式 (38)

に代入して施設処理量 $f(q)$ を求める；③こうして求めた $f(q)$ および $V(q)$ を以下の式：

$$x_{ij}^d(q) = f^d(q) \frac{V_{oi}(q)W_{ij}(q)V_{jd}(q)}{V_{od}(q)}.$$

に代入して，リンク輸送量を求める．

(2) リンク事故確率の先験情報を活用する枠組への拡張

本研究の提案モデルは，リンク事故確率に関する先験情報を活用できる枠組へも容易に拡張可能である．本文では，危険物流出事故が LPHC 特性を持つため，輸送計画者がカタストロフ回避的 (catastrophic averse) に振る舞う (i.e. 期待損害を最大とるようにリンク事故確率 q を決定する) と仮定した．しかし，一般に，輸送計画者は，各リンクでの事故の起こり易さに関する先験情報 (e.g. リンクの長さ，構造的特性，危険物輸送以外の交通量) を多少なりとも持ち，いかにカタストロフ回避的とはいえず，その先験情報から大きく乖離するような (i.e. 極度に不自然な) リンク事故確率 q は選択しない，と仮定するのが自然である．さらに，後述するように，こうした先験情報の活用により，(RM 輸送問題 [P1] では一意性が保証できない) リンク事故確率 q についても，その最適解を一意に決定できる．

このような先験情報は，提案モデル [P1] を以下のように一般化することで活用できる．まず，先験情報から推定されるリンク事故確率 (i.e. 各リンクでの相対的な事故の起こり易さ) を所与の定数 $p \equiv \{p_{ij}\}$ で表わし，

$$\sum_{ij \in L} p_{ij} = 1, \quad \text{and} \quad p_{ij} > 0, \quad \forall ij \in L. \quad (42)$$

となるように基準化されているものとしよう．以下では， p を (リンク事故の) 客観的確率と呼び，輸送計画者が悲観的に選択する q を (リンク事故の) 主観的確率と呼ぶ．次に，主観的確率と客観的確率の乖離を測る指標として， p に対する q の相対エントロピー：

$$R(q; p) \equiv \sum_{ij \in L} q_{ij} \ln \frac{q_{ij}}{p_{ij}} \quad (43)$$

を採用する．ここで，相対エントロピー $R(q; p)$ は任意の $q > 0$ について $R(q; p) \geq 0$ なる関数で， q と p が異なるほど大きくなり，全てのリンクについて $q_{ij} = p_{ij}$ であるときに限り $R(q; p) = 0$ となる．

上述の準備の下で，RM 輸送問題 [P1] の目的関数に，この相対エントロピーを加えた以下の問題：

$$\begin{aligned} \text{[P3]} \quad & \min_h \max_q Z_3(h, q) \equiv Z_1(h, q) - \frac{1}{\eta} R(q; p), \\ \text{s.t.} \quad & (h, q) \in \Omega_h \times \Omega_q. \end{aligned}$$

を考えよう．ここで， $1/\eta (> 0)$ は，客観的確率 p から乖離した主観的確率 q を選択することによる期待損害へのペナルティの大きさ (i.e. 客観的確率 p への信頼度) を表わす非負の定数である．これより，問題 [P3] の最

大化部分は，以下のように解釈できる：輸送計画者は，客観的確率から極度に乖離しない範囲で最悪の主観的確率 q を選択する．明らかに，問題 [P3] は，RM 輸送モデル [P1] を $1/\eta \rightarrow 0$ なる特殊ケースとして含む，より一般的な問題である．

これまでと同様，問題 [P3] は， q のみを未知変数とする以下の凸計画問題に帰着する．

$$\begin{aligned} \text{[CP3-Dual]} \quad & \max_q Z_3(q) \equiv \sum_{d \in D} f^d S_1^d(q) - \frac{1}{\eta} R(q; p), \\ \text{s.t.} \quad & q \in \Omega_q. \end{aligned}$$

この問題の目的関数の第 1 項は q に関して凹関数であり，第 2 項は q に関して狭義凹関数である．このため，問題 [P3] は，RM 輸送問題 [P1] と異なり，リンク事故確率 q についても一意性が保証される (経路選択確率 h の一意性については問題 [P1] と全く同様に証明できるため，ここでは議論を省略する)．

この凸計画問題 [CP3-Dual] に対しても，目的地選択を組み込んだ統合型 RM 輸送問題 [CP2-Dual] と同様，[Algorithm-1] の Step 2 をわずかに修正するだけで効率的な解法を開発できる．まず，問題 [CP3-Dual] の目的関数の勾配の ij 要素は，以下の式で表わせる．

$$\begin{aligned} [\nabla Z_3(q)]_{ij} &= \frac{\partial Z_3}{\partial q_{ij}} = \sum_{d \in D} f^d \frac{\partial S_1^d(q)}{\partial q_{ij}} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial R(q; p)}{\partial q_{ij}}, \\ &= \pi_{ij}(q) - \frac{1}{\eta} \left\{ \ln \frac{q_{ij}}{p_{ij}} + 1 \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

ここで， $\pi_{ij}(q)$ は (22) で定義されるリンク ij の暴露である．これより，問題 [CP3-Dual] は，[Algorithm-1] の Step 2 で用いる目的関数の勾配 $z(q)$ を上記の $\nabla Z_3(q)$ で置き換えた方法を用いて効率的に解くことができる．

7. おわりに

本研究では，危険物の混合戦略輸送問題に対して，一般的なネットワークに対しても適用可能で，効率的な定量的分析手法を提案した．具体的には，まず，Bell¹⁶⁾ によって提案された maximin 危険物輸送問題を，経路選択の多様性に対する選好を組み込んだ枠組へと一般化した．次に，こうして定式化された問題の最適性条件より，この問題が，経路選択確率あるいはリンク事故確率のみを未知変数とし，互いに双対関係にある 2 つの凸計画問題に帰着することを示した．最後に，こうして導いた凸計画問題に対し，経路を列挙する必要のない効率的数値解法を開発した．

付録 I 二次補間アプローチ²⁵⁾を用いたステップ・サイズの決定法

まず, n 回目繰り返し計算における実行可能解 $q^{(n)}$ および許容降下方向 $d^{(n)}$ を与件とし, ステップ・サイズを $\alpha \in [0, \alpha_{\max}^{(n)}]$ と選んだときの目的関数の値を $\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha) \equiv Z_1(q^{(n)} + \alpha d^{(n)})$ と定義しよう. Maher²⁵⁾のアプローチは, $\alpha \in [0, \alpha_{\max}^{(n)}]$ における目的関数 $\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha)$ の値を, 以下の二次曲線:

$$Q^{(n)}(\alpha) \equiv -\frac{\beta_1^{(n)}}{2} (\alpha - \beta_2^{(n)})^2 + \beta_3^{(n)}. \quad (I.1)$$

で補間し, その極大点を与える α を n 回目繰り返しにおけるステップ・サイズとする方法である. 二次曲線のパラメータ $\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}$ および $\beta_3^{(n)}$ は, 定義域の両端 (i.e. $\alpha = 0, \alpha_{\max}^{(n)}$) において, 以下を満足するように選ばれる.

$$\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha) = Q(\alpha), \quad \frac{d\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dQ(\alpha)}{d\alpha}. \quad (I.2)$$

ここで, $\alpha = 0, \alpha_{\max}^{(n)}$ における目的関数 $\hat{Z}_1^{(n)}(\alpha)$ の導関数を, それぞれ, 以下の式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Z}_1^{(n)}(0)}{\partial \alpha} &\simeq \nabla Z_1(q^{(n)})' d^{(n)} \equiv g_0^{(n)}, \\ \frac{\partial \hat{Z}_1^{(n)}(\alpha_{\max}^{(n)})}{\partial \alpha} &\simeq \nabla Z_1(q^{(n)} + \alpha d^{(n)})' d^{(n)} \equiv g_{\max}^{(n)}. \end{aligned}$$

と近似する. このとき, $Q^{(n)}(\alpha)$ を最大とするステップ・サイズは, 以下の式で求められる.

$$\alpha^{(n)} = \beta_2^{(n)} = -\frac{g_0^{(n)}}{g_{\max}^{(n)} - g_0^{(n)}} \alpha_{\max}^{(n)}. \quad (I.3)$$

付録 II Logit 型確率交通配分アルゴリズム

本章では, リンク事故確率 q が与えられた下でリンク輸送量 x を求める具体的なアルゴリズムを示す. 以下では, アルゴリズムを簡潔に記述するため, 対象ネットワークに対して以下を仮定する:

- 任意のノード $i \in N$ は, 起点, 終点, あるいは通過点のいずれかとする (i.e. 起点かつ終点, 起点かつ通過点, あるいは通過点かつ終点といったノードは存在しないとする²⁾).
- 起点ノード, 通過ノードおよび終点ノードのインデックス集合を, それぞれ, $O \equiv \{1, \dots, \beta\}$, $T \equiv \{\beta + 1, \dots, \gamma\}$ および $D \equiv \{\gamma + 1, \dots, N\}$ で表わし, それぞれの要素数を, $O \equiv \|O\| = \beta$, $T \equiv \|T\| = \gamma - \beta$ および $D \equiv \|D\| = N - \gamma - \beta$ と記述する.

²⁾ 元のネットワーク $\mathcal{G}(N, L)$ がこうした条件を満たしていない場合でも, 適当なダミー・リンクおよびダミー・ノードを追加することで, この仮定を満たすネットワークをシステムティックに作成できる.

このとき, ノード間の重み行列は, 以下のように表わせる.

$$W \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{oo} & \mathbf{W}_{ot} & \mathbf{0}_{od} \\ \mathbf{0}_{to} & \mathbf{W}_{tt} & \mathbf{W}_{td} \\ \mathbf{0}_{do} & \mathbf{0}_{dt} & \mathbf{0}_{dd} \end{bmatrix}, \quad (II.1)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ot} &\equiv \{W_{oi} | i = \beta + 1, \dots, \gamma, o = 1, \dots, \beta\}, \\ \mathbf{W}_{tt} &\equiv \{W_{ij} | i = \beta + 1, \dots, \gamma, j = \beta + 1, \dots, \gamma\}, \\ \mathbf{W}_{td} &\equiv \{W_{id} | i = \beta + 1, \dots, \gamma, d = \gamma + 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

はそれぞれ, $O \times T$ 行列, $T \times T$ 正方行列および $T \times D$ 行列である. $\mathbf{0}_{oo}, \mathbf{0}_{od}, \mathbf{0}_{to}, \mathbf{0}_{do}, \mathbf{0}_{dt}$ および $\mathbf{0}_{dd}$ は, 全ての要素が 0 である行列であり, それぞれの次元は, $O \times O, O \times D, T \times O, D \times O, D \times T$ および $D \times D$ である.

このとき, 式 (27) で定義される $N \times N$ 行列 V は, 以下のように表現し直せる.

$$V \equiv [I - W]^{-1} - I = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{oo} & \mathbf{V}_{ot} & \mathbf{V}_{od} \\ \mathbf{0}_{to} & \mathbf{V}_{tt} & \mathbf{V}_{td} \\ \mathbf{0}_{do} & \mathbf{0}_{dt} & \mathbf{0}_{dd} \end{bmatrix}, \quad (II.2)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ot} &\equiv \mathbf{W}_{ot} [I - \mathbf{W}_{tt}]^{-1}, \quad \mathbf{V}_{od} \equiv \mathbf{W}_{ot} [I - \mathbf{W}_{tt}]^{-1} \mathbf{W}_{td}, \\ \mathbf{V}_{tt} &\equiv [I - \mathbf{W}_{tt}]^{-1} - I, \quad \mathbf{V}_{td} \equiv [I - \mathbf{W}_{tt}]^{-1} \mathbf{W}_{td}. \end{aligned} \quad (II.3)$$

である. それぞれの行列のサイズは, $O \times T, O \times D, T \times T, T \times D$ である.

こうして得られる行列 V および重み行列 W を用いて, 任意の起終点 (o, d) 間のリンク輸送量 $x^d \equiv \{x_{ij}^d | i, j \in L\}$ は, 以下の行列の i 行 j 列要素として求められる.

$$x^d \equiv f^d \frac{V_o W V_d}{V_{od}}, \quad \forall (o, d) \in OD. \quad (II.4)$$

ここで, V_o および V_d は, それぞれ, $N \times N$ 対角行列であり, その i 番目対角要素が, それぞれ, $V_{o,i}$ および $V_{i,d}$ で定義される.

式 (II.4) より, リンク輸送量 x^d を計算するためには, 式 (II.3) で定義される V の要素の内, V_{ot}, V_{td} および V_{od} を評価すればよいことが判る. なお, 式 (II.4) では判り易い表現のために逆行列を明示的に用いたが, 実際には $[I - W]^{-1}$ を計算する必要はない: まず, 起点および終点別に, 以下の線形方程式:

$$[I - \mathbf{W}_{tt}]' \mathbf{V}_{ot}' = \mathbf{W}_{ot}', \quad \forall o \in O, \quad (II.5)$$

$$[I - \mathbf{W}_{tt}] \mathbf{V}_{td} = \mathbf{W}_{td}, \quad \forall d \in D. \quad (II.6)$$

を, それぞれ解いて V_{ot} および V_{td} を求める. 次に, こうして得られた V_{ot} および W_{td} を用いて,

$$V_{od} = V_{ot} W_{td}. \quad (II.7)$$

を計算すれば良い (あるいは, $V_{od} = W_{ot} V_{td}$ としても良い). ここで, 線形方程式 (II.5) および (II.6) は, ネットワーク構造を活用することで効率的に解くことができる:

W_{it} は高々リンクの本数 L だけの非零要素しかもたない疎な行列であるため, SOR (*Successive Over relaxation*) や JOR (*Jacobi Over Relaxation*) などの収束計算によって効率的に解を求められる。

参考文献

- 1) U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, Washington, DC.: *Truck Inventory and User Survey*, 1994.
- 2) Itoh, T., Hayano, M., Naito, T., Asakura, Y., Hato, E. and Wada, T.: Empirical analysis on hazardous material transportation using road traffic census and accident data, in E., T. and G., T. R. eds., *City Logistics III*, pp. 245–258, Institute for City Logistics, 2003.
- 3) List, G., Mirchandani, P., Turnquist, M. and Zografos, K.: A modelling and analysis for hazardous materials transportation: Risk analysis, routing-scheduling and facility location, *Transportation Science*, Vol. 25, No. 2, pp. 100–114, 1991.
- 4) Abkowitz, M., Lepofsky, M. and Cheng, P.: Selecting criteria for designating hazardous materials highway routes, *Transportation Research Record*, Vol. 1333, pp. 30–35, 1992.
- 5) Sivakumar, R. and Batta, M., R. Karwan: A network based model for transporting extremely hazardous materials, *Operations Research Letters*, Vol. 13, No. 2, pp. 85–93, 1993.
- 6) Sivakumar, R. and Batta, M., R. Karwan: A multiple route conditional risk model for transporting hazardous materials, *INFOR*, Vol. 33, pp. 20–33, 1995.
- 7) Erkut, E.: On the credibility of the conditional risk model for routing hazardous materials, *Operations Research Letters*, Vol. 18, pp. 49–52, 1995.
- 8) Jin, H., Batta, R. and Karwan, M. H.: On the analysis of two new models for transporting hazardous materials, *Operations Research*, Vol. 44, No. 5, pp. 710–723, 1996.
- 9) Sherali, H. D., Brizendine, L. D., Glickman, T. S. and Subramanian, S.: Low probability-high consequence considerations in routing hazardous material shipments, *Transportation Science*, Vol. 31, No. 3, pp. 237–251, 1997.
- 10) Erkut, E. and Verter, V.: Modeling of transport risk for hazardous materials, *Operations Research*, Vol. 46, No. 5, pp. 625–642, 1998.
- 11) Erkut, E. and Ingolfsson, A.: Catastrophe avoidance models for hazardous materials route planning, *Transportation Science*, Vol. 34, No. 2, pp. 165–179, 2000.
- 12) Kara, B., Erkut, E. and Verter, V.: Accurate calculation of hazardous materials transport risks, *Operations Research Letters*, Vol. 31, pp. 285–292, 2003.
- 13) 杉木直, 早野亮, 朝倉康夫: 道路ネットワークにおける危険物輸送リスクを考慮した走行経路評価, 土木計画学研究・講演集, Vol. 30, pp. CD-ROM, 2004.
- 14) Asakura, Y.: Risk assessment for hazardous materials transportation in a road network, in *Proceedings of 2nd International Symposium on Transport Network Reliability*, pp. 15–19, 2004.
- 15) ALK Associates, Princeton, New Jersey: *ALK's PC*HazRoute (Version 2.0)*, 1994.
- 16) Bell, M. G. H.: Mixed route strategies for the risk-averse shipment of hazardous materials, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 6, pp. 253–265, 2006.
- 17) Knight, F. H.: *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton, Mifflin, Boston, 1921.
- 18) Ellsberg, D.: Risk, ambiguity, and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, pp. 643–669, 1961.
- 19) Gilboa, I.: Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 16, pp. 65–88, 1987.
- 20) Schmeidler, D.: Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, Vol. 57, pp. 571–587, 1989.
- 21) Gilboa, I. and Schmeidler, D.: Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 18, pp. 141–153, 1989.
- 22) 赤松隆, 長江剛志: 社会基盤整備・運用事業の経済リスク管理問題に対するファイナンス工学的アプローチ, 土木計画学研究・論文集, 2006.
- 23) Fisk, C. S.: Some developments in equilibrium traffic assignment, *Transportation Research B*, Vol. 14, pp. 243–255, 1980.
- 24) Akamatsu, T.: Decomposition of path choice entropy in general transport networks, *Transportation Science*, Vol. 31, No. 4, pp. 349–362, 1997.
- 25) Maher, M.: Algorithms for logit-based stochastic user equilibrium assignment, *Transportation Research B*, Vol. 32, No. 8, pp. 539–549, 1998.
- 26) Dial, R. B.: A probabilistic multipath traffic assignment algorithm which obviates path enumeration, *Transportation Research*, Vol. 5, pp. 83–111, 1971.
- 27) Bell, M. G. H.: Alternative to Dial's logit assignment algorithm, *Transportation Research B*, Vol. 29B, No. 4, pp. 287–295, 1995.
- 28) Akamatsu, T.: Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment, *Transportation Research B*, Vol. 30, No. 5, pp. 369–386, 1996.
- 29) 赤松隆: 需要変動を考慮した交通ネットワーク確率的利用者均衡モデルとその解法, 土木学会論文集, Vol. 401/IV, pp. 109–118, 1989.

(平成 19 年 2 月 14 日 受付)

Catastrophe Averse Strategies for Routing and Siting in the Disposal of Hazardous Materials

Takeshi NAGAE and Takashi AKAMATSU

This study provides a method for quantitative analysis of a shipment planning of hazardous materials (hazmats). We first formulate a hazmat routing problem as a maximin problem: the assignment of hazmat vehicles is determined so as to minimize the expected consequence; the incident probabilities on each link are chosen so as to maximize the expected consequence, reflecting catastrophe avoidance of the dispatcher. Our analysis then reveals that the maximin problem reduces to a single-level convex programming problem, which shares a common mathematical structure with a logit-type stochastic user equilibrium problem that is well known in the field of transportation science. This enables us to develop a globally convergent algorithm for obtaining the optimal mixed route strategy, which can be effectively applied to real world large-scale networks.