

# 連鎖的な意思決定構造を持つ プロジェクトの動学的評価法： オプション・グラフ・モデルとその解法

長江 剛志<sup>1</sup>・赤松 隆<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博士(情報科学) 神戸大学大学院 自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

本研究では、複雑な連鎖的意思決定構造をもつ社会基盤整備プロジェクトの財務的評価・意思決定問題を、システムティックに記述・分析できる定量的手法のための枠組を提案する。本研究では、まず、当該プロジェクトを複数のオプションから構成される複合(compound)オプションと見なし、そのオプション構造を有向グラフとして表現する枠組を提案する。次に、現実的かつ一般的な仮定の下で複合オプション問題を定式化し、問題の分解可能性に着目した数理解析を行う。具体的には、この問題が、二つの異なる座標軸—時間とグラフ構造—について分解できることを示す。こうして分解されたサブ問題が数理計画分野で良く知られる標準形の相補性問題に帰着することを明らかにする。これらの分析結果に基づき、見通しの良い効率的数値解法を開発する。

*Key Words* : real option, variational inequality problem, graph theory, decomposition algorithm

## 1. はじめに

### (1) 背景と目的

社会基盤整備事業をはじめとする多くのプロジェクトは、様々な経済活動状態(以下、アクティビティ)から構成され、事業主体は、不確実に変動する状況に応じて、これらのアクティビティを切り替えることができる。例えば、不動産施設運用事業において、施設の遊休化および運用再開が可能な場合を考えよう。この場合、施設を運用している状態、および施設を遊休させている状態のそれぞれがアクティビティに相当し、事業主体は、時々刻々変動する施設需要に応じて、需要が低迷した時には運用から遊休へ、その後、需要が回復した時には遊休から運用へとアクティビティを切り替えられる。

このような意思決定は、“アクティビティを切り替えられる権利(オプション)”の行使と見なすことができる。そして、当該プロジェクトはこうしたオプションの集合から構成される“複合オプション”と捉えることができる。例えば、上述の不動産事業は、運用中の施設を遊休化できる権利と、遊休中の施設の運用を再開できる権利から構成される。一般に、これらのオプションの行使は、複雑な相互依存関係をもつ。すなわち、あるオプションの行使によって、新たに他のオプションを獲得したり、既得のオプションを喪失したりする。上述の例では、施設を遊休化するオプションを行使するこ

とで、新たに運用を再開するオプションを獲得できる。このようなプロジェクトの財務的評価および意思決定を行うためには、オプション構造を明示的に導入した複合リアル・オプション問題の分析手法が必要である。

従来、リアル・オプション理論を採用した研究には膨大な蓄積が存在する(例えば、Dixit and Pindyck<sup>1)</sup>、Schwartz and Trigeorgis<sup>2)</sup>)。しかし、本研究が対象とする複合オプション問題を扱った研究は非常に数が少ない。その上、いずれの研究も、本章(2)節で示すように、現実的かつ一般的な枠組の下で、任意のオプション構造に適用できる複合オプション問題の統一的な表現・分析手法を提供するものではない。

このような背景に鑑み、本研究では、現実的な枠組の下で、任意の連鎖的権利行使構造をもつ複合リアル・オプション問題をシステムティックに記述・分析し、見通しの良い効率的な計算手法を開発するための枠組を提案する。具体的には、第1に、連鎖的意思決定構造をもつプロジェクトを、それを構成するサブ・オプションからなる有向グラフ(以下、オプション・グラフ)として表現する枠組を提案し、複合リアル・オプション問題を定式化する。第2に、この問題が、2つの異なる座標軸—時間とグラフ構造—に関して分解できることを明らかにする。これにより、一見非常に複雑で大規模な問題を、より小規模なサブ問題を逐次的に解く問題に帰着させられる。第3に、こうして分解されたサブ問題が、数理計画分野で良く知られる標準形の相補

性問題 (CP: *Complementarity Problem*) に帰着することを明らかにする。これにより、最近の数値計画理論を活用した見通しの良い数値解法の開発が可能となる。

本稿は以下のように構成される。まず、続く本章 (2) において、従来研究と本研究との位置づけを明示する。次に、第 2 章でオプション・グラフの枠組を示し、複合オプション問題の定式化を行う。続く第 3, 4 章では、こうして定式化されたオプション問題の分解可能性に着目して議論を展開する。具体的には、第 3 章では、時間に関する分解により、任意の構造をもつ複合オプション問題を変分不等式問題 (VIP: *Variational Inequality Problem*) として統一的に記述できる事を示す。第 4 章では、この VIP が、オプション・グラフの部分構造ごとに成立する、より小規模な問題に分解できることを示す。続く第 5 章では、こうして部分構造ごとに分解された VIP が、適切な関数変換によって標準形の CP に帰着することを明らかにする。第 6 章では、複合オプション評価問題に対し、ここまでの分析結果を活用した数値解法を開発する。最後に、第 7, 8 章において、本手法の判りやすい適用例を示し、提案アルゴリズムによる数値計算結果を例示する。

## (2) 従来研究と本研究との位置づけ

従来、金融/リアル・オプション理論を採用した研究には膨大な蓄積が存在する。まず、従来のリアル・オプション研究の殆どは、ファイナンス分野における標準的なアメリカン・オプションを実物資産と読み替えたものを対象としている (例えば、Dixit and Pindyck<sup>3)</sup>)。このアメリカン・オプションを対象としたファイナンス分野の研究として、膨大な研究蓄積が存在する (例えば、McKean<sup>4)</sup>, Merton<sup>5),6)</sup>, Brennan and Schwartz<sup>7)</sup>, Geske and Johnson<sup>8)</sup>, Jacka<sup>9)</sup>, Carr et al.<sup>10)</sup>, Huang et al.<sup>11)</sup>, Broadie and Glasserman<sup>12)</sup>, Dempster and Hutton<sup>13)</sup> など)。しかし、いずれの研究も、シンプルな構造を持つオプションのみを対象としているため、複雑な権利行使構造を導入する事が困難である。

一方、権利行使構造をもつ複合オプションを対象とした金融/リアル・オプション研究は非常に数が少なく、それらが対象とするオプション構造は、大きく以下の 4 つに分類される。

1) 分岐構造 複数のオプションの中から、一つのみを選択できる構造。この権利行使は排他的かつ不可逆的であり、いずれかのオプションが行使されると同時に他のオプションを喪失する。

2) サイクル構造 あるオプションの行使によって、既に行使した別のオプションを再び獲得できる (i.e. 意思決定が可逆的である) 構造。

3) 分岐-サイクル混合構造 上記 2 つを組み合わせた構造。

4) タンデム構造 あるオプションの行使によって、新たに他のオプションを獲得できる構造。

この内、1) の分岐構造を対象としたファイナンス分野の研究としては、Margrabe<sup>14)</sup> の交換オプション、Stulz<sup>15)</sup> の最小/最大値オプションが挙げられる。しかし、これらの研究は、いずれも、ヨーロッパ・オプションのみを対象としており、本研究が目的とするタイミング選択を考慮したオプション分析には適さない。

次に、2) のサイクル構造を対象としたリアル・オプション研究としては、Dixit<sup>16)</sup>, Dixit and Pindyck<sup>17)</sup> の参入・退出オプションが挙げられる。続いて、これらを混合した 3) の分岐-サイクル混合構造を対象としたリアル・オプション研究としては、Dixit and Pindyck<sup>17)</sup> の参入・退出・一時停止オプションが存在する。しかし、2), 3) の研究は、いずれも、概念的な分析を指向しており、その分析手法として、value matching 条件と smooth pasting 条件を用いて解析解を導出する方法を採用している。この古典的手法は、特殊な仮定 (e.g. 対象期間長を無限とし、状態変数が幾何 Brown 運動に従う) をおいた問題に対してのみ有効であり、現実的な状況を取り扱えない。従って、これらのリアル・オプション研究は、いずれも、本研究が目的とする、現実のプロジェクト評価・意思決定の定量的分析にそのまま適用することはできない。

最後に、4) のタンデム構造を対象としたファイナンス分野における従来研究としては、Geske<sup>18)</sup> の複合オプションが挙げられる。しかし、この研究では、権利時刻を与件としたヨーロッパ・オプションのみを対象としているため、リアル・オプション分析において重要なタイミング選択を考慮できない。また、リアル・オプション研究としては、Dixit and Pindyck<sup>19)</sup> の多段階の投資オプション、および Trigeorgis<sup>20),21)</sup> のマルチ・オプションが挙げられる。しかし、前者の研究では、無限の計画期間を前提とし、上述した、解析解を導出するための特殊な仮定をおいているため、現実的な状況を取り扱えない。一方、後者の研究では、有限の計画満期を前提とした定量的分析手法を提案しようとしているものの、状態変数が従うプロセスを幾何 Brown 運動に限定しているため、一般的な確率過程に従う現実的な状況を取り扱えない。

さらに、1)~4) の研究は、いずれも、特定のオプション構造を対象とし、個別の問題に対する限定的な分析を行うに留まっている。そのため、いずれの研究も、異なる構造をもつ複合オプションに対して見通しの良い定量的分析手法を与えるものではない。

これらの複合リアル・オプションを一般化したものと

して、Kulatilaka<sup>22)</sup>は、プロジェクトが、複数の“モード”と、それを切り替えるオプションの集合から構成されるとした枠組を提案し、その下でプロジェクトの価値を算出する方法を開発した。そして、モードの切り替えにサンク・コストが存在する場合には、個々のオプション価値を個別に算出して合計したものが、プロジェクト全体の価値を上回る (i.e. オプション価値の加法性が成立しない) ことを示した。しかし、この分析手法は、以下の3点で疑問が残る。第1に、状態変数が二項過程で近似表現できる特殊な場合のみを対象としているため、一般的な状況を取り扱えない。第2に、任意のモード間の切り替えが可能であるとしているため、不可逆的な意思決定を適切に表現できない。最後に、この提案解法は、モードを2つに限定した上での heuristic な手法にすぎず、任意数のモードが存在する一般的な場合には適用できない。

近年、土木計画の分野においても、不確実性下での意思決定手法としてリアル・オプション理論を採用した研究が行われている。織田澤・小林<sup>23),24)</sup>は、再評価が可能なプロジェクト評価問題をリアル・オプション問題として取り扱い、事前評価および再評価の最適タイミングを求める手法を提案した。しかし、この研究では、意思決定構造の表現に決定木を採用しているため、「計画凍結」↔「再評価の見直し」といった、無限に反復可能な可逆的意思決定構造を完全には表現できない。

これらの研究に対し、本研究では、様々な社会基盤整備事業を、複雑な構造をもつ複合リアル・オプションとみなし、その財務的価値および最適意思決定戦略を定量的に求める見通しの良い手法を開発する。具体的には、まず、可逆的/不可逆的な意思決定が混在する任意の構造の複合リアル・オプション問題をシステマティックに記述・分析するための枠組を提案する。次に、この枠組の下で定式化された複合オプション問題が、より小規模なサブ問題に分解できることを示す。最後に、こうして分解されたサブ問題を特定の順序で一つずつ解くアルゴリズムを開発する。この解法は、赤松・長江<sup>25)</sup>で開発した数値解法を sub-procedure (要素的手続き) として含む。そのため、本手法は、赤松・長江<sup>25)</sup>の記述、分析、および数値計算手法を、複雑な連鎖的構造を持つ複合オプションの枠組へ一般化したものと見なすこともできる。上記の点は、いずれも本研究のオリジナルな貢献である。

## 2. モデルの枠組と定式化

### (1) 有向グラフによる権利行使構造の表現

本研究では、プロジェクトがもつ複雑な連鎖的意思決定構造を、“アクティビティ”をノードとし、その切

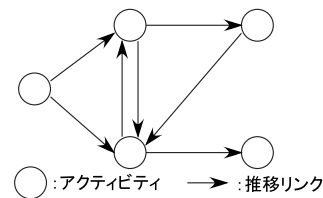


図-1 オプションの権利行使構造を表す有向グラフ

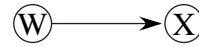


図-2 最小単位のオプション

り替えを有向リンクで記述した有向グラフ (図-1) で表現する。ここで、アクティビティとは、ある特定の経済活動を行っている状態を指す。例えば、用地取得期間、建設期間および供用期間からなる有料道路の建設・運用事業では、各フェイズがそれぞれ1つのアクティビティと見なせる。また、明示的な経済活動を行っていない状態もアクティビティと見なすことができる。上述の有料道路事業の例では、計画を開始する前、あるいは計画を一時凍結している状態も、それぞれ、1つのアクティビティと捉えることができる。

この枠組の下で、あるアクティビティWから他のアクティビティXへの変更を行う権利を“オプション”と呼び、図-2に示すような、2つのアクティビティW,Xと、それらを結ぶ1本の有向リンクとして表現する。そして、そのオプションの行使 (i.e. アクティビティの推移) を、 $W \rightarrow X$ と表現する。このとき、対象とするプロジェクトは、これらのオプションから構成される“複合オプション”と見なせる。本研究では、当該プロジェクトを構成するアクティビティ集合を  $N$ 、有向リンク集合を  $L$  と記述し、当該プロジェクトの意思決定構造を有向グラフ  $G(N, L)$  で表す。以下では、 $G(N, L)$  を“オプション・グラフ”と呼ぶ。

プロジェクトに対する各意思決定がもつ特徴は、このオプション・グラフ上の部分構造によって、以下の3つに分類できる：a) 分岐型、b) サイクル型、c) タンデム型。

**分岐型** 複数のオプションが並列的に連結する部分構造を“分岐型”と呼ぶ。この部分構造は、あるオプションを行使すると同時に、複数の既得のオプションを喪失する意思決定構造を表す。図-1の例では、オプション①→②と①→③からなる部分構造がこれに相当する。

**サイクル型** 複数のオプションからなる有効閉路を“サイクル型”と呼ぶ。この部分構造は、一度行使したオプションが、他のオプションを行使することで再び獲得できる可逆的な意思決定構造を表す。図-1の例では、2

つのオプション②→③と③→②がサイクル型部分構造を形成している。

タンデム型 二つ以上のオプションが直列的に連結する部分構造を、“タンデム型”と呼ぶ。この部分構造は、あるオプションを行使することで、新たに別のオプションを獲得できる意思決定構造を表す。図-1の例では、オプション②→④と④→⑤がタンデム型部分構造を形成している。

以下では、あるアクティビティ $n$ から(他のアクティビティを介さずに)推移可能なアクティビティを、 $n$ の“推移先(アクティビティ)”と呼び、その集合を $O(n) \equiv \{m | \exists (n, m) \in L\}$ で表す。同様に、あるアクティビティ $n$ を直接推移先にもつアクティビティの集合を $I(n) \equiv \{m | \exists (m, n) \in L\}$ で記述する。また、有向グラフ $\mathcal{G}$ 内に推移先が存在しないアクティビティを、 $\mathcal{G}$ の“終端アクティビティ”と呼び、その集合を $N^E \equiv \{n | O(n) = \emptyset\}$ で表す。

## (2) プロジェクトから発生するキャッシュフロー

対象時間帯を $[0, T]$ とし、時刻 $T$ での事象集合を $\Omega$ とする。 $\Omega$ に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$ で表し、 $\Omega$ のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0, T]\}$ を定義する。本稿では、対象オプションの各アクティビティから発生するキャッシュ・フローを、1次元の“代表的状態変数” $P(t)$ の関数として表現する。また、その値が以下の伊藤拡散過程に従うとする：

$$dP(t) = \alpha_n(t, P) dt + \sigma_n(t, P) dZ(t), P(0) = P_0. \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_n, \sigma_n : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ はアクティビティごとに定義される既知の関数、 $dZ(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される1次元Wiener過程の増分である。このような代表的状態変数の例としては、交通量、財や資産の価格、人口などが挙げられる。本稿では、状態変数 $P(t)$ およびWiener過程 $Z(t)$ の次元を、いずれも1次元とする。これは、理論展開を簡潔にするための便宜であり、本提案手法の本質的な仮定(あるいは限界)を示すものではない。事実、本研究の枠組みは、理論的には、任意次元の状態変数およびWiener過程を扱うことができる。以下では、時刻 $t$ において、状態変数 $P(t) = P$ が観測された状況を、2つ組 $(t, P)$ で表現し、それが取り得る空間全体を $\mathcal{X} \equiv [0, T] \times \mathcal{R}$ で表す。

対象とするプロジェクトから発生するキャッシュ・フローは、以下の3つに区別される：第1に、期間 $[0, T]$ 中、時間に関して連続的に発生する利潤を“利潤フロー”と呼ぶ。アクティビティ $n$ から発生する単位時間あたりの利潤フローを、状況 $(t, P)$ の既知関数 $\pi_n(t, P)$ で記述する。第2に、満期 $T$ において瞬間的に発生する利潤を“終端ペイ・オフ”と呼び、状態変数 $P$ の既知関数

$F_n(P(T))$ で表す。最後に、アクティビティの変更(i.e. オプション行使)に伴い瞬間的に発生するサンク・コストを“推移費用”と呼び、アクティビティ $n$ から $m$ への推移費用を所与の定数 $C_{n,m}$ で表す。

## (3) オプション問題の定式化

プロジェクトの意思決定主体(以下、事業主体)は、期間 $[0, T]$ 中に発生する総キャッシュ・フローの現在正味価値(NPV: *Net Present Value*)の期待値を最大化するように、アクティビティ戦略 $\{n(t)\}$ を決定する。ここで、 $n(t)$ は、時刻 $t$ で選択されているアクティビティである。この行動は、以下のように定式化される：

$$[P] \quad \max_{\{n(t)\}} E \left[ \mathcal{J}(0, T, n(\cdot)) \mid P(0) = P \right]$$

ここで、 $\mathcal{J}(t, T, n(\cdot))$ は、推移戦略 $\{n(\cdot)\}$ の下で期間 $[t, T]$ にプロジェクトから発生するキャッシュ・フローを時刻 $t$ で評価したNPVであり、以下の式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t, T, n(\cdot)) \equiv & \int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n(s)}(s, P(s)) ds \\ & + e^{-r(T-t)} F_{n(T)}(P(T)) \\ & - \sum_k e^{-r(\tau_k - t)} C_{n(\tau_k), n(\tau_k^-)} \quad (2) \end{aligned}$$

ただし、 $\tau_k, \tau_k^-$ は、それぞれ、 $k$ 番目に推移が行われる時刻と、その直前の時刻を表す。また、 $n_0$ は初期時点 $t=0$ で選択されている(既知の)アクティビティを表す。式(2)の各項は、以下の3つのキャッシュ・フローの、時刻 $t$ における現在価値の総和をそれぞれ表す：第1項は、期間 $[0, T]$ 中に各アクティビティから得られる利潤フロー、第2項は、満期 $T$ で得られる終端ペイ・オフ、第3項は、各推移が行われる時点で支払われる推移費用。以下では、この問題[P]を、“複合オプション問題”と呼ぶ。

複合オプション問題[P]は、そのままの形では数理解析的特性を分析することが困難である。しかし、この問題[P]は、図-3に示すように、2つの異なる座標軸—時間およびオプション・グラフの部分構造—ごとに分解することにより、より容易に数理解析が可能となる。そこで、続く第3,4章では、問題[P]が時間と部分構造に関して分解できることを示そう。

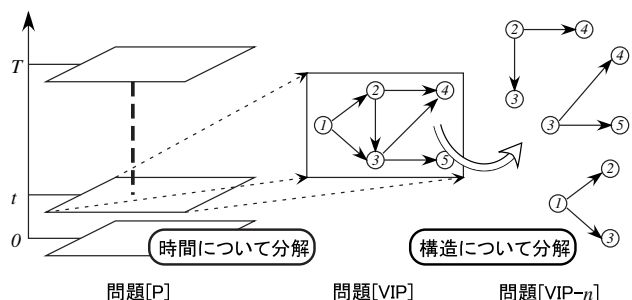


図-3 オプション問題の分解

### 3. 時間に関する分解

本章では、複合オプション問題 [P] を時間に関して分解することにより、この問題が各瞬間で成立する変分不等式問題 (VIP: Variational Inequality Problem) として表現できることを述べる。具体的に、まず、(1) では、問題 [P] の最適値関数を、アクティビティごとの“価値”として定義する。次に、(2) では、これらのアクティビティの価値を DP 分解し、各瞬間で成立する最適性条件を VIP として表現する。

#### (1) 最適値関数の定義

時刻  $t$  に状態変数  $P(t) = P$  が観測され、アクティビティ  $n(t) = n$  が選択されているとき、この状況を 3 つ組  $(t, P, n)$  で表す。ここで、状況  $(t, P, n)$  における問題 [P] の最適値関数を、以下の式：

$$V(t, P, n) \equiv \max_{\{n(s) \mid s \in [t, T], n(t) = n\}} E \left[ \mathcal{J}(t, T, n(\cdot)) \mid P(t) = P \right], \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}, \forall n \in N. \quad (3)$$

で定義しよう。この式は、期待値のネストを用いて以下のように書き直せる。

$$V(t, P, n) \equiv \max_{\tau \in [t, T]} E \left[ \int_t^\tau e^{-r(s-t)} \pi_n(s, P(s)) ds + \max_{m(\tau) \in O(n)} e^{-r(\tau-t)} \{V(\tau, P(\tau), m(\tau)) - C_{n, m(\tau)}\} \mid P(t) = P \right] \quad (4)$$

ここで、 $\tau$  は  $t$  以降はじめて推移が行われる時刻を、 $m(\tau)$  は、その時刻  $\tau$  で選択される推移先アクティビティである。以下では、 $(t, P, n)$  における最適値関数を、アクティビティ  $n$  の状況  $(t, P)$  における“価値”と呼び、 $V_n(t, P) \equiv V(t, P, n)$  と記述する。

なお、終端アクティビティ  $n'$  の状況  $(t, P)$  における価値は、それ以降に発生する期待総利潤：

$$V_{n'}(t, P) \equiv E \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n'}(s, P(s)) ds + e^{-r(T-t)} F_{n'}(P(T)) \mid P(t) = P \right] \quad (5)$$

である。ここで、式 (5) は、以下の線形偏微分方程式の解 (Feynman-Kac 解) である事が知られている。

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{n'} V_{n'}(t, P) + \pi_{n'}(t, P) = 0, & \forall t \in [0, T), \forall P \in \mathcal{R} \\ V_{n'}(T, P(T)) = F_{n'}(P(T)), & \forall P(T) \in \mathcal{R}. \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mathcal{L}_n$  は以下の式で定義される偏微分作用素である。

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P} \alpha_n(t, P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \{\sigma_n(t, P)\}^2 - r. \quad (7)$$

この偏微分作用素は、アクティビティ  $n$  が選択されているときの状態変数プロセス (1) のみから決定される。こ

れより、終端アクティビティの価値  $\{V_{n'}(t, P)\}$  は、複合オプション問題 [P] において、 $(t, P)$  の既知関数と見なせることに注意されたい。

#### (2) 変分不等式問題としての最適性条件の表現

前項で定義したアクティビティの価値  $V_n(t, P)$  を用いれば、各瞬間で成立する最適性条件を VIP として記述できる。式 (4) に対し、時間に関する DP 原理を適用すれば、任意の状況  $(t, P, n)$  における最適性条件は、次の 2 つの場合に区分される：i) アクティビティ  $n$  を維持する；ii) 他のアクティビティに推移する。以下では、状況  $(t, P, n)$  における最適推移先アクティビティを  $m_n^*(t, P)$  で表し、i), ii) がそれぞれ最適となるための条件を述べる。

i) 現在のアクティビティを維持 状況  $(t, P, n)$  で微小時間  $[t, t + dt]$  だけ現在のアクティビティ  $n$  が維持される (i.e.  $m_n^*(t, P) = n$ ) 場合、最適値関数の定義より、以下の不等式が成立する。

$$V_n(t, P) \geq \pi_n(t, P) dt + e^{-r dt} E \left[ V_n(t, P) + dV_n(t, P) \mid P(t) = P \right] \quad (8)$$

この式を伊藤の補題を用いて展開・整理すれば、状況  $(t, P)$  で成立すべき以下の不等式を得る。

$$-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P) \geq 0 \quad (9)$$

ii) 他のアクティビティに推移 状況  $(t, P, n)$  で他のアクティビティへの推移が行われる場合、最適値関数の定義より、以下の不等式が成立する。

$$V_n(t, P) \geq \max_{m \in O(n)} \{V_m(t, P) - C_{n, m}\}. \quad (10)$$

この式 (10) の左辺より右辺を引いて整理すれば、以下の不等式を得る。

$$\Psi_n V(t, P) \geq 0 \quad (11)$$

ただし、 $V(t, P) \equiv \{V_n(t, P) \mid n \in N\}$  は、状況  $(t, P)$  における全てのアクティビティの価値を縦に並べた  $N$  次元ベクトルであり、 $\Psi_n$  は以下の式で定義される作用素である：

$$\Psi_n V(t, P) \equiv \min_{m \in O(n)} \{V_n(t, P) - V_m(t, P) + C_{n, m}\}.$$

また、当該状況下での  $n$  の推移先アクティビティは、

$$m_n^*(t, P) = \arg \max_{m \in O(n)} \{V_m(t, P) - C_{n, m}\}. \quad (12)$$

で表される。

任意の状況  $(t, P, n)$  において、上記 i), ii) の選択は排他的である。すなわち、式 (9), (11) のいずれかのみ等の不等式が成立する。具体的には、アクティビティ  $n$  が継続される場合、

$$-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P) = 0, \quad \Psi_n V(t, P) > 0 \quad (13)$$

が成立し、他のアクティビティへの推移が行われる場合、

$$-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P) > 0, \quad \Psi_n V(t, P) = 0 \quad (14)$$

が成立する。これらの条件は、まとめて以下の変分不等式として表現できる：

$$\min. \{-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P), \quad \Psi_n V(t, P)\} = 0. \quad (15)$$

満期  $t = T$  における終端条件についても同様の場合分けが行える。すなわち、状況  $(T, P, n)$  において、i) アクティビティ  $n$  が維持される場合  $V_n(T, P) \geq F_n(P)$  であり、ii) 他のアクティビティに推移する場合  $V_n(T, P) \geq \max_{m \in O(n)} \{V_m(T, P) - C_{n,m}\}$  である。これより、アクティビティ  $n$  の価値  $V_n(t, P)$  の終端条件は以下の式で表される。

$$V_n(T, P(T)) = \max. [F_n(T, P(T)), \max_{m \in O(n)} \{V_m(T, P(T)) - C_{n,m}\}]. \quad (16)$$

式 (15), (16) は、状況  $(t, P, n)$  の下で、あるアクティビティ  $n$  について成立するべき条件のみを記述しており、任意のアクティビティに対して同様の議論が成立する。従って、時刻  $t \in [0, T]$  で成立すべき問題は、式 (15), (16) を全てのアクティビティ  $n \in N$  および全ての状態  $P \in \mathcal{R}$  について連立させた以下の変分不等式問題として記述される。

[VIP( $t$ )] Find  $\{V(t, P) | \forall P \in \mathcal{R}\}$  such that

$$\min. \{-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P), \quad \Psi_n V(t, P)\} = 0,$$

$$\forall n \in N, \forall P \in \mathcal{R}.$$

ただし、終端条件は以下の式で表される。

$$\min. [V_n(t, P(T)) - F_n(T, P(T)), \quad \Psi_n V_n(T, P(T))] = 0,$$

$$\forall n \in N, \forall P(T) \in \mathcal{R}. \quad (17)$$

これより、複合オプション問題 [P] は、上述の問題 [VIP( $t$ )] を全ての時刻  $t \in [0, T]$  について連立させた問題 (以下、[VIP] と記述) として表現し直せることが判った。この問題 [VIP] を解けば、任意のアクティビティ  $n$  の価値  $\{V_n(\cdot)\}$  および最適推移先アクティビティ  $\{m_n^*(\cdot)\}$  が求められる。

なお、本モデルは、無限の時間視野  $T \rightarrow \infty$  を対象とした問題 ([P- $\infty$ ] と記述) を特殊ケースとして含む。より具体的には、無限満期モデルでは時刻  $t$  が捨棄され、最適値関数が状態変数  $P$  のみの関数  $V(P) \equiv \{V_n(P) | \forall n\}$  として定義される。そのため、問題 [P- $\infty$ ] の最適性条件は時刻ごとに区別される必要がなく、任意の瞬間で成立する以下の変分不等式問題として記述される。

[VIP- $\infty$ ] Find  $\{V(P) | \forall P \in \mathcal{R}\}$  such that

$$\min. \{-\mathcal{L}_n^\infty V_n(P) - \pi_n(P), \quad \Psi_n V(P)\} = 0, \quad \forall n \in N, \forall P \in \mathcal{R}.$$

ここで、 $\mathcal{L}_n^\infty$  は、式 (7) の偏微分作用素  $\mathcal{L}_n$  から時間に関する偏微分  $\partial/\partial t$  を除いた常微分作用素である。すなわち、無限満期の問題 [VIP- $\infty$ ] は、有限満期の枠組において時刻ごとに連立すべき問題 [VIP( $t$ )] の 1 つにすぎず、より容易に分析および数値解法の開発が行える。そこで、次章以降では、より一般的な有限満期の問題 [VIP( $t$ )] についてのみ議論を展開する。

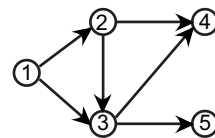
#### 4. グラフ構造に関する分解

前章において、複合オプション問題 [P] は、各時刻ごとに成立する問題 [VIP( $t$ )] に分解できることを示した。この問題 [VIP( $t$ )] は、全てのアクティビティの価値を連立させて同時に求める必要があり、ナイーブな方法では解くことができない。しかし、問題 [VIP( $t$ )] は、さらに、オプション・グラフを構成する部分構造ごとの問題に分解でき、これによって、より小規模な問題を順に解く問題に帰着させられる。本章ではこれを明らかにしよう。以下の議論は、オプション構造  $\mathcal{G}(N, L)$  がサイクル構造を含む場合と、そうでない場合に区分される。

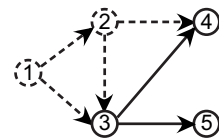
##### (1) サイクル構造を含まない場合

オプション・グラフ  $\mathcal{G}(N, L)$  がサイクル構造を含まない場合、問題 [VIP( $t$ )] は、各アクティビティの価値を一つずつ求める問題に帰着する。まず、任意の時刻  $t$  における全ての終端アクティビティの価値は、偏微分方程式 (7) の解として、他のアクティビティの価値とは独立に求めることができる。例えば、図-4 a) のオプション・グラフにおいて、終端アクティビティ ④, ⑤ の価値は、対応する偏微分方程式を解いて予め計算できる。

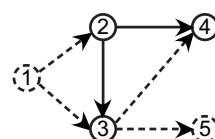
こうして、任意の時点  $t$  において、終端アクティビティ



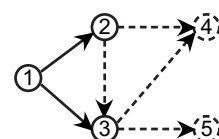
a) 対象とするグラフ構造



b) アクティビティ3の価値を求める



c) アクティビティ2の価値を求める



d) アクティビティ1の価値を求める

図-4 サイクル構造を含まない場合の解法

の価値が判っていれば、それらを用いることにより、別のアクティビティの価値を計算できる。具体的には、終端アクティビティのみを推移先とするアクティビティ $n$ が少なくとも一つ存在し、その価値  $V_n(t) \equiv \{V_n(t, P) | P \in \mathcal{R}\}$  を、このアクティビティ $n$ を起点とする分岐型部分構造問題の解として求められる。図-4 のオプション・グラフ例では、終端アクティビティ④、⑤のみを推移先とするアクティビティ③が存在し、その価値が、図-4 b) に示す分岐型部分構造について成立する問題の解として計算できる。

こうして得られたアクティビティの価値を用いることにより、新たに別のアクティビティの価値が求められる。具体的には、価値が確定したアクティビティのみを推移先とするようなアクティビティが少なくとも1つ存在し、その価値を、当該アクティビティを起点とした分岐型部分構造問題の解として求めることができる。図-4 の例では、価値が確定したアクティビティ{③, ④, ⑤}のみを推移先とするアクティビティ②が存在し、その価値を図-4 c) に示す部分構造問題の解として求められる。同様に、②, ③の価値のみを用いて、アクティビティ①の価値を計算できる(図-4 d))。

このように、時点 $t$ での価値が確定したアクティビティの集合を $\hat{N}$ とすると、以下の条件:

$$O(n) \subseteq \hat{N} \quad (18)$$

を満たすアクティビティ $n$ が、少なくとも一つ存在する。従って、以下の手続き: i) 条件(18)を満たす $n$ を探し、ii) その価値 $V_n(t)$ を、 $n$ を起点とした分岐型部分構造問題の解として求める; を繰り返せば、最終的に全てのアクティビティの価値を求められる。

ここで、手続き ii) において解くべき、分岐型部分構造について成立する問題は、以下の無限次元 VIP:

[VIP( $t$ )- $n$ ] Find  $V_n(t)$  such that

$$\min. \left\{ -\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \bar{\pi}_n(t, P), \right.$$

$$\left. \min_{m \in O(n)} \{V_n(t, P) - \bar{V}_m(t, P) + \bar{C}_{n,m}\} \right\} = 0, \quad \forall P \in \mathcal{R}.$$

として定式化される。ただし、ここでは、当該時刻 $t$ における状態変数 $P$ についての既知関数、あるいは所与の定数であることを明示するために上線付きの表記を用いた。

問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] は、アクティビティ $n$ についての最適性条件式(15)から直接導出される。これは、アクティビティ $n$ の全ての推移先の価値が $P$ に関する既知関数であることから、最適性条件(15)が未知変数 $V_n(t)$ について独立となるためである。なお、この問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] は、赤松・長江<sup>25)</sup>が扱った“分岐オプション”と全く同

じ構造をもつことに注意されたい。この事実は、続く第5章の分析で活用される。

以上の議論より、オプション・グラフがサイクル構造を含まない場合、問題 [VIP( $t$ )] を解く手続きは、以下のアルゴリズムとしてまとめられる。

[Alg-NC]

Step 0 (初期化):

終端アクティビティ集合  $N^E$  内の全要素  $n'$  について偏微分方程式(6)を解き、その価値  $V_{n'}(t, P)$  を求める;  
 全てのアクティビティ $n$ について、価値が未確定な推移先の数を  $A(n) := |O(n)|$  とする;  
 価値が確定済みのアクティビティ集合を  $\hat{N} := N^E$  とする。

Step 1 (価値が確定できるアクティビティの探索):

$\hat{N}$  の先頭の要素を  $n$  とし、 $\hat{N}$  から取り除く;  
 $n$  を推移先にもつアクティビティ集合  $I(n)$  内の全ての要素  $m$  について、次の手続きを繰り返す:

$A(m) := A(m) - 1$  とする;  
 もし  $A(m) = 0$  ならば、問題 [VIP( $t$ )- $m$ ] を解いて  $V_m(t)$  を求め、 $m$  を  $\hat{N}$  の末尾に挿入する。

Step 2 (終了判定):

$\hat{N}^{(k)} = \emptyset$  ならば終了。そうでなければ Step 1。

## (2) サイクル構造を含む場合

オプション・グラフがサイクル構造を含む場合についても、前章と同様の分解が可能である。ただし、その分解の単位は、サイクルを成すリンクで構成される最小の部分グラフ(以下、“最小閉路”)にまで拡張される。この最小閉路の例を図-5 に示す。この図-5 のオプション構造においては、

$$N_a \equiv \{1, 2\}, \quad L_a \equiv \{(1, 2), (2, 1)\},$$

$$N_b \equiv \{3, 4, 5\}, \quad L_b \equiv \{(3, 4), (4, 5), (5, 3)\}$$

からなる2つの最小閉路が存在する。以下では、アクティビティ集合  $N_c \subset N$  および推移リンク集合  $L_c \subset L$  から構成される最小閉路を  $c \equiv \mathcal{G}(N_c, L_c)$  と記述する。ある最小閉路 $c$ について、 $N_c$ 内の全てのアクティビティから(他のアクティビティを介すことなく)直接推移可能な $N_c$ 以外のアクティビティを $c$ の推移先アクティビティと呼び、その集合を $O(c)$ で表す。また、アクティビティ $n$ を推移先にもつ最小閉路の集合を $I_c(n)$ で表す。

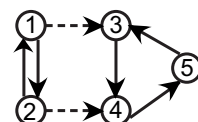


図-5 サイクルを含むオプション構造と最小閉路

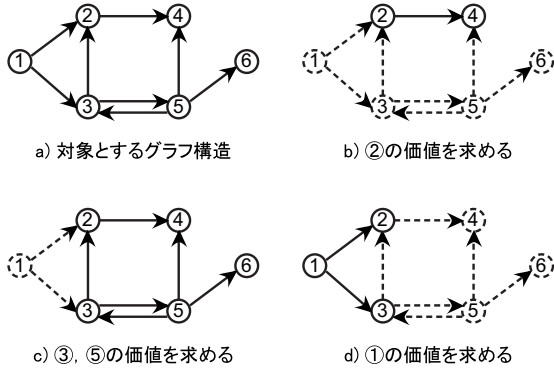


図-6 サイクル構造を含む場合の解法

オプション・グラフがサイクル構造を含む場合に対しても、前節と同様、問題 [VIP( $t$ )] を部分構造ごとに分解できる。前節と議論が異なるのは以下の点である：サイクルを含まない場合では各アクティビティの価値が1つずつ求められるのに対し、サイクルを含む場合は、最小閉路上の全てのアクティビティの価値を同時に求める必要がある。

まず、当該オプション・グラフにおける最小閉路集合  $C$  が既知であるとする。例えば、図-6a のオプション・グラフにおける最小閉路は、 $N_c \equiv \{3, 5\}$ ,  $L_c \equiv \{(3, 5), (5, 3)\}$  で構成される  $c$  のみである。すなわち、 $C \equiv \{c\}$ 。

次に、前節と同様、任意の時刻  $t$  における終端アクティビティの価値は、偏微分方程式 (6) の解として予め求めておくことができる。図-6 の例では、④、⑥が終端アクティビティであり、これらの価値は対応する偏微分方程式より計算できる。こうして得られた時点  $t$  での終端アクティビティの価値を用いることにより、少なくとも1つの新たなアクティビティの価値を求められる。図-6 の例では、終端アクティビティ④のみを推移先とする②の価値を、前節で述べた問題 [VIP( $t$ )-2] の解として計算できる。

こうして得られたアクティビティの価値を用いることにより、少なくとも1つのアクティビティの価値が新たに求められる。具体的には、まず、時点  $t$  での価値が確定したアクティビティの集合を  $\hat{N}$  とするとき、以下のいずれかが必ず成立する：a)  $\hat{N}$  内のアクティビティのみを推移先とする (i.e. 前節の条件 (18) を満たす) アクティビティ  $n$  が存在する；b)  $\hat{N}$  内のアクティビティのみを推移先とする最小閉路  $c$  が存在する、すなわち、

$$O(c) \subseteq \hat{N} \quad (19)$$

を満たす  $c \in C$  が存在する。ここで、前者が成立する場合、[VIP( $t$ )- $n$ ] を解いて  $V_n(t)$  を計算できる。一方、後者が成立する場合、最小閉路  $c$  上の全てのアクティビティの価値を、後述する部分構造問題の解として“同時に”求められる。図-6 のオプション・グラフ例では、{②, ④, ⑥} の価値が確定しているとき、これらと与件

として、図-6c の部分構造について成立する問題を解けば、③、⑤の価値を同時に計算できる。同様に、ここで得られた  $V_3(t)$  と、既に計算された  $V_2(t)$  とを与件とすることで、①の価値を計算できる (図-6d)。

ここで、最小閉路  $c$  について成立する部分構造問題は、 $c$  上の全アクティビティの価値  $V_c(t) \equiv \{V_n(t) | \forall n \in N_c\}$  を未知関数とした、以下の連立 VIP として定式化される。

[VIP( $t$ )- $c$ ] Find  $V_c(t)$  such that  
 $\min. \{-\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P), \Psi_n V_c\} = 0, \forall P \in \mathcal{R}, \forall n \in N_c.$

ただし、 $\Psi_n$  は以下のように定義される作用素である：

$$\Psi_n V_c \equiv V_n(t, P) - \max_{m \in N(n)} \{V_m(t, P) - \bar{C}_{n,m}\}.$$

ここで、 $V_m(\cdot)$  は  $m \in N_c$  なら求めるべき未知関数、 $m \in O(c)$  なら  $P$  についての既知関数であることに注意されたい。

従って、前節と同様、時点  $t$  で成立する問題 [VIP( $t$ )] は、以下の手続きを繰り返すことで、全てのアクティビティの価値を求められる：i) 条件 (18) を満たす  $n$  (あるいは条件 (19) を満たす  $c$ ) を探し、ii) その価値  $V_n(t)$  (あるいは  $V_c(t)$ ) を、 $n$  (あるいは  $c$ ) について成立する問題の解として求める。この手続きは、[Alg-NC] を拡張した、以下のアルゴリズムとしてまとめられる。

[Alg-C]

Step 0 (初期化)：

$N^E$  内の全要素  $n'$  について偏微分方程式 (6) を解き、価値  $V_{n'}(t, P)$  を求める；  
 全アクティビティ  $n$  について  $A(n) := |O(n)|$ 、全最小閉路  $c$  について  $B(c) := |O(c)|$  とする；  
 $\hat{N} := N^E$ 。

Step 1 (アクティビティまたは最小閉路の探索)：

$\hat{N}$  の先頭の要素を  $n$  とし、 $\hat{N}$  から取り除く；集合  $I(n)$  内の全要素  $m$  について、以下を繰り返す：

$A(m) := A(m) - 1$ ；  
 もし  $A(m) = 0$  ならば問題 [VIP( $t$ )- $m$ ] の解  $V_m(t)$  を求め、 $m$  を  $\hat{N}$  の末尾に挿入する。

$I_C(n)$  内の全要素  $c$  について、以下を繰り返す：

価値が未確定な推移先の数： $B(c) := B(c) - 1$ ；  
 もし  $B(c) = 0$  ならば、問題 [VIP( $t$ )- $c$ ] の解  $\{V_m(t) | \forall m \in N_c\}$  を求め、 $N_c$  内の全要素を  $\hat{N}$  の末尾に挿入。

Step 2 (終了判定)：

$\hat{N} = \emptyset$  ならば終了。そうでなければ Step 1。



## 5. 標準形相補性問題への帰着

前章までの議論より，複合オプション問題 [P] はオプション・グラフを構成する部分構造ごとの問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] あるいは [VIP( $t$ )- $c$ ] に分解できることが判った．しかし，これらはいずれも標準形の VIP でないため，そのままでは数値解法の開発が困難である．これに対し，赤松・長江<sup>25)</sup> はアクティビティごとの問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] と同じ構造を持つ VIP が，適切な関数変換によって数理計画分野で良く知られる標準形の線形相補性問題 (LCP: *Linear Complementarity Problem*) に帰着することを示した．本章では，これを概観すると共に，同様の議論が，最小閉路ごとの問題 [VIP( $t$ )- $c$ ] にも適用可能であることを示す．この分析結果と，前章で議論したグラフ構造ごとの問題の分解を活用することにより，任意の構造に適用可能な効率的数値解法の開発が可能となる (詳細は第 6 章を参照) ．

### (1) アクティビティごとの問題

問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] は，赤松・長江<sup>25)</sup> の扱った“分岐オプション問題”と同じ構造を持っており，適切な関数変換によって，標準形の LCP に帰着する．まず，未知関数  $V_n(t)$  に対して以下の関数変換を考えよう．

$$X_n(t, P) \equiv -\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P), \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (20)$$

このとき， $V_n(t)$  は， $X_n(t, P)$  を用いた以下の式：

$$V_n(t, P) \equiv -\mathcal{D}_n X_n(t, P) - h_n(t, P), \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (21)$$

で書き直せる．ここで， $\mathcal{D}_n \equiv \mathcal{L}_n^{-1}$  は偏微分作用素  $\mathcal{L}_n$  の逆作用素であり，Green (積分) 作用素と呼ばれる．また，

$$h_n(t, P) \equiv \mathcal{D}_n \pi_n(t, P), \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (22)$$

である．

関数変換式 (20) ~ (22) を [VIP( $t$ )- $n$ ] に代入して整理すれば，時刻  $t$  について成立すべき以下の標準形 LCP:

$$\begin{aligned} \text{[LCP}(t)\text{-}n] \quad & \text{Find } X_n(t) \text{ such that} \\ & \begin{cases} X_n(t, P) \cdot G_n(X_n(t, P)) = 0, \\ X_n(t, P) \geq 0, G_n(X_n(t, P)) \geq 0 \end{cases} \quad \forall P \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

を得る． $G_n(\cdot)$  は以下の式で定義される 線形 写像である．

$$\begin{aligned} G_n(X_n(t, P)) & \equiv -\mathcal{D}_n X_n(t, P) - \bar{h}_n(t, P) \\ & - \max_{m \in O_c(n)} \left\{ \bar{V}_m(t, P) - \bar{C}_{n,m} \right\}, \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (23) \end{aligned}$$

ただし，ここでは，当該時刻  $t$  において，状態変数  $P$  についての既知関数 (あるいは所与の定数) であることを明示するために上線付きの表現を用いた．

### (2) 最小閉路ごとの問題

一方，問題 [VIP( $t$ )- $c$ ] は，同様の関数変換により，微分不可能な写像をもつ非線形相補性問題 (NCP: *Non-linear CP*) に帰着する．まず，式 (20) ~ (22) の関数変換を，最小閉路  $c$  上の全てのアクティビティ  $n \in N_c$  について適用する．これを [VIP( $t$ )- $c$ ] に適用すれば，明示的な未知変数を  $X_c(t) \equiv \{X_n(t) | \forall n \in N_c\}$  とした，以下の標準形の非線形相補性問題 NCP を得る．

$$\begin{aligned} \text{[NCP}(t)\text{-}c] \quad & \text{Find } X_c(t) \text{ such that} \\ & \begin{cases} X_c(t, P) \cdot G_c(X_c(t, P)) = 0, \\ X_c(t, P) \geq 0, G_c(X_c(t, P)) \geq 0 \end{cases} \quad \forall P \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

ここで， $G_c(\cdot) \equiv \{G_n(\cdot) | \forall n \in N_c\}$  は， $X_c(t, P)$  についての 非線形 写像であり，その各要素  $G_n(\cdot)$  は，以下のように定義される．

$$\begin{aligned} G_n(X_c(t, P)) & \equiv -\mathcal{D}_n X_n(t, P) - \bar{h}_n(t, P) \\ & - \max_{m \in O_c(n)} \left\{ \max_{m' \in \hat{O}_c(n)} \left\{ -\mathcal{D}_m X_m(t, P) - \bar{h}_m(t, P) - \bar{C}_{n,m'} \right\}, \right. \\ & \quad \left. \max_{m' \in \hat{O}_c(n)} \left\{ \bar{V}_{m'}(t, P) - \bar{C}_{n,m'} \right\} \right\}, \quad \forall n \in N_c. \quad (24) \end{aligned}$$

ここで， $O_c(n) \equiv O(n) \cap N_c$ ， $\hat{O}_c(n) \equiv O(n) \cap O(c)$  である．これらは，それぞれ，アクティビティ  $n$  の推移先の内，最小閉路  $c$  上のアクティビティ集合と，そうでない集合を表す．また，前節と同様，ここでは時刻  $t$  における状態変数  $P$  についての既知関数 (および所与の定数) であることを明示するために上線付きの記号を用いた．

以上 (1), (2) より，オプション・グラフの部分構造ごとに分解された変分不等式問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] および [VIP( $t$ )- $c$ ] は，いずれも，標準形の相補性問題 [LCP( $t$ )- $n$ ]，[NCP( $t$ )- $c$ ] に帰着することが判った．

## 6. アルゴリズム

本章では，前章までの分析を活用した複合オプション問題 [P] の数値解法を述べる．まず，(1) において離散的表現のための枠組を示す．次に，(2) ~ (4) では，変分不等式問題 [VIP] を離散表現し，第 3 ~ 5 章での議論と同様，この問題が，各時点で成立する部分構造ごとの NCP を逐次的に解く問題へ帰着することを示す．続く (5) では，こうして分解されたサブ問題の効率的な数値解法を述べる．最後に，(6) において，複合オプション問題 [P] の数値解法全体をまとめる．

### (1) 離散的表現の枠組

十分に大きな状態変数の領域  $[P_{\min}, P_{\max}] \in \mathcal{R}$  をとり，時刻と状態変数の空間  $\mathcal{K} \equiv \{(t, P) | t \in [0, T], P \in \mathcal{R}\}$  を，

以下の格子：

$$\gamma \equiv \{(i, j) | \forall i \in I, \forall j \in J\} \quad (25)$$

を用いて  $(t^i, P^j) \equiv (i\Delta T, j\Delta P + P_{\min})$  と離散表現する。ここで、 $I \equiv \{0, 1, \dots, I\}$ 、 $J \equiv \{0, 1, \dots, J, J+1\}$  とし、状態変数の境界を示すインデックスを、それぞれ、 $\min \equiv 0$ 、 $\max \equiv J+1$  で表す。また、 $\Delta T, \Delta P$  は、それぞれ、時刻および状態変数についての格子間隔を表す。

この枠組下で、任意関数  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}$  に対して、格子  $\gamma$  の  $(i, j)$  座標上での値を、 $f^{i,j} \equiv f(t^i, P^j)$  と表現する。以下では、時刻  $i$  についてのベクトル表現  $f^i \equiv \{f_n^{i,1}, \dots, f_n^{i,J}\}$  を適宜用いる。このとき、式 (7) で定義される偏微分作用素  $\mathcal{L}_n$  は、

$$\mathcal{L}_n V_n(t^i, P^j) \approx L_n^i V_n^i + M_n^i V_n^{i+1} \quad (26)$$

と離散近似される。ここで、 $L_n^i, M_n^i$  は、式 (7) で定義される偏微分作用素  $\mathcal{L}_n$  を適当なスキームで差分近似して得られる  $J \times J$  の正方行列である (例えば、赤松・長江<sup>25)</sup>を参照)。

## (2) 複合オプション問題の離散的表現

前項の枠組の下で、時間について分解された問題 [VIP( $t$ )] は、未知変数を  $V^i \equiv \{V_n^i | \forall n \in N\}$  とした以下の有限次元 VIP として離散表現できる。

[VIP <sup>$i$</sup> ] Find  $V^i$  such that

$$\min. \left[ -L_n^i V_n^i - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i, \min_{m \in O(n)} \{V_n^i - V_m^i - \mathbf{1}C_{n,m}\} \right] = \mathbf{0}, \forall n \in N.$$

時点  $i$  におけるサブ問題 [VIP <sup>$i$</sup> ] は、その次の時点  $i+1$  の最適値関数  $V^{i+1}$  が既知ならば、当該時点の  $V^i$  のみを未知変数とした独立な問題となる。ただし、満期  $i=I$  における値は、終端条件式 (17) を離散表現した以下の式から計算される。

$$V_n^I = \max. \left[ F_n, \max_{m \in O(n)} \{V_m^I - \mathbf{1}C_{n,m}\} \right], \forall n \in N. \quad (27)$$

これより、複合オプション問題 [VIP] を離散表現した問題は、終端条件 (27) で得られた  $V^I$  を与件とし、 $i = I-1, I-2, \dots, 2, 1, 0$  と、時点  $i$  を遡りながらサブ問題 [VIP <sup>$i$</sup> ] を逐次的に解く問題に帰着する。

## (3) グラフについての分解

時点  $i$  で成立するサブ問題 [VIP <sup>$i$</sup> ] は、第 4 章と同様、オプション・グラフの部分構造ごとに成立する有限次元 VIP に分解できる。まず、オプション・グラフがサイクル構造を含まない場合、[VIP <sup>$i$</sup> ] は、以下のアクティビティごとの問題に分解できる。

[VIP <sup>$i$</sup> - $n$ ] Find  $V_n^i$  such that

$$\min. \left\{ -L_n^i V_n^i - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i, \min_{m \in N(n)} \{V_n^i - V_m^i + \mathbf{1}C_{n,m}\} \right\} = \mathbf{0}.$$

同様に、サイクル構造が含まれる場合、[VIP <sup>$i$</sup> ] は、以下の最小閉路ごとの問題に分解できる。

[VIP <sup>$i$</sup> - $c$ ] Find  $V_c^i \equiv \{V_n^i | \forall n \in N_c\}$  such that

$$\min. \left\{ -L_n^i V_n^i - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i, \min_{m \in N(n)} \{V_n^i - V_m^i + \mathbf{1}C_{n,m}\} \right\} = \mathbf{0}, \forall n \in N_c.$$

こうして求めた問題は、それぞれ、アクティビティごとの問題 [VIP( $t$ )- $n$ ] および最小閉路ごとの問題 [VIP( $t$ )- $c$ ] に対応する。そして、第 4 章での議論と同様、問題 [VIP <sup>$i$</sup> - $n$ ]、[VIP <sup>$i$</sup> - $c$ ] を、アルゴリズム [Alg-NC]、[Alg-C] に従って、終端アクティビティから順番に一つずつ解くことで、時点  $i$  における全てのアクティビティの価値  $V_n^i$  が求められる。

ここで、時点  $i$  における終端アクティビティの価値  $V_n^i$  は、時点  $i+1$  での価値  $V_n^{i+1}$  を与件とし、偏微分方程式 (6) を離散近似した以下の線型方程式の解として得られる：

$$L_{n'}^i V_{n'}^i + M_n^i V_n^{i+1} + \pi_{n'}^i = \mathbf{0}. \quad (28)$$

## (4) 標準形相補性問題への帰着

部分構造ごとの問題 [VIP <sup>$i$</sup> - $n$ ]、[VIP <sup>$i$</sup> - $c$ ] は、第 5 章と同様、適切な変数変換によって標準形の有限次元相補性問題に帰着する。まず、本章 (1) で示した離散的枠組の下では、式 (20) の関数変換は、以下のように離散近似される。

$$X_n^i \equiv -L_n^i V_n^i - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i. \quad (29)$$

ここで、次の時点の最適値関数  $V_n^{i+1}$  が既知であれば、 $V_n^i$  は  $X_n^i$  を用いた以下の式で表現される。

$$V_n^i \equiv -D_n^i X_n^i - h_n^i. \quad (30)$$

ここで、 $D_n^i \equiv (L_n^i)^{-1}$  は  $L_n^i$  の逆行列 ( $J \times J$  正方行列) であり、(Green) 積分作用素に対応する。また、 $h_n^i \equiv D_n^i \{M_n^i V_n^{i+1} + \pi_n^i\}$  であり、時点  $i$  においては所与の定数として扱えることに注意されたい。

これらの式 (29)、(30) を、問題 [VIP <sup>$i$</sup> - $n$ ] に代入して整理すれば、明示的な未知変数を  $X_n^i$  とした以下の標準形有限次元 LCP を得る。

[LCP <sup>$i$</sup> - $n$ ] Find  $X_n^i$  such that

$$X_n^i \cdot G_n^i(X_n^i) = 0, \quad \text{and} \quad X_n^i \geq \mathbf{0}, \quad G_n^i(X_n^i) \geq \mathbf{0}.$$

ここで、 $G_n(\cdot)$  は  $X_n^i$  に関する線形関数であり、以下の式で定義される。

$$G_n(X_n^i) \equiv -D_n^i X_n^i - h_n^i - \max_{m \in N(n)} \{V_m^i - 1C_{n,m}\}.$$

この式の第3項は、問題 [LCP<sup>i</sup>-n] においては所与の定数として扱えることに注意されたい。

同様に、式 (29) ~ (30) を問題 [VIP<sup>i</sup>-c] に代入すれば、明示的な未知変数を  $X_c^i \equiv \{X_n^i | \forall n \in N_c\}$  とした、以下の標準形の有限次元 NCP を得る。

[NCP<sup>i</sup>-c] Find  $X_c^i$  such that

$$X_c^i \cdot G_c^i(X_c^i) = 0, \quad \text{and} \quad X_c^i \geq 0, \quad G_c^i(X_c^i) \geq 0.$$

ここで、 $G_c^i(\cdot) \equiv \{G_n^i(\cdot) | \forall n \in N_c\}$  の要素  $G_n^i$  は以下のように定義される。

$$G_n^i(X_c^i) \equiv -D_n^i X_n^i - h_n^i - \max_{m' \in \hat{O}_c(n)} \left\{ \max_{m \in O_c(n)} \{-D_m^i X_m^i - h_m^i - 1C_{n,m}\}, \max_{m' \in \hat{O}_c(n)} \{V_{m'}^i - 1C_{n,m'}\} \right\}, \quad \forall n \in N_c. \quad (31)$$

この式は、第2項に、未知変数  $X_c^i$  についての最大値演算を含む。従って、[NCP<sup>i</sup>-c] は、連続微分不可能な写像をもつ非線形相補性問題である。

### (5) 部分構造問題の効率的解法

こうして得られたアクティビティごとの線形相補性問題 [LCP<sup>i</sup>-n] に対しては、最近の数計画理論の進展に伴って現れた merit 関数アプローチが有効である。その適用例の詳細については、赤松・長江<sup>25)</sup>を参照されたい。さらに、merit 関数アプローチは、微分不可能関数を写像に含む非線形相補性問題 [NCP<sup>i</sup>-c] に対しても有効である。以下ではこれを示そう。

#### a) Merit 関数アプローチを用いた解法

Merit 関数アプローチとは、相補性問題 [NCP<sup>i</sup>-c] を、以下の性質を満たす連続微分可能な実数値関数  $\Phi(X_c)$  の最小化問題に帰着させて解くものである： $X_c^i$  が [NCP<sup>i</sup>-c] の解ならば  $\Phi(X_c^i) = 0$ 、そうでなければ  $\Phi(X_c^i) > 0$ 。このような性質を満たし、[NCP<sup>i</sup>-c] にも適用可能な merit 関数として、以下の Fukushima 型関数<sup>26)</sup>が挙げられる：

$$\Phi(X_c^i) \equiv -G(X_c^i) \cdot H(X_c^i) - \frac{1}{2} H(X_c^i) \cdot H(X_c^i), \quad (32)$$

where

$$H(X_c^i) \equiv [X_c^i - G(X_c^i)]_+ - X_c^i. \quad (33)$$

ここで、 $[Z]_+$  は正の実数空間  $\mathcal{R}_+$  への射影演算子であり、その第  $k$  要素は  $\max\{Z^k, 0\}$  で表される。式 (32) の merit 関数を用いて問題 [NCP<sup>i</sup>-c] を解く最も簡単なアルゴリズムは、[Alg-Merit] のようにまとめられる<sup>26)</sup>。この手続きの Step 1 において降下方向ベクトルを求める式

(34) が、写像  $G_c(\cdot)$  の微分情報を必要としないことに注意されたい。これより、[Alg-Merit] は、微分不可能関数を含む問題 [NCP<sup>i</sup>-c] にも適用できる。

[Alg-Merit]

Step 0 初期可能解  $X_c^{i(1)} \in \mathcal{R}_+$ ,  $k := 1$  .

Step 1 降下方向ベクトルの決定 .

$$d^{(k)} := H(X_c^{i(k)}). \quad (34)$$

Step 2 ステップ・サイズ  $\alpha$  を、以下の次元探索問題の解として求める .

$$\alpha^* = \arg. \min_{\alpha \in [0,1]} \Phi(X_c^{i(k)} + \alpha d^{(k)}). \quad (35)$$

Step 3 解の改訂 .  $X_c^{i(k+1)} := X_c^{i(k)} + \alpha^* d^{(k)}$

Step 4 収束判定：収束していれば停止，そうでなければ  $k := k + 1$  として Step 1 へ .

#### b) 写像の効率的計算法

merit 関数アプローチでは、写像  $G_c^i(X_c^i)$  の評価を効率的に行えるか否かが、アルゴリズム全体の性能を左右する鍵となる。以下では、この写像の効率的計算方法を述べる。

時点  $i$  での  $k$  回目繰り返し計算におけるアクティビティ  $n$  の未知変数を  $X_n^{i(k)}$  で表すとき、最小閉路ごとの問題 [NCP<sup>i</sup>-c] の写像  $G_c^{i(k)}$  は、以下の2段階の手続きによって計算できる。まず、最小閉路  $c$  上の全てのアクティビティについて、以下の線形方程式：

$$L_n^i V_n^{i(k)} = -X_n^{i(k)} - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i \quad (36)$$

を解き、最適値関数  $V_n^{i(k)}$  を求める。この方程式 (36) は、前節で述べた変数変換式 (29) そのものである。

次に、こうして得られた  $\{V_n^{i(k)}, \forall n \in N_c\}$  を以下の式に代入することで写像の各要素  $G_n^{i(k)}$  が求められる。

$$G_n^{i(k)} := \min \left[ \min_{m \in O_c(n)} \{V_n^{i(k)} - V_m^{i(k)} - 1C_{n,m}\}, \min_{m' \in \hat{O}_c(n)} \{V_n^{i(k)} - V_{m'}^i - 1C_{n,m'}\} \right], \quad \forall n \in N_c. \quad (37)$$

本来、問題 [NCP<sup>i</sup>-c] の写像 (31) は逆行列  $L_n^{i-1}$  を含むため、これをナイーブに直接計算する方法では、 $J^2$  のオーダーの計算量が必要となることに注意されたい。しかし、上述したように、写像  $G_n^{i(n)}$  を求める際に必要となるのは、線形方程式 (36) の解のみである。特に、Crank-Nicolson 法などの一般的な差分スキームを用いる場合、線形方程式 (36) を解く問題は、常微分方程式の差分法とほぼ同形の問題に帰着する。さらに、時刻  $i$  の  $k$  回目の繰り返し計算において、線形方程式 (36) は最小閉路上の各アクティビティについて一度だけ解けば良い。従って、問題 [NCP<sup>i</sup>-c] の写像  $G_c^i(X_c^{i(k)})$  は、 $J$  のオーダーというわずかな計算量で評価でき、アルゴリズム [Alg-Merit] は極めて効率的なアプローチとなる。

(6) 全体アルゴリズムのまとめ

以上の議論より，離散化表現された複合オプション評価問題 [VIP] の解法は以下のようにまとめられる．

```
[Alg-Option Graph]
(終端条件)
for all  $n \in N$  do
   $V_n^I := \max. [F_n, \max_{m \in O(n)} \{V_m^I - 1C_{n,m}\}]$ ;
end for
(時刻についての逆向き帰納法)
for  $i := I - 1$  to 0 step  $-1$  do
  (初期化)
  for all  $n' \in N^E$  do
    差分方程式 (28) を解いて  $V_{n'}^i$  を求める;
  end for
   $A(n) := |O(n)|$  for all  $n \in N$ ;
   $B(u) := |O(u)|$  for all  $c \in C$ ;
   $\hat{N} := N^E$ 
  (グラフ構造ごとに分解された問題の求解)
  while  $\hat{N} \neq \emptyset$  do
     $\hat{N}$  の先頭要素を  $n$  とし,  $n$  を  $\hat{N}$  から取り除く;
    for all  $m \in I(n)$  do
       $A(m) := A(m) - 1$ 
      if  $A(m) = 0$  then
        [Alg-Merit] を用いて問題 [LCPi-m] を
        解き,  $V_m^i$  を求める;
         $m$  を  $\hat{N}$  の末尾に挿入する;
      end if
    end for
    for all  $c \in I_C(n)$  do
       $B(c) := B(c) - 1$ 
      if  $B(c) = 0$  then
        [Alg-Merit] を用いて問題 [NCPi-c] を
        解き,  $V_c^i$  を求める;
         $N_c$  内の全要素を  $\hat{N}$  の末尾に挿入する;
      end if
    end for
  end while
end for
```

続く第7, 8章では，それぞれ，本提案手法の判りやすい適用例を示し，上述のアルゴリズムが適切に動作することを確認する．

7. 数値計算例 (1)：施設の遊休化・解体が可能な不動産運用事業

本章で想定する複合オプション例は，不確実に変動する施設需要に応じて，当該施設の遊休化もしくは解

体が可能な不動産施設運用事業である．以下ではこのプロジェクトについて想定する状況を示し，前章の解法によって求めたオプション価値および最適戦略を示す．

(1) 想定する状況とオプション構造

本章で対象とするプロジェクトは，以下の3つのアクティビティから構成されるとする：まず，施設の賃貸が行われている施設運用アクティビティ(A)；次に，施設が遊休化され，運用再開に備えて維持管理のみが行われている施設遊休アクティビティ(S)；最後に，施設が解体され，一切のキャッシュ・フローが発生しない更地アクティビティ(Q)．このプロジェクトの意思決定構造を，図-7に示す有向グラフで表現する．すなわち，施設運用アクティビティからは，施設遊休もしくは更地のいずれかに推移できるとし，施設遊休および更地アクティビティからは，施設運用にのみ推移可能であるとする．

事業主体は時々刻々変動する施設需要  $P(t)$  に応じてこれらのアクティビティを変更するものとする．以下では，各アクティビティから発生するキャッシュ・フローについて述べる．まず，施設運用状態(A)からは，毎時刻，施設需要に応じた  $\pi_A(t, P)$  だけの利潤フローが発生する．次に，施設遊休状態(S)からは，賃貸は行われず，運用再開に備えた遊休施設の維持費用のみが発生する．最後に，更地状態(Q)からは，一切の利潤フローが発生しないとする．

本節では，判りやすい数値計算例を示すため，上述の枠組に加え，以下の仮定をおく．まず，いかなるアクティビティにおいても，施設需要  $P(t)$  が以下の幾何Brown運動に従うと仮定する．

$$dP(t)/P(t) = \alpha dt + \sigma dZ(t), P(0) = P_0. \quad (38)$$

ここで， $\alpha, \sigma$  は所与の定数である．次に，施設運用状態Aおよび施設遊休状態Sから発生するキャッシュ・フローが，それぞれ，以下の式で表されるとする．

$$\pi_A(t, P) = P - E, \quad \pi_S(t, P) = -M. \quad (39)$$

ここで， $E, M$  は，いずれも所与の定数であり，それぞれ，施設運用に毎時刻必要な管理費用，および施設遊休中の単位時間あたりの維持費用を表す．

このような状況を想定した上で，以下のパラメタの下で数値計算を行った．まず，計画満期，割引率，施設需要のドリフトおよびボラティリティとして，

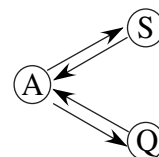


図-7 施設運用・施設遊休・更地の複合オプション

$$T = 20, \quad r = 5\%, \quad \alpha = 1\%, \quad \sigma = 20\% \quad (40)$$

を用いた。次に、施設運用および施設遊休状態における毎時刻あたりの運用・維持管理費用として

$$E = 1, \quad M = 0.05 \quad (41)$$

を採用した。最後に、各アクティビティ間の推移費用として、以下の値を用いた。

$$C_{A,S} = 0 \quad C_{S,A} = 1.0, \quad C_{A,Q} = 0.2, \quad C_{Q,A} = 5.0 \quad (42)$$

続く(2)(3)では、これらのパラメタを採用したときの、各アクティビティの価値および最適意思決定戦略を示す。

なお、上述した複合オプション例は、対象期間を無限とし、各アクティビティを適切に読み替えれば、Dixit and Pindyck<sup>17)</sup>が扱った“参入、撤退、一時停止”オプションと見なすこともできる。以下では、この古典的手法と本提案手法による結果の対比も行う。

## (2) アクティビティの価値

式(40)~(42)のパラメタの下で得られた各アクティビティの価値を、図-8~10に示す。これらの図は、横軸に初期時刻  $t = 0$  での施設需要  $P(0) = P_0$  をとり、縦軸に当該時刻のアクティビティ価値  $V_n(0, P_0)$  を、 $n = A, S, Q$  について、それぞれプロットしたものである。

まず、図-8において、太い実線  $V_A$  は施設運用アクティビティの価値を表し、細い実線  $V_{A,S}^* \equiv V_S - C_{A,S}$  および点線  $V_{A,Q}^* \equiv V_Q - C_{A,Q}$  は、それぞれ、施設遊休状態および更地状態へ推移したときの純価値 (i.e. 推移先価値から推移費用を引いたもの) を表す。この図において、施設運用アクティビティの価値  $V_A$  は、各推移先の純価値の包絡線と同じかそれよりも上側を通る曲線として表される。そして、 $V_A$  が  $V_{A,S}^*$  と一致している範囲  $[P_W, P_M]$  では施設遊休化が、 $V_A$  が  $V_{A,Q}^*$  に接している範囲  $[0, P_Q]$  では施設の解体 (更地状態への推移) が行われることを意味している。また、これらの境界において、各アクティビティの価値が smooth pasting 条件および value matching 条件<sup>1)</sup>を満たしていることが判る。

ここで、図-8の範囲  $[P_Q, P_W]$  においては、意思決定を遅延することのオプション価値  $V_A$  が、アクティビティ変更により得られる純価値  $V_{A,S}^*, V_{A,Q}^*$  よりも大きい。すなわち、 $P < E$  ゆえ負の利潤が発生するにも関わらず、施設の運用が継続される。このことは、事業主体が、 $[P_Q, P_W]$  において以下の行動をとることを意味している：たとえ一時的に利潤が負となっても、今後の需要の変化に備えて当該施設の遊休化および解体のいずれが有利となるかが判明するまで待つことを選ぶ。このような“分岐待ち”行動<sup>25)</sup>は、無限満期モデルを用いた従来型の分析では導かれない。

次に、図-9, 10において、太い実線  $V_S, V_Q$  は施設遊

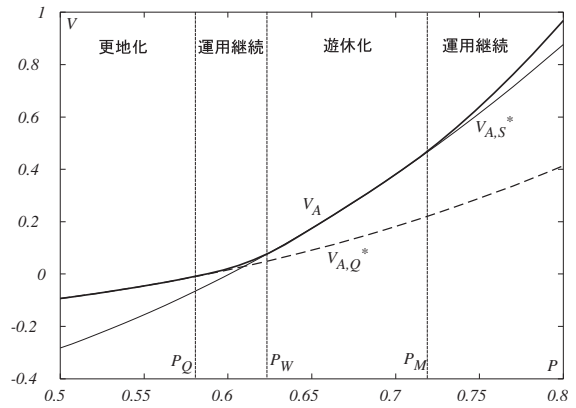


図-8 初期施設需要  $P_0$  と施設運用状態 A の価値

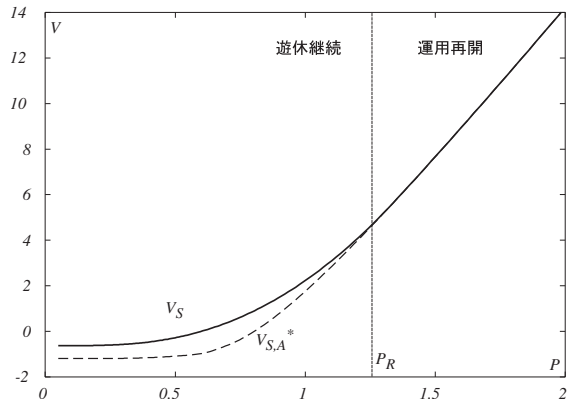


図-9 初期施設需要  $P_0$  と施設遊休状態 S の価値

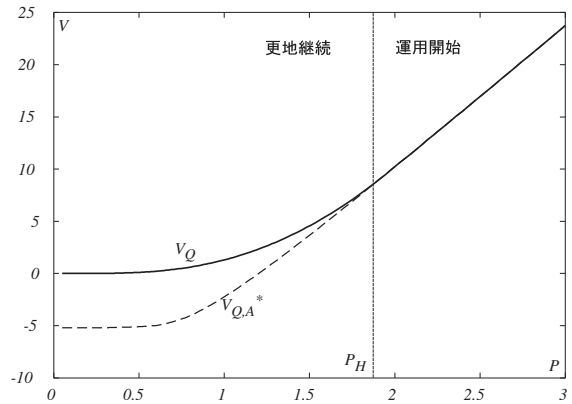


図-10 初期施設需要  $P_0$  と更地状態 Q の価値

休および更地アクティビティの価値を表し、点線は、それぞれ、 $V_{S,A}^* \equiv V_A - C_{S,A}, V_{Q,A}^* \equiv V_A - C_{Q,A}$  を表す。いずれの図からも、初期施設需要が高い領域で施設運用状態への推移が行われ、その境界でアクティビティ価値が value matching 条件および smooth pasting 条件を満たすことが判る。

## (3) 最適推移ルール

図-11~13は、それぞれ、各アクティビティについて、横軸に時刻  $t$  を、縦軸に施設需要  $P$  を取り、各状況  $(t, P) \in \mathcal{K}$  ごとの最適推移先アクティビティ  $m_n^*(t, P)$  を示したものである。この図は、時間と施設需要からな

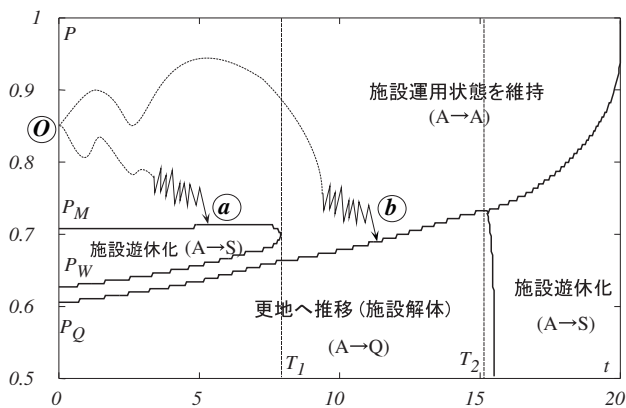


図-11 施設運用状態 A での最適戦略区分

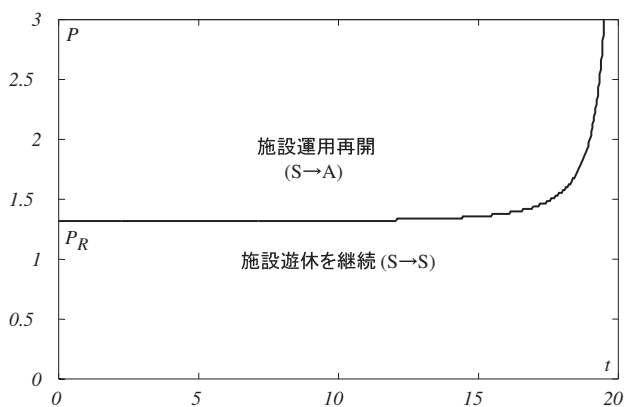


図-12 施設遊休状態 S での最適戦略区分

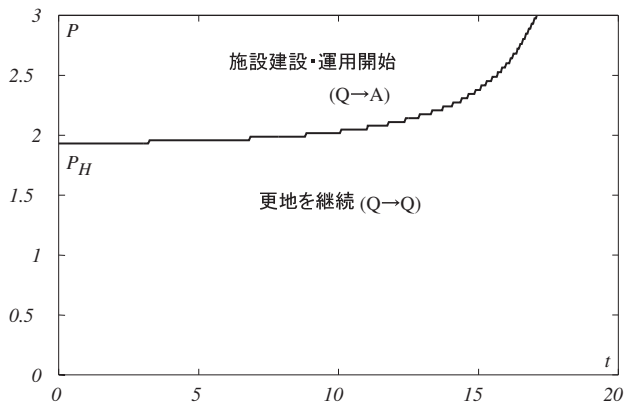


図-13 更地状態 Q での最適戦略区分

る空間  $\{(t, P) \in \mathcal{K}\}$  が、当該状況における最適推移先アクティビティによっていくつかの領域に分割されることを示している。そして、各図の曲線は、この領域の境界 (i.e. 最適推移先が切り替わる境界) を示している。

まず、図-11 は、運用アクティビティ A からの 3 種類の最適推移戦略  $A \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow S$  および  $A \rightarrow Q$  に応じて分類された領域の境界を示している。この図より、A が選択されているときの最適推移ルールを読み取ることができる。例えば、時刻  $t = 0$  で A が選択されており、点㉓から点㉔へと施設需要が変化した場合の最適戦略は以下のように導出される：まず、点㉓での最適

推移戦略は  $A \rightarrow A$  であるため、施設の運用が継続される。そして、施設需要が点㉔まで落ち込み、最適推移戦略が  $A \rightarrow S$  に切り替わると同時に施設は遊休化される。一方、施設需要が点㉓から点㉔への過程を辿った場合、需要が㉔に到達した時点で施設は解体され、更地アクティビティ Q への推移が行われる。こうして施設遊休化あるいは解体された後の最適戦略も、同様に、各アクティビティごとの図-12, 13 を用いて決定できる。以下では、このように空間  $\{(t, P)\}$  を最適な推移先アクティビティで分割したものを、“最適戦略区分”と呼ぶ。

施設運用アクティビティの最適戦略区分図-11 より、A からの最適推移ルールは、以下の 3 つの期間に分類されることが判る。第 1 の期間  $t \in [0, T_1]$  では、施設需要が十分に大きければ施設運用を継続し、需要が極端に小さければ更地状態へと推移する。その中間では、施設遊休化あるいは“分岐待ち”が行われる。第 2 の期間  $t \in [T_1, T_2]$  では、施設の運用を継続するか、施設を解体するという極端な意思決定が行われる。これは、満期までの時間が短くなるにつれ、施設の遊休化による運用費用の節約効果が小さくなるためである。最後の期間  $t \in [T_2, T]$  では、施設運用継続あるいは施設遊休化のみが選択される。満期までの遊休施設の維持費用の方が、施設解体に必要なサンク・コストよりも小さいことを反映している。

次に、図-12, 13 に、それぞれ、施設遊休状態 S および更地状態 Q での最適戦略区分を示す。これらの図より、以下の 2 つの事が判る。まず、いずれのアクティビティからも、施設需要が高いときには施設運用が再開され、需要が低いときには当該アクティビティが維持されることが判る。次に、施設運用再開の閾値が時間の経過と共に増加することが判る。これは、満期までの時間が短くなるにつれ、施設運用再開後の総利潤が施設運用再開に必要な費用をカバーできなくなることを反映している。

## 8. 数値計算例 (2)：段階的供用が可能なプロジェクトの事前・再評価

本章では、もう一つの複合オプション例として、2 区間にまたがる有料道路の新規建設・運用事業において、事業主体に以下の行動が許可されている場合を想定する：a) 1 区間ずつ段階的に建設するか、2 区間同時に一括建設するかが選択できる；b) 建設を開始する前に、事業主体が事前評価、計画の凍結、および再評価を行える。この複合オプションは、織田澤・小林<sup>23)</sup>によるプロジェクトの事前・再評価モデルを、段階的供用が可能な枠組へと拡張したものと位置づけることもできる。以下では、前章と同様に想定する状況を述べ、第 6 章

の数値解法を適用して得られた最適推移戦略ルールを示す。

### (1) 想定する状況とオプション構造

まず、対象とするプロジェクトが5つのアクティビティ：事前評価(O)、計画凍結(S)、再評価(R)、1区間供用(P)、2区間供用(F)から構成されるとし、その意思決定構造が図-14で表されるとする。なお、図-14の各リンク上の数値は、該当するアクティビティ変更に伴うサンク・コストを表す。次に、各アクティビティから発生するキャッシュ・フローは、当該路線の交通需要<sup>1</sup>に依存して決定されるとし、時刻 $t$ における交通量 $P(t)$ が式(38)の幾何Brown運動に従うと仮定する。以下では、各アクティビティおよびそこから発生するキャッシュ・フローについて述べる。

**事前評価状態(O)** 事業計画の初期段階において、時々刻々(潜在的)交通量を予測しながら、事業評価を行い、事業の採択あるいは計画凍結の選択を待っている状態に相当する。ここで、事前評価を継続するには、単位時間あたり $M_O$ だけの費用が必要である(i.e.  $\pi_O(t, P) = -M_O$ )とする。また、事前評価状態からは1区間ずつの段階的建設のみが可能であると仮定する。すなわち、このアクティビティOからは、SもしくはPにのみ推移可能であるとする。

**計画凍結状態(S)** 当該事業が一時的に凍結された状態に相当する。このアクティビティでは、事業評価に必要な費用さえも発生しないため、利潤フローは $\pi_S(t, P) = 0$ である。このアクティビティSからは、再評価Rにのみ推移可能であるとする。

**再評価状態(R)** 事前評価と同じく、時々刻々予測される交通量に基づき、事業の再評価が行われる状態に相当する。この再評価に必要な単位時間あたりの費用を $M_R$ とする(i.e.  $\pi_R(t, P) = -M_R$ )。ただし、事前評価状態とは異なり、再評価の段階では技術革新などの理由から、当該事業の2区間一括建設が可能であるとする。従って、Rからは、S、PおよびFのいずれかに推移可能であるとする。

**1区間供用状態(P)** 候補路線の内、1区間が建設・供用されている状態に相当する。このアクティビティが

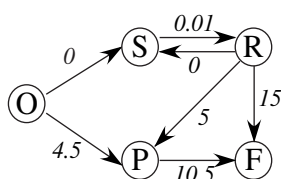


図-14 段階的建設が可能プロジェクトの意思決定構造

<sup>1</sup> 供用が開始される前は、何らかの方法で推定された潜在的交通需要を用いるとする

らは、毎時刻、交通量 $P(t)$ に応じた料金収入から、当該路線の維持管理費用 $E_P$ を引いただけの利潤フローが発生する(i.e.  $\pi_P(t, P) = X_P P - E_P$ )。ここで、 $X_P, E_P$ は所与の定数とする。Pからは、拡張工事によりFにのみ推移できる。

**2区間供用状態(F)** 2区間の有料道路が全て供用されている状態に相当する。このアクティビティからは、毎時刻、2区間分の料金収入から、当該路線の維持管理費用 $E_F$ を引いただけの利潤フローが発生するとする(i.e.  $\pi_F(t, P) = X_F P - E_F$ )。ここで、 $X_F, E_F$ は所与の定数である。Fはこのプロジェクト唯一の終端アクティビティである。

上述の枠組の下で、最適推移戦略を求めた結果を以下に示す。その数値計算例に用いたパラメタは以下の通りである：まず、計画満期、割引率、交通需要のドリフトおよびボラティリティとして、

$$T = 20, \quad r = 5\%, \quad \alpha = 1\%, \quad \sigma = 40\%, \quad (43)$$

を用いた。次に、事前評価状態Oおよび再評価状態Rにおける単位時間あたりの評価費用を、それぞれ、

$$M_O = 0.02, \quad M_R = 0.01, \quad (44)$$

とした。また、1区間供用状態Pおよび2区間供用状態Fにおける利潤フローのパラメタとして、以下の値を用いた：

$$X_P = 0.5, \quad E_P = 0.6, \quad X_F = 1, \quad E_F = 1. \quad (45)$$

最後に、各アクティビティ間の推移費用として、図-14の各推移リンク上の数値を採用した。

### (2) 最適推移ルール

図-15~20に、アクティビティO,R,SおよびPの最適戦略区分を示す。これらの図は、いずれも、横軸に時刻、縦軸に交通量をとって、各アクティビティからの意思決定が切り替わる境界をプロットしたものである。まず、図-15は、事前評価状態Oでの最適戦略区分を表したものである。この図より、以下の2点が判る：第1に、(潜在的)交通需要が十分に高い場合には $O \rightarrow P$ 、低い場合には $O \rightarrow S$ 、その中間では $O \rightarrow O$ が選択される。これは直感的にも明らかである。第2に、満期 $T$ が近づくにつれ、各最適戦略区分の境界が上昇し、 $O \rightarrow S$ が大きくなっている。これは、料金収入期間が短くなるにつれ、意思決定を遅延させることよりも、計画凍結によって評価費用を節約することの方が、高い価値をもたらすことを反映している。

次に、再評価状態Rでの最適戦略区分を示したものが図-16である。この図より、再評価状態からの1区間建設 $R \rightarrow P$ は、満期までの時間がある程度短い期間でのみ行われることが判る。これは、建設費用の償還期間

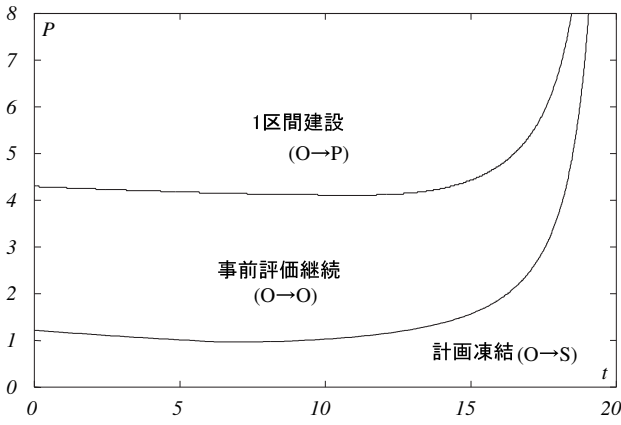


図-15 事前評価状態 O での最適戦略区分

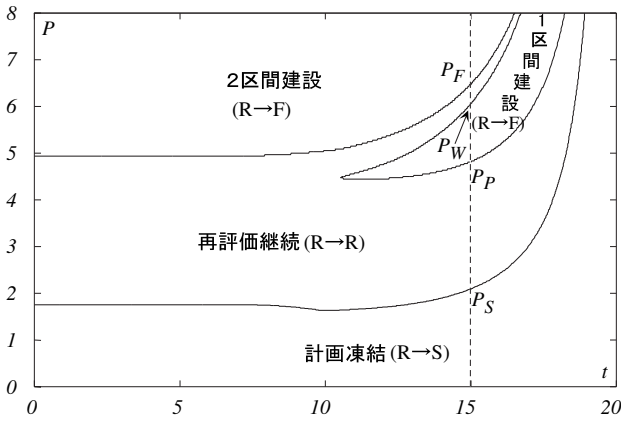


図-16 再評価状態 R での最適戦略区分

が十分に長い場合には、より高い料金収入をもたらす一括供用のみが選ばれ、償還期間が短い場合には、少しでも安い建設費用で料金を得られる段階供用が選ばれることを意味している。

この再評価状態を例に用いて、最適戦略区分とアクティビティの価値との関係を示そう。図-17は、横軸に時点  $t = 15$  での交通需要  $P(15)$ 、縦軸にアクティビティの価値  $V_n(15, P(15))$  をプロットしたものであり、その丸で囲まれた部分を拡大したものが図-18である。この図において、太い実線は再評価アクティビティの価値  $V_R$  を表し、細い実線は、それぞれ、1区間あるいは2区間の供用を開始したときの純価値  $V_{R,P}^* \equiv V_P - C_{R,P}$ 、 $V_{R,F}^* \equiv V_F - C_{R,F}$  を表す。また、図-18における点線は、計画凍結を再開する場合の純価値  $V_{R,S}^* \equiv V_S - C_{R,S}$  を表す。この図-17において、再評価状態の価値  $V_R$  は、各推移先アクティビティの純価値  $V_{R,m}$  の包絡線と同じかそれよりも上側の曲線として表される。そして、再評価状態の価値が、各アクティビティへの純推移価値に value matching および smooth pasting する交通需要の値  $P_S, P_P, P_W, P_F$  は、それぞれ、最適戦略区分図-16において、時刻  $t = 15$  の点線上の点と同じものを示す。例えば、図-16において、1区間建設  $R \rightarrow P$  が最適戦略となる交通需要の範

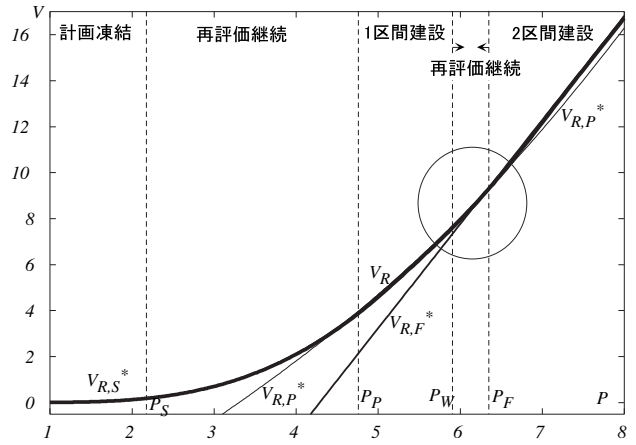


図-17  $t = 15$  での交通需要  $P_{15}$  と再評価状態 R の価値

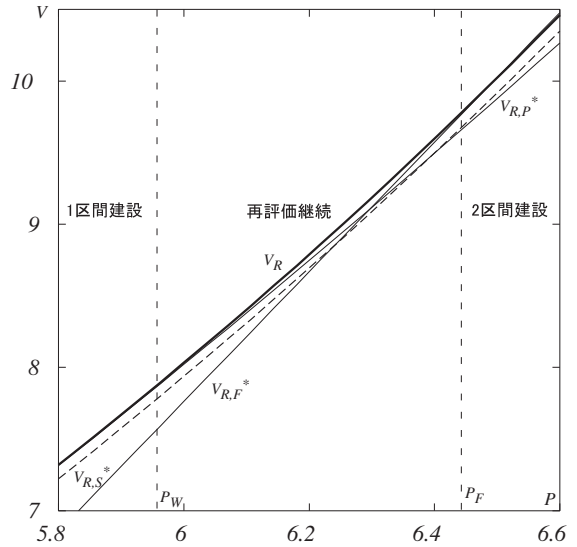


図-18 図-17 の拡大図

囲  $[P_P, P_W]$  では、図-17における再評価 R の価値  $V_R$  が 1区間供用の純価値  $V_{R,P}^*$  に接していることが判る。ここでは時刻  $t = 15$  における例のみを示したが、本数値計算により、任意の時刻において、上述したアクティビティの価値と最適戦略区分の関係が成立していることが判っている。

図-19は、計画凍結 S での最適戦略区分を示したものである。この図より、満期が近づくほど  $S \rightarrow R$  の閾値が上昇することが判る。これは、料金徴収期間が短くなることにより、高い交通量による確実な収益が見込まれない限り  $S \rightarrow R$  が行われなことを意味している。

最後に、1区間供用 P での最適戦略区分が図-20に示される。この図より、満期に近い時点では、拡張投資費用をカバーするだけの料金収入増加が見込めなくなるため、2区間道路への拡張が行われなことが判る。



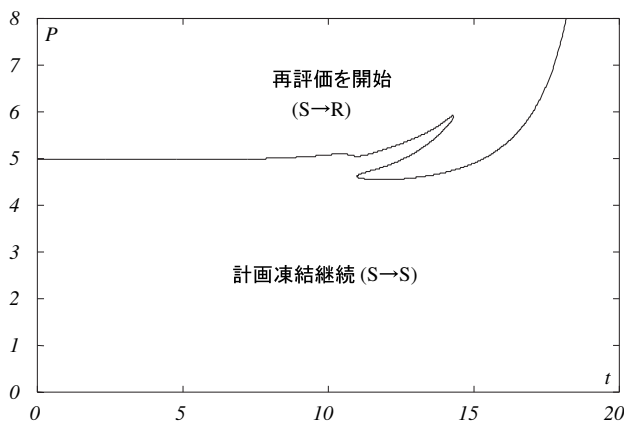


図-19 計画凍結状態 S での最適戦略区分

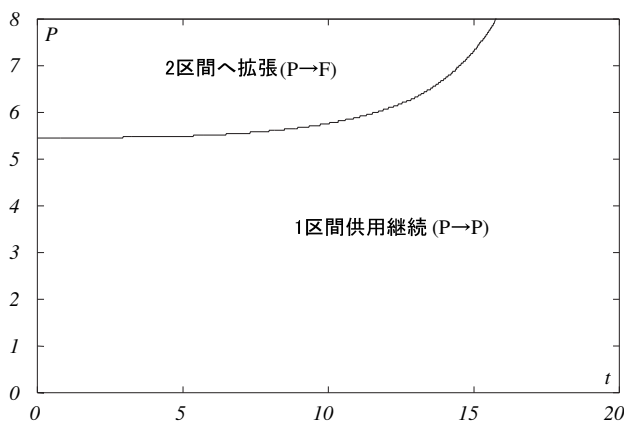


図-20 1区間供用状態 F での最適戦略区分

## 9. おわりに

本研究では、複雑な連鎖的意思決定構造をもつ社会基盤整備プロジェクトを複合リアル・オプションと見なし、その評価および意思決定問題のシステムティックな記述・分析および見通しの良い数値解法開発のための枠組を提案した。第1に、様々な社会基盤整備プロジェクトが持つ意思決定構造をオプション・グラフとして統一的に記述する枠組を提案し、その枠組の下で複合リアル・オプション問題を定式化した。第2に、この問題が時間およびグラフ構造のそれぞれについて分解できることを明らかにした。より具体的には、まず、この問題を時間について分解することで、各瞬間における最適性条件が変分不等式問題 (VIP) として表現できることを示した。次に、各瞬間で成立するVIPが、オプション・グラフを構成する部分構造ごとのVIPに分解できることを示した。第3に、こうして時間と部分構造ごとに分解されたVIPが、適切な関数変換によって、数理計画分野において良く知られる標準形の非線形相補性問題 (NCP) に帰着することを明らかにした。最後に、これらの分析結果に基づき、相補性問題の解法に関する最新の知見を活用した、一般性のある効率的ア

ルゴリズムを開発した。

本文では述べなかったが、本手法を現実のプロジェクトに適用するには、状態変数が従う確率過程 (e.g. 第7章における式 (38))、利潤関数  $\pi(t, P)$  や終端ペイ・オフ  $F(P)$  などを、個々の問題ごとに特定化する必要がある。従来、こうした確率過程の同定や時系列データの分析手法に関しては、マクロ計量経済学や金融工学の分野において研究が蓄積されてきた。しかし、社会基盤整備プロジェクトを対象としたデータの観測・収集・蓄積・分析のための方法論が確立しているとは言い難く、今後の実証的研究の発展が待たれる。

この点に注意すれば、本手法は、従来の金融/リアル・オプション研究で扱えなかったものを含む、多くの一般的な状況に適用可能である。まず、本手法は、状態変数プロセス  $P(t)$  が、式 (1) に示すような、任意の一般的な確率過程に従う状況を取り扱える。次に、式 (1) はまた、状態変数プロセスがアクティビティごとに異なる場合にも適用できることを意味している。また、本手法は、理論的には、任意次元の状態変数を取り扱うことが可能である (ただし、高次元の場合には大規模な数値計算が必要となるため、何らかの工夫が必要である)。最後に、本研究で採用したアプローチは、投資タイミング以外の選択が可能モデルへも適用可能である。例えば、投資のタイミングと同時にその規模を選択できるモデル (例えば、Pindyck<sup>27)</sup>, Pindyck and He<sup>28)</sup>) や、投資を始めてからキャッシュ・フロー流れが変化するまでに一定の資本蓄積を必要とするモデル (例えば、Majd and Pindyck<sup>29)</sup>, Bar-Ilan et al.<sup>30)</sup>) なども、本手法に容易に組み込むことが可能である。こうした拡張の詳細やその応用例については、追って報告する予定である。

## 参考文献

- 1) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- 2) Schwartz, E. S. and Trigeorgis, L. eds.: *Real Options and Investment under Uncertainty - Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, 2001.
- 3) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 5, Princeton University Press, 1994.
- 4) McKean Jr., H.: Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics, *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp. 32-39, 1965.
- 5) Merton, R. C.: The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141-183, 1973.
- 6) Merton, R. C.: *Continuous Time Finance*, Blackwell, 1990.
- 7) Brennan, M. J. and Schwartz, E. S.: The valuation of American put options, *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 2, pp. 449-462, 1977.
- 8) Geske, R. and Johnson, H.: The American put option valued analytically, *Journal of Finance*, Vol. 39, pp. 1511-1524, 1984.

- 9) Jacka, S.: Optimal stopping and the American put, *Mathematical Finance*, Vol. 1, pp. 1–14, 1991.
- 10) Carr, P., Jarrow, R. and Myneni, R.: Alternative characterization of American puts, *Mathematical Finance*, Vol. 2, pp. 87–106, 1992.
- 11) Huang, J., Subrahmanyam, M. and Yu, G.: Pricing and hedging American options: A recursive integration method, *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 277–300, 1996.
- 12) Broadie, M. and Glasserman, P.: Pricing American-style securities using simulation, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 21, pp. 1323–1352, 1997.
- 13) Dempster, M. and Hutton, J.: Pricing American stock options by linear programming, *Mathematical Finance*, Vol. 9, pp. 229–254, 1999.
- 14) Margrabe, W.: The value of an option to exchange one asset for another, *The Journal of Finance*, Vol. 33, No. 1, pp. 177–186, 1978.
- 15) Stulz, R. M.: Options on the minimum or the maximum of two risky assets, *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, No. 2, pp. 161–185, 1982.
- 16) Dixit, A. K.: Entry and exit decisions under uncertainty, *Journal of Political Economy*, Vol. 97, pp. 620–638, 1989.
- 17) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 7, Princeton University Press, 1994.
- 18) Geske, R.: The valuation of compound options, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1235–1256, 1979.
- 19) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 10, Princeton University Press, 1994.
- 20) Trigeorgis, L.: A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26, pp. 309–326, 1991.
- 21) Trigeorgis, L.: The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 1–20, 1993.
- 22) Kulatilaka, N.: The value of flexibility: A general model of real options, in Trigeorgis, L. ed., *Real Options in Capital Investment*, Praeger, 1995.
- 23) 織田澤利守, 小林潔司: プロジェクトの事前評価と再評価, 土木学会論文集, No. 737/IV-60, pp. 189–202, 2003.
- 24) 織田澤利守, 小林潔司, 松田明広: 評価費用を考慮したプロジェクトの事前・再評価問題, 土木学会論文集, No. 751/IV-62, pp. 97–110, 2004.
- 25) 赤松隆, 長江剛志: 不確実性下での社会基盤投資・運用問題に対する変分不等式アプローチ, 土木学会論文集, No. 765/IV-64, pp. 155–171, 2004.
- 26) Fukushima, M.: Equivalent differentiable optimization problem and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Mathematical Programming*, Vol. 53, pp. 99–110, 1992.
- 27) Pindyck, R. S.: Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm, *American Economic Review*, Vol. 78, No. 5, pp. 969–985, 1988.
- 28) He, H. and Pindyck, R. S.: Investments in flexible production capacity, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 16, pp. 575–599, 1992.
- 29) Majd, S. and Pindyck, R. S.: Time to build, option value, and investment decisions, *Journal of Financial Economics*, Vol. 18, pp. 7–17, 1987.
- 30) Bar-Ilan, A., Sulem, A. and Zanello, A.: Time-to-build and capacity choice, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 26, pp. 69–98, 2002.
- 31) Luenberger, D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, NY, 1998.

(2003.11.26 受付)

## A STOCHASTIC CONTROL MODEL OF INFRASTRUCTURE PROJECT DECISIONS REPRESENTED AS A GRAPH STRUCTURE

Takeshi NAGAE and Takashi AKAMATSU

Infrastructure projects often involve multiple activities and interrelated decisions to switch between activities under uncertainty. This article provides a novel quantitative approach for evaluating such complex projects as a set of real options. In our framework, an infrastructure project is represented as a directed graph where the nodes correspond to economic activities in the project and the links denote options to switch between activities. We first show that evaluating a project in this framework is formulated as a variational inequality problem. It is then proved that the problem can be decomposed into solving a series of tractable complementarity problems in a successive manner. This graph-theoretic decomposition scheme enable us to develop an efficient numerical algorithm for solving the project evaluation problems with any graph structure.