

リアルタイム観測情報を活用した動的なシステム最適交通配分: 確率制御アプローチ

長江 剛志¹・赤松 隆²

¹正会員 博士(情報科学) 神戸大学大学院 自然科学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

²正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

本研究では、交通状況の動的な不確実性を明示的に考慮した上で、リアルタイム観測情報を活用した動的ランプ制御ルールを導き、その特性およびメカニズムを明らかにする。具体的には、まず、従来の2リンク・ネットワークを対象とした動的システム最適交通配分モデルを、旅行時間が不確実に変動する枠組へと一般化し、確率制御問題として定式化する。こうして定式化された問題の最適性条件を、数理計画分野で知られる一般化線形相補性問題として再定式化する。この分析結果を活用して、最適制御ルールおよびネットワーク全体の効率性を評価する効率的数値解法を開発する。最後に、数値解析を通じて、最適制御ルールおよびリアルタイム観測情報の価値の特性を明らかにする。

Key Words : dynamic system optimal traffic assignment, ramp metering, stochastic control, generalized complementarity problem

1. はじめに

近年の情報技術の進展は、時々刻々変動する交通状況のリアルタイム観測を可能とした。そして、このリアルタイム観測情報を動的ランプ制御に活用することで、高速道路の混雑を改善するのみならず、一般道路(バイパス道路)も含めたネットワーク全体の効率性を改善し得ることが期待できる。こうした動的ランプ制御におけるリアルタイム観測情報の活用は、本質的に、交通状況(e.g. 自由旅行時間)が、時々刻々、確率動的に変動するような場合でのみ意味を持つ。なぜなら、交通状況が確定的なダイナミクスに従うと仮定する場合、モデルから導かれる状況と観測される状況は常に一致すると見なされるため、交通状況を観測する(および、観測情報をランプ制御にフィードバックさせる)必要がないためである。そこで、本研究では、交通状況の動的な不確実性を考慮した上で、リアルタイム観測情報を活用した動的ランプ制御問題に対する新しいアプローチを提案する。

高速道路のランプ制御によってネットワーク全体の効率性を最大化させる問題は、一般化された枠組の下では、動的システム最適(DSO: *Dynamic System Optimization*)配分問題として扱うことができる。こうしたDSO配分問題に関しては、近年、いくつかの研究が存在するが、いずれも、交通状況の動的な不確実性を考慮した枠組へ拡張することは困難である。その上、後述するように、DSO配分問題の数理的性質については、確定的な枠組の下でさえ、それほど多くが明らかにされている

わけではない。その理由として、以下の2つが挙げられよう: 第1に、DSO配分問題を対象とした従来研究の中には、交通工学的に不適切なモデリングが行なわれているものが散見される。Friezら¹⁾は、確定的な枠組の下で、一般的な構造のネットワークを対象としたDSO配分問題を記述・分析した。しかし、このモデルでは、各リンクの流出交通フローを“exit function”という関数で表現しており、交通フローが本来満たすべきFIFO(First-In-First-Out)条件が成立しないという問題を残している。Ziliaskopoulos²⁾は交通フローの進展をセル伝播(cell transmission)モデル³⁾を用いて表現し、一起点多終点ネットワークにおけるDSO配分問題を線形計画問題として定式化する枠組を提案した。しかし、この枠組では、セル伝播モデルと線形計画問題の整合性を保つために、管理者が、いつでも、全ての車両の位置を任意に操作できる(i.e. 道路上で車両を突然止めることも可能である)ことを仮定する必要がある。この仮定は、実行可能性の観点からは妥当であるとは言いがたく、それ故に、このモデルを用いたDSO配分問題の記述には疑問が残る。DSO配分モデルの数理的特性が明らかにされていない第2の理由は、一般ネットワークを対象としたDSO配分問題が非凸性を持つためである。このことは、たとえFIFO原則を満足した適切なDSO配分モデルを構築できたとしても、モデルの数理的特性の分析や定量的手法の開発には困難さがつきまとうことを意味している。その詳細については、Lovell and Daganzo⁴⁾およびEreraら⁵⁾を参照されたい。

この2つの理由から、DSO配分モデルの数理的特性を明らかにしようとするという文脈においては、一般ネットワークを対象としたモデルを記述・分析するアプローチは有益とはいえない。こうした背景に鑑み、最近では、桑原ら⁶⁾および Muñoz and Laval⁷⁾は、本研究で用いるような、2本の平行・リンクのみで構成されるシンプルなネットワークを用いて、最適ランプ制御モデルの特性を分析した。より具体的には、動的限界費用の概念に基づいた図式的解法を提案し、確定的なDSO配分モデルの定性的性質を示した。しかし、この図式的アプローチは、旅行時間の動学的不確実性を考慮した枠組に拡張することが極めて困難である。

本研究の目的は、2リンク・ネットワークを対象として、旅行時間が確率動的に変動する場合の最適ランプ制御ルールを導き、その特性およびメカニズムを明らかにすることである。その上で、ランプ制御にリアルタイム観測情報を活用することで改善されるネットワーク全体の効率性 (i.e. リアルタイム観測情報の価値) を評価する。具体的には、まず、従来のDSO配分問題^{6),7)}を動的な不確実性を考慮した枠組へと一般化し、確率制御問題として定式化する。そして、その最適性条件を、数理計画問題で知られる一般化相補性問題として記述する。これにより、確率的DSO配分問題の解——最適ランプ制御ルールおよびネットワークの効率性——を効率的に計算するための数値解法を開発できる。最後に、提案モデルに対する数値解析を行なって最適制御ルールの特性およびリアルタイム観測情報の価値を明らかにする。

本稿は以下のように構成される。まず、第2章でモデルの定式化を行なう。第3章では、この問題の最適性条件が一般化相補性問題として記述できることを明らかにし、それを活用した数値計算方法について述べる。第4章および第5章では、本手法の利用方法および特徴を判りやすく説明するために数値計算例を示す：まず第4章では、本手法によって導かれる制御ルールの具体的な利用方法と制御例を示す。続く第5章では、本稿で提案するリアルタイム制御と従来の他の制御やレッセフェール (laissez-faire) との間で効率性を比較する。第6章はまとめである。

なお、本稿では、 n 次元の実数空間、非負実数空間および正の実数空間を、それぞれ、 \mathcal{R}^n , \mathcal{R}_+^n および \mathcal{R}_{++}^n で表わす。ただし、記述の簡便化のため、 $n = 1$ の場合には、それぞれ、 \mathcal{R} , \mathcal{R}_+ および \mathcal{R}_{++} と表現する。

2. モデルの定式化

本章では、リアルタイム観測情報を用いた高速道路の動的ランプ制御問題を定式化する。まず、(1)節でモ

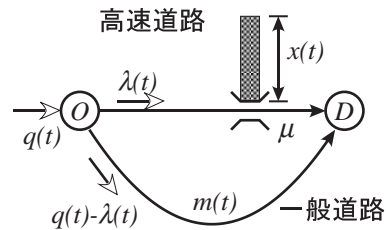


図-1 対象とするネットワーク

デルの枠組を示し、続く(2)節および(3)節では、それぞれ、状態変数の時間進展を記述する。最後に、(4)節では、これらの遷移方程式を制約条件とした確率制御問題として動的ランプ制御問題を定式化する。

(1) モデルの枠組

1つの起終点ペアと2つのリンクから構成される図1のようなネットワークを考え、一方のリンクを高速道路、もう一本のリンクを(集約化された)一般道路とする。

ある計画時間 $[0, T]$ を考え、時刻 $t \in [0, T]$ の単位時間当りのOD間交通需要(以下、単に交通需要)を時間に関する所与の関数 $q(t)$ で表現する。管理者は、任意の時刻 t において、この交通需要の内、任意の数の利用者のみを高速道路に流し、残りを一般道路に流すようなランプ制御を行なえとする。より具体的には、時刻 t に高速道路に流入させる単位時間あたりの利用者数(以下、高速道路への誘導フロー)を $\lambda(t)$ とするとき、これを $0 \leq \lambda(t) \leq q(t)$ の範囲で自由に決定することができる。そして、残りの $q(t) - \lambda(t)$ だけの交通需要を、全て一般道路に流入させられる¹⁾。

本稿では、モデルの性質およびメカニズムを判りやすく示すため、高速道路および一般道路に対して、下記の対比的な仮定を置く。まず、高速道路および一般道路について、単位時間あたりの容量を、それぞれ μ_F および μ_A と記述し、時刻 t における自由旅行時間を、それぞれ、 $m_F(t)$ および $m_A(t)$ と記述しよう。そして、上述した交通需要 $q(t)$ に対して高速道路の容量は比較的小さく、ボトルネックにおいて待ち行列が発生し得るが、一般道路の容量は任意の時刻の交通需要 $q(t)$ に比べて十分に大きく、待ち行列は発生しないとする。そこで、以下では、高速道路の容量を所与の定数 $\mu_F = \mu$ で表わし、一般道路の容量を $\mu_A = \infty$ とする。次に、高速道路は一般道路に比べ、常に自由旅行時間が小さい (i.e. $m_F(t) < m_A(t), \forall t$) とする。ここで、ランプ制御によってネットワーク全体の効率性がどれだけ改善されるかを議論する際には、各リンクの自由旅行時間 $m_F(t), m_A(t)$ の差のみが重要であることに留意されたい。そこで、以

¹⁾ この仮定は、管理者が単にランプを開け閉めできるだけでなく、高速道路に流入できなかった利用者を強制的に一般道路へ向かわせられる(ランプの手前で待機させない)ことを意味している。

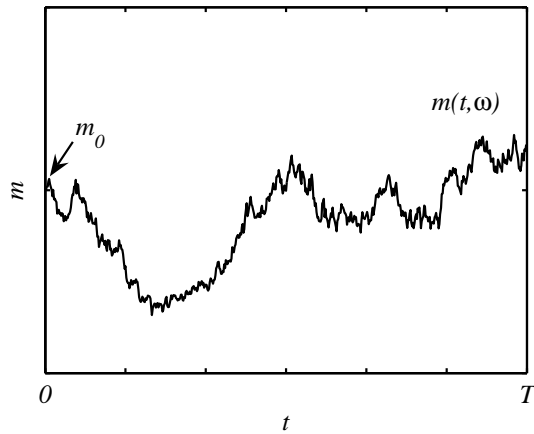


図-2 自由旅行時間 $m(t)$ のサンプルパス

下では、任意の時刻 t において、高速道路の自由旅行時間を 0 で基準化し、一般道路の(相対的な)自由旅行時間を $m(t) \equiv m_A(t) - m_F(t)$ で表現する。

(2) 高速道路の待ち行列の進展

時刻 $t \in [0, T]$ において、高速道路への誘導フローが $\lambda(t)$ であるとき、微小時間 $[t, t + dt]$ 間の待ち行列の増分を $dx(t) \equiv x(t + dt) - x(t)$ と記述すれば、待ち行列の進展は以下の式で表わされる。

$$dx(t) = \begin{cases} \{\lambda(t) - \mu\} dt & \text{if } x(t) > 0, \\ \{\lambda(t) - \mu\} dt & \text{if } x(t) = 0 \text{ and } \lambda(t) \geq \mu, \\ 0 & \text{if } x(t) = 0 \text{ and } \lambda(t) < \mu. \end{cases} \quad (1)$$

この式は、次のように説明できる：まず、時刻 t に正の待ち行列 $x(t) > 0$ が存在する場合、誘導フローが容量を超えていれば待ち行列は増加し、容量を下回れば待ち行列は減少する。次に、時刻 t に待ち行列が存在しない(i.e. $x(t) = 0$) 場合、誘導フローが容量を超えていれば待ち行列は増加するが、容量を下回る場合は待ち行列は 0 のまま変化しない。

(3) 一般道路の自由旅行時間の進展

本稿では、一般道路の自由旅行時間 $m(t)$ が図 2 のように時々刻々確率的に変動するものと仮定し、その進展を確率過程として表現する。まず、事象(標本過程)の集合を Ω 、そのフィルトレーションを \mathcal{F} とし、可測空間 (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度を \mathcal{P} とする。そして一般道路の旅行時間をこの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の確率過程 $m : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}_+$ とし、そのプロセスを以下の確率微分方程式で表現する。

$$dm(t) = \alpha[t, m(t)] dt + \sigma[t, m(t)] dW(t), \quad m(0) = m_0. \quad (2)$$

ここで、 α, σ は、いずれも時刻および旅行時間に関する所との関数であり、それぞれ、単位時間当りの旅行時

間の増分の期待値および標準偏差を表している。 $W(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される 1 次元 Wiener 過程であり、 $dW(t)$ はその微小時間 dt における増分を表わす。式 (2) の右辺の第 1 項は、 $m(t)$ の増分の内、確定的な部分を表わし、第 2 項は、確率的な部分(i.e. 一般道旅行時間の不確実性)を表している。

(4) 不確実性下での動的システム最適配分問題の定式化

管理者は、計画期間 $[0, T]$ 中のネットワーク全体の期待総旅行時間を最小化するように、リアルタイムに状態を観測しながら状況依存的(state contingent)なランプ流入制御を行う。具体的には、毎時刻 t において待ち行列 $x(t)$ 、および一般道旅行時間 $m(t)$ を観測し、それらに応じて高速道路への誘導交通フロー $\lambda(t) \in [0, q(t)]$ を決定する。すなわち、最適制御戦略は時刻 t および交通状態 x, m の関数 $\lambda(t, x, m)$ として定義される²。以下では、全ての時刻および状態の組合わせに対する制御を、制御ルールと呼び、 $\lambda \equiv \{\lambda(t, x, m) | \forall (t, x, m) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++}\}$ と記述する。これを用いて、ランプ制御問題は以下のように定式化される。

[SDSO]

$$\min_{\lambda} \mathbb{E} [\mathcal{J}(0, T, \lambda, \omega) | (0, 0, m_0)]$$

ここで、 $\mathbb{E}[\cdot | (t, x, m)]$ は、時刻 t における交通状態 $[x(t), m(t)] = (x, m)$ を与件とした条件付期待演算である。 $\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega)$ は、制御ルール λ の下で、ある事象(標本過程) $\omega \in \Omega$ が実現したときに時間 $[t, T]$ に発生する総旅行時間であり、以下の式で定義される。

$$\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega) \equiv \int_t^T f(s, x, m, \lambda) ds \quad (3)$$

ここで、 $f(\cdot)$ は、制御ルール λ の下での状態 (t, x, m) における総旅行時間の時間増加率であり、以下の式で定義される。

$$f(t, x, m, \lambda) \equiv \lambda(t, x, m) \frac{x}{\mu} + \{q(t) - \lambda(t, x, m)\} m \quad (4)$$

式 (4) の第 1 項および第 2 項は、それぞれ、有料道路および一般道路で発生する単位時間あたりの総旅行時間である。

3. 最適性条件

本章では、問題 [SDSO] の最適性条件が一般化相補性問題として記述できることを明らかにする。まず (1) 節では、[SDSO] の最適値関数を定義し、これに DP (Dynamic

² 不確実性が存在しない場合、最適制御は時刻のみに依存する(e.g. ある時刻 t_1 から t_2 までの間は容量に等しいだけの交通量を高速道路に誘導させる)。本稿では、このような(各時刻で観測される状態に依存しない)制御を、オープンループ(open-loop)制御と呼ぶ。

Programming) 原理を適用することで HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式を導く。続く (2) 節では、この HJB 方程式が制御変数について線形であることを用いて、最適ランプ流入率を bang-bang 制御として求める。(3) 節では、こうして求めた最適制御を元の HJB 方程式に代入することで、最適性条件が(無限次元の)一般化相補性問題として表現できることを示し、(4) 節では、それを活用した数値計算方法について述べる。

(1) HJB 方程式

時刻 t に交通状態が $[x(t), m(t)] = [x, m]$ と観測されたときの問題 [SDSO] の最適値関数を以下のように定義する。

$$V(t, x, m) \equiv \min_{\lambda} \mathbb{E} [\mathcal{J}(t, T, \lambda, \omega) | (t, x, m)]. \quad (5)$$

DP 原理を適用し、伊藤の補題を適用すれば、当該状態 (t, x, m) で成立する以下の HJB 方程式を得る³。

$$\min_{0 \leq \lambda(t, x, m) \leq q(t)} \left[f(t, x, m, \lambda) + \{ \mathcal{D}_m + \mathcal{D}_x \} V(t, x, m) \right] = 0. \quad (6)$$

ここで、 $f(\cdot)$ は式 (4) で定義される関数であり、 $\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_x$ は、それぞれ、以下に定義される偏微分作用素である。

$$\mathcal{D}_m \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha[t, m] \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \{ \sigma[t, m] \}^2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}$$

$$\mathcal{D}_x \equiv \begin{cases} \{ \lambda(t, x, m) - \mu \} \frac{\partial}{\partial x} & \text{if } x > 0 \\ \{ \lambda(t, x, m) - \mu \} \frac{\partial}{\partial x} & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda(t, x, m) \geq \mu \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda(t, x, m) < \mu \end{cases}$$

HJB 方程式 (6) 左辺の最小化演算内は、それぞれ、状態 (t, x, m) における誘導交通フローを $\lambda(t, x, m)$ としたときの期待総旅行時間の時間増加率を表している：第 1 項は、時刻 t に高速道路および一般道路上で発生する総旅行時間である；第 2 項は微小時間 $[t, t + dt]$ 間に交通状態が (x, m) から $(x + dx, m + dm)$ へと変化することによる期待総旅行時間の時間変化率を表している；最後の項は、さらに、制御できない部分(時間と一般道路旅行時間 m の変化による部分) $\mathcal{D}_m V(\cdot)$ と、待ち行列 x の変化を通じて制御可能な部分 $\mathcal{D}_x V(\cdot)$ から構成されている。

(2) 最適制御の導出

HJB 方程式 (6) から、任意の状態 (t, x, m) における高速道路への最適流入フロー λ^* を求められる。問題 [SDSO] に対する状態 (t, x, m) での最適制御ルールは、当該時刻における次の 2 つの関係：①高速道路上の待ち行列 x の有無；および②一般道旅行時間 m と高速道路の“社会的限界費用(後述)” $m^*(t, x, m)$ の大小関係によって、以

³ 確率制御分野におけるこれらの基本的用語・理論に詳しくない読者のために、HJB 方程式 (6) の直感的な導出方法を付録 I で解説している。

下のように場合分けされる(ただし、記述を簡潔にするために、 (t, x, m) を (\cdot) で置き換えている)：

1. 一般道旅行時間 m が高速道路の社会的限界費用 $m^*(\cdot)$ 以上の場合、待ち行列の有無に関わらず、 $\lambda^*(\cdot) = q(t)$ 。
2. $m(t) < m^*(\cdot)$ の場合、最適制御は待ち行列の有無によってさらに以下の 2 つに場合分けされる： $x > 0$ なる待ち行列が存在するならば $\lambda^*(\cdot) = 0$ 。 $x = 0$ ならば $\lambda^*(\cdot) = \mu$ 。
3. ただし、特別な場合として、交通需要が高速道路の容量より小さく ($q(t) < \mu$)、かつ、待ち行列が存在しない ($x = 0$) 場合に限り、 $\lambda^*(\cdot) = q(t)$ 。

最適流入フローがこのように場合分けされるのは、次の 2 つの理由による：第 1 に、HJB 方程式 (6) の目的関数は制御変数 $\lambda(t, x, m)$ について線形であるため、最適制御が ‘bang-bang’ 型となる。第 2 に、待ち行列の単位時間あたりの変化量 dx/dt が、状態方程式 (1) に示すように、 $x = 0$ 付近で連続微分不可能である。

以下では、この最適制御ルールを、 $x > 0$ の場合と $x = 0$ の場合とに分けて導出する。ただし、表記の煩雑さを避けるため、時刻と交通状態に関する記述 (t, x, m) を、適宜、 (\cdot) で置き換えている。

a) $x > 0$ の場合

この場合、HJB 方程式は以下のように書き直せる。

$$\min_{0 \leq \lambda(t, x, m) \leq q(t)} Z_+[\lambda(t, x, m)] = 0$$

ここで、

$$Z_+[\cdot] \equiv f(\cdot, \lambda) + \left(\mathcal{D}_m + [\lambda(\cdot) - \mu] \frac{\partial}{\partial x} \right) V(\cdot),$$

Z_+ を λ で微分すれば、

$$\frac{\partial Z_+[\lambda(t, x, m)]}{\partial \lambda} = \frac{x}{\mu} - m + \frac{\partial V(t, x, m)}{\partial x}$$

を得る。これより、 $x > 0$ の場合の最適制御 $\lambda^*(t, x, m)$ は、以下のように求められる。

$$\lambda^*(t, x, m) = \begin{cases} q(t) & \text{if } m \geq m^*(t, x, m) \\ 0 & \text{if } m < m^*(t, x, m) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $m^*(t, x)$ は以下の方程式：

$$m = \frac{x}{\mu} + \frac{\partial V(t, x, m)}{\partial x} \quad (8)$$

を満足する m として定義される⁴。この $m^*(t, x)$ や最適ランプ誘導フローの経済学的解釈については、c) で後述する。

⁴ 式 (8) において、 $\frac{\partial V(t, x, m)}{\partial x}$ は、 $V(t, x, m)$ と同様、問題 [SDSO] の解としてしか得られないことに注意されたい。そのため、後述するように、 $m^*(t, x)$ は、方程式 (8) から独立には計算することはできず、[SDSO] の最適性条件を解くことによってしか求められない。

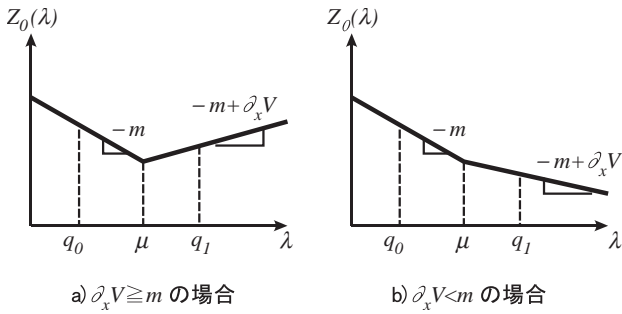


図-3 $x = 0$ のときの最適ランプ制御

b) $x = 0$ の場合

この場合，HJB 方程式は以下のように書き直せる．

$$\min_{0 \leq \lambda(t, 0, m) \leq q(t)} Z_0[\lambda(t, 0, m)] = 0,$$

ここで，

$$Z_0[\lambda(\cdot)] \equiv f(\cdot, \lambda) + \left(\mathcal{D}_m + \max[\lambda(\cdot) - \mu, 0] \frac{\partial}{\partial x} \right) V(\cdot).$$

Z_0 を λ で微分したものは

$$\frac{\partial Z_0[\lambda(t, 0, m)]}{\partial \lambda} = \begin{cases} -m & \text{if } \lambda(\cdot) < \mu \\ -m + \partial_x V(t, 0, m) & \text{if } \lambda(\cdot) \geq \mu \end{cases}$$

となる．これより， Z_0 は，図 3 に示すように， λ に関して区分的に線形な関数となる．これらの図は，いずれも，横軸に λ ，縦軸に $Z_0(\lambda)$ をとったもので，図 3 a) は $\partial_x V \geq m$ の場合，図 3 b) は $\partial_x V < m$ の場合を，それぞれ表わす．

図 3 より，最適ランプ制御が以下のように求められる．まず， $q(t) < \mu$ の場合，誘導フローの上限制約 $\lambda < q$ と図 3 a) および図 3 b) より， $Z_0(\lambda)$ は $\lambda^* = q$ で最小値を取る．次に， $q(t) > \mu$ の場合， $\partial_x V < m$ ならば最適流入フローは $\lambda^* = q$ となり， $\partial_x V \geq m$ ならば $\lambda^* = \mu$ となる．これより， $x = 0$ の場合の最適制御 $\lambda^*(t, 0, m)$ は

$$\lambda^*(t, 0, m) = \begin{cases} q(t) & \text{if } q(t) \leq \mu \\ q(t) & \text{if } q(t) > \mu \text{ and } m \geq m^*(t, 0) \\ \mu & \text{if } q(t) > \mu \text{ and } m < m^*(t, 0) \end{cases} \quad (9)$$

と表わされる．ここで， $m^*(t, 0) = m^*(t, x)|_{x=0}$ は，式 (8) で定義される．

c) 最適制御ルールの経済学的解釈

これまでの議論により，問題 [SDSO] の最適ランプ誘導フロー $\lambda^*(t, x, m)$ は，式 (7) および (9) で求められる．以下では，この最適ランプ誘導フローの経済学的解釈を述べておこう．

まず，式 (8) で定義した $m^*(t, x)$ は，時刻 t に待ち行列が $x(t) = x$ であるときの，高速道路の“社会的限界費用”(を旅行時間で測ったもの) を表わしている：式 (8) の第 1 項は，待ち行列が x であるときの高速道路の旅行時間を表わし，第 2 項は，状態 (t, x) の下で，待ち行

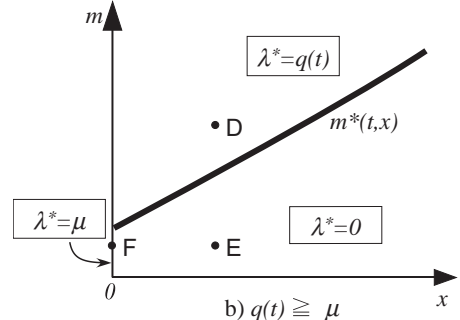
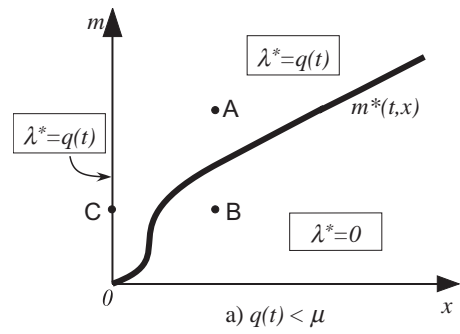


図-4 高速道路の社会的限界費用 m^* と最適制御

列を 1 単位増やした時の総旅行時間の増加量を表わす．この内，後者は，状態 (t, x, m) 下での“時間外部性⁵⁾”を意味している．したがって，その和 $m^*(t, x)$ は，高速道路の流入フローを 1 単位増加させたときのネットワーク全体での期待総旅行時間の増分，すなわち，高速道路の(社会的)限界費用に他ならない．

この高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$ は，図 4 のような x - m 平面上の曲線として表現できる．図 4 の 2 つの図は，いずれも，横軸に待ち行列長 x ，縦軸に一般道旅行時間 m を取り，高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$ を x の関数(太い曲線)として示したものである．ここで，図 4 a) は交通需要 $q(t)$ が高速道路の容量 μ を下回っている時刻での m^* を，図 4 b) は $q(t) \geq \mu$ なる時刻での m^* を，それぞれ，示している．任意の状態 (t, x, m) における最適ランプ誘導フローは，この高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$ と，一般道の限界費用 m との大小関係(および待ち行列の有無)によって以下のように決定される⁵⁾．

時刻 t において $q(t) < \mu$ である場合，図 4 a) を用いて $\lambda^*(\cdot)$ は以下のように決定される：まず，高速道路上に待ち行列が存在する(i.e. $x > 0$) 場合，各リンクの限界費用 $m^*(t, x)$ および m を比較する；そして，前者が小さければ(例えば，点 A) 全ての交通需要を高速道路に誘導し，後者が小さければ(点 B) 全利用者を一般道に誘導する．一方，待ち行列が存在しない場合(例えば点 C)，全ての交通需要 $q(t)$ を高速道路に誘導することが

⁵⁾ 本稿では，一般道路の容量が極めて大きい(i.e. 待ち行列が発生せず，時間外部性が存在しない)と仮定しているため，一般道路上の(社会的)限界費用と個々の利用者の私的費用は一致する．

最適となる。

$q(t) \geq \mu$ の場合、図 4 b) を用いて $\lambda^*(\cdot)$ は以下のように決定される：まず、高速道路と一般道路との間で限界費用 $m^*(t, x)$ と m を比較し、 $m \geq m^*(t, x)$ ならば、待ち行列の有無によらず、高速道路に全ての需要を誘導することが最適となる（例えば点 D）。一方、 $m < m^*(t, x)$ の場合、 $\lambda^*(\cdot)$ は、待ち行列の有無に依存して決定される：待ち行列が存在するならば全需要を一般道路に誘導する（点 E）； $x = 0$ ならば高速道路に μ 、一般道路に $q(t) - \mu$ だけのフローを誘導する（点 F）。これにより、待ち行列を新たに発生させずに一般道路への流入フロー（ひいては期待総旅行時間の増加）を最小限に抑えられる。

(3) 一般化相補性問題としての最適性条件の記述

前節で求めた最適制御を HJB 方程式 (6) に代入すれば、 $V(t, x, m)$ が従うべき最適性条件を導出できる。本節では、この最適性条件が一般化相補性問題 (GLCP: Generalized Linear Complementarity Problem) として記述できることを明らかにする。以下では、図 4 に従い、次の 3 つの場合に分けて議論する：a) 待ち行列 $x > 0$ が存在する；b) $x = 0$ かつ交通需要 $q(t)$ が容量 μ 以上；c) $x = 0$ かつ $q(t) < \mu$ 。

a) $x > 0$ の場合

この場合、最適制御は $\lambda^*(\cdot) = q$ か $\lambda^* = 0$ のいずれかである。まず、 $m \geq m^*(t, x)$ の場合、最適制御 $\lambda^*(\cdot) = q(t)$ を HJB 方程式 (6) に代入すれば、最適値関数 $V(t, x, m)|_{x>0}$ が従うべき以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} F^q[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{q-\mu}V(t, x, m) + q(t)x/\mu = 0, \\ F^0[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{-\mu}V(t, x, m) + q(t)m \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 $\mathcal{L}_{q-\mu}$ および $\mathcal{L}_{-\mu}$ は、それぞれ、待ち行列の変化が $dx(t) = (q - \mu)dt$ および $dx(t) = -\mu dt$ であるときの状態変数 $[x(t), m(t)]$ の生成作用素 (generator) であり、以下のように定義される。

$$\mathcal{L}_{q-\mu} \equiv \mathcal{D}_m + (q - \mu) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{L}_{-\mu} \equiv \mathcal{D}_m - \mu \frac{\partial}{\partial x}$$

なお、式 (10) の下側の不等式は、 $m \geq m^*(t, x)$ および最適値関数の自明な性質 $\partial_x V(\cdot) \geq 0$ より容易に導かれる。

次に、 $m < m^*(t, x)$ の場合、最適制御は $\lambda^*(\cdot) = 0$ であるため、これを HJB 方程式 (6) に代入すれば、

$$\begin{cases} F^q[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{q-\mu}V(t, x, m) + q(t)x/\mu > 0, \\ F^0[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{-\mu}V(t, x, m) + q(t)m = 0 \end{cases} \quad (11)$$

を得る。

これより、任意の状態 $(t, x, m)|_{x>0}$ において、最適値関数 $V(t, x, m)|_{x>0}$ は、以下の（無限次元）一般化相補性問題の解として特徴づけられる。

[GLCP-A] Find $V(t, x, m)|_{x>0}$ such that

$$\begin{cases} F^q[V(\cdot)] \cdot F^0[V(\cdot)] = 0, \\ F^q[V(\cdot)] \geq 0, F^0[V(\cdot)] \geq 0 \end{cases} \quad \forall (x, m) \in \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{R}_{++}.$$

b) $x = 0$ かつ $q(t) \geq \mu$ の場合

この場合、最適制御は $\lambda^*(\cdot) = q(t)$ か $\lambda^*(\cdot) = \mu$ のいずれかである。まず、 $m \geq m^*(t, 0)$ の場合、最適制御 $\lambda^* = q(t)$ を HJB 方程式 (6) に代入すれば、最適値関数 $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) \geq \mu}$ が従うべき以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} G^q[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{q-\mu}V(t, x, m) = 0, \\ G^\mu[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_0V(t, x, m) + (q - \mu)m \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{D}_m$ は、待ち行列が変化しない (i.e. $dx(t) = 0$) ときの状態変数の生成作用素である。なお、式 (12) の下側の不等式は、定義式 $\mathcal{L}_{q-\mu}V(\cdot) \equiv \mathcal{L}_0V(\cdot) + (q - \mu)\partial_x V(\cdot)$ および $m \geq m^*(t, 0)$ より、容易に導かれる。

次に、 $\mu < \partial_x V(\cdot)$ の場合、最適制御は $\lambda^* = \mu$ であるため、これを HJB 方程式 (6) に代入すれば、最適値関数が従う以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} G^q[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_{q-\mu}V(t, x, m) > 0, \\ G^\mu[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_0V(t, x, m) + (q - \mu)m = 0 \end{cases} \quad (13)$$

これより、任意の状態 $(t, x, m)|_{x=0, q(t) \geq \mu}$ における最適値関数 $V(\cdot)$ は、以下の（無限次元）一般化相補性問題の解として特徴づけられる。

[GLCP-B] Find $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) \geq \mu}$ such that

$$\begin{cases} G^q[V(\cdot)] \cdot G^0[V(\cdot)] = 0, \\ G^q[V(\cdot)] \geq 0, G^0[V(\cdot)] \geq 0, \end{cases} \quad \forall m \in \mathcal{R}_{++}.$$

c) $x = 0$ かつ $q(t) < \mu$ の場合

この場合、HJB 方程式 (6) に最適制御 $\lambda^*(\cdot) = q(t)$ を代入すれば、当該時刻 t において最適値関数 $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) < \mu}$ が従う以下の偏微分方程式を得る。

[PDE-C] Find $V(t, x, m)|_{x=0, q(t) < \mu}$ such that

$$\mathcal{H}[V(\cdot)] \equiv \mathcal{L}_0V(t, x, m) = 0, \quad \forall m \in \mathcal{R}_{++}. \quad (14)$$

ここで、 $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{D}_m$ は、待ち行列が変化しないとき (i.e. $dx(t) = 0$) の状態変数の生成作用素である。

d) 終端条件および境界条件

問題 [GLCP-A], [GLCP-B] および [PDE-C] の終端条件および境界条件は、以下のように示される。まず、計画満期 $t = T$ 以降にネットワークに流入する利用者の総旅行時間は無視されるので、終端条件は、

$$V(t, x, m)|_{t=T} = 0, \quad \forall (x, m) \in \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++}, \quad (15)$$

と表わされる．

次に，待ち行列に関する境界条件を示そう．下側境界 $x = 0$ で最適値関数が満たす条件は，問題 [GLCP-B] および [PDE-C] に他ならない．一方，上側境界 $x \rightarrow \infty$ では，高速道路に一切交通量を誘導しない制御 $\lambda^* = 0$ が常に最適となる．そのため，最適値関数 $V(t, x, m)|_{x \rightarrow \infty}$ は，以下の式で与えられる．

$$V(t, x, m)|_{x \rightarrow \infty} = \mathbb{E} \left[\int_t^T q(s)m(s) ds \middle| (t, x, m) \right]_{x \rightarrow \infty}$$

$$\forall (t, m) \in [0, T] \times \mathcal{R}_{++}. \quad (16)$$

この境界での最適値関数 $V(t, x, m)|_{x \rightarrow \infty}$ は，以下の偏微分方程式の解として求められることが知られている (Feynman-Kac の公式)．

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 V(t, x, m) + qm = 0, & \forall (t, m) \in [0, T] \times \mathcal{R}_{++}, \\ V(T, x, m) = 0, & \forall m \in \mathcal{R}_{++}. \end{cases} \quad (17)$$

最後に，一般道路の自由旅行時間についての境界条件を示す．下側境界 $m \rightarrow 0$ では一般道路の自由旅行時間が極めて低く，その後も殆ど変化しない．従って，最適制御は全ての流入交通量を一般道路に誘導すること (i.e. $\lambda^* = 0$) であり，最適値関数は

$$V(t, x, m)|_{m \rightarrow 0} = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+, \quad (18)$$

で与えられる．一方，上側境界 $m \rightarrow \infty$ においては，全ての流入交通量を高速道路に誘導する制御が最適となるため，最適値関数は，以下の確定的な値で与えられる．

$$V(t, x, m)|_{m \rightarrow \infty} = \psi(t, x) \equiv \int_t^T q(s)x(s)/\mu ds,$$

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{R}_{++}. \quad (19)$$

ここで，各境界条件での最適値関数は，いずれも，式 (16), (18) および (19) から，(問題 [GLCP-A], [GLCP-B] および [PDE-C] の解とは別に) 予め計算しておけることに注意されたい．このことは次に示す数値計算方法の開発において重要となる．

ここまで示した最適性条件は，図 5 のように表わされる．図 5 a), b) は，いずれも，横軸に待ち行列 x ，縦軸に自由旅行時間 m を取り，ある時刻 t において，各状態 (x, m) で最適値関数が従う偏微分方程式を示したものである．図 5 a) は，時刻 t における交通需要が高速道路の容量以上の場合 (i.e. $q(t) \geq \mu$)，図 5 b) は $q(t) < \mu$ の場合の最適性条件を，それぞれ，表している．各図において，最適ランプ制御 $\lambda^*(\cdot)$ および最適値関数が従う偏微分方程式が切り替わる境界は，前節までで議論した高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$ そのものである．ここで，この境界 $m^*(t, x)$ は，問題 [GLCP-A] あるいは [GLCP-B] を解くことによってはじめて決定される“自由境界”であることに注意されたい．次節では，各時刻 t における

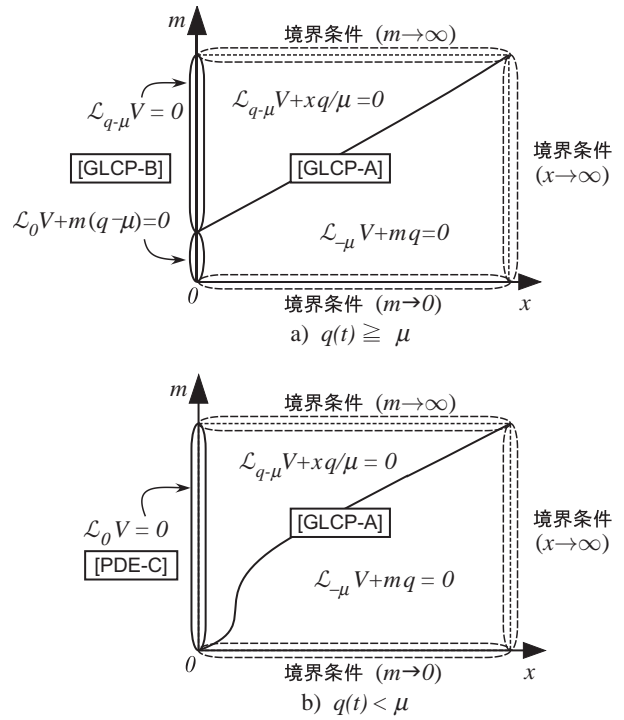


図-5 最適性条件の概念図

この自由境界および最適値関数を求めるための数値解法を示そう．

(4) 数値計算方法

前節までで，不確実性下での動的システム最適配分問題 [SDSO] は，各時刻で成立すべき一般化相補性問題 [GLCP-A], [GLCP-B] および偏微分方程式 [PDE-C] として再定式化でき，その終端条件および境界条件が，それぞれ，式 (15) および式 (16), (18), (19) で与えられることを述べた．本節では，これを活用した数値計算方法の基本的概念を解説する．

まず，任意の時刻 t ，待ち行列 x および一般道旅行時間 m からなる空間 $\{(t, x, m) | (t, x, m) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+\}$ を，図 6 のような離散格子を用いて，

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t^i \equiv i\Delta t, & i &= 0, 1, \dots, I, \\ x &\rightarrow x^j \equiv j\Delta x, & j &= 0, 1, \dots, J, J+1, \\ m &\rightarrow m^k \equiv k\Delta m, & k &= 0, 1, \dots, K, K+1, \end{aligned} \quad (20)$$

と離散表現する． $\Delta t, \Delta x, \Delta m$ は，それぞれ，時刻，待ち行列，および一般道路旅行時間の各軸方向の離散格子間隔である．この離散格子上の地点 (i, j, k) における最適値関数 $V(t, x, m)$ の値を $V^{i,j,k} \equiv V(t^i, x^j, m^k)$ と記述する．表記の簡便化のため，時点 i の j 番目待ち行列における格子 $\{(i, j, k) | k = 1, \dots, K\}$ 上の最適値関数を K 次元列ベクトル $V^{i,j} \equiv [V^{i,j,1}, \dots, V^{i,j,K}]'$ で表わし，時点 i における格子 $\{(i, j, k) | j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K\}$ 上の最適値関数を以下の JK 次元列ベクトルで表わす．

$$V^i \equiv [V^{i,1,1}, V^{i,2,1}, \dots, V^{i,1,K}, V^{i,2,K}, \dots, V^{i,1,K}, \dots, V^{i,J,K}]'.$$

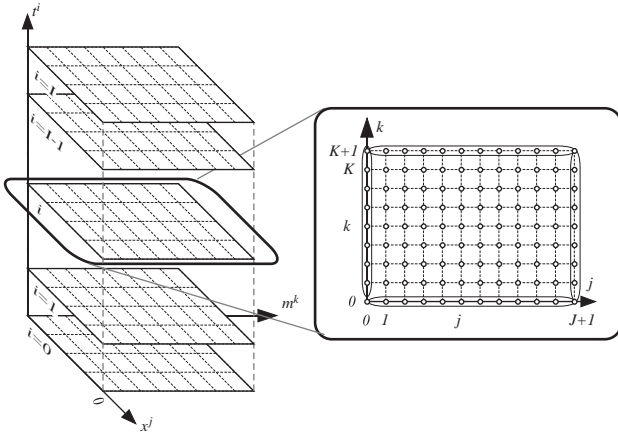


図-6 離散格子

この離散的枠組の下で，問題 [GLCP-A], [GLCP-B] および [PDE-C] に現れる偏微分作用素は，それぞれ，以下のように離散近似できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q-\mu} V(t^i, m, x)|_{x>0} &\approx L_{q-\mu}^i V^i + M_{q-\mu}^i V^{i+1} + w_{q-\mu}^i, \\ \mathcal{L}_{-\mu} V(t^i, m, x)|_{x>0} &\approx L_{-\mu}^i V^i + M_{-\mu}^i V^{i+1} + w_{-\mu}^i, \\ \mathcal{L}_{q-\mu} V(t^i, m, x)|_{x=0} &\approx L_{q-\mu}^{i,0} V^{i,0} + M_{q-\mu}^{i,0} V^{i+1,0} + w_{q-\mu}^{i,0}, \\ \mathcal{L}_0 V(t^i, m, x)|_{x=0} &\approx L_0^{i,0} V^{i,0} + M_0^{i,0} V^{i+1,0} + w_0^{i,0}, \end{aligned} \quad (21)$$

ここで， $L_n^i, M_n^i, n \in \{q-\mu, -\mu\}$ は，それぞれ， $JK \times JK$ 行列， $L_n^{i,0}, M_n^{i,0}, n \in \{q-\mu, 0\}$ は，それぞれ， $K \times K$ 行列であり，時点 i における状態遷移方程式 (1) および (2) によって決定される． $w_n^i, n \in \{q-\mu, -\mu\}, i = 0, 1, \dots, I$ はそれぞれ， JK 列ベクトル， $w_n^{i,0}, n \in \{q-\mu, 0\}, i = 0, 1, \dots, I$ は，それぞれ， K 列ベクトルであり，境界条件 [GLCP-B], [PDE-C] および式 (16), (18), (19) より計算される．

これより，時点 i で成立すべき問題 [GLCP-A] は，以下の有限次元一般化相補性問題として離散表現できる．

[GLCP-Aⁱ] Find V^i such that

$$\begin{cases} F^q(V^i, V^{i+1}) \cdot F^0(V^i, V^{i+1}) = 0, \\ F^q(\cdot) \geq \mathbf{0}_{JK}, F^0(\cdot) \geq \mathbf{0}_{JK}, \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{aligned} F^q(V^i, V^{i+1}) &\equiv L_{q-\mu}^i V^i + M_{q-\mu}^i V^{i+1} + \frac{q^i}{\mu} x_{JK} + w_{q-\mu}^i, \\ F^0(V^i, V^{i+1}) &\equiv L_{-\mu}^i V^i + M_{-\mu}^i V^{i+1} + q^i m_{JK} + w_{-\mu}^i, \end{aligned}$$

である． q^i は時点 i での OD 交通需要を表わす． x_{JK} および m_{JK} は，それぞれ， x^j, m^k を，格子 $\{(j, k) = (1, 1), (1, 2), \dots, (1, K), (2, 1), \dots, (J, K)\}$ に合わせて並べた JK 次元列ベクトルである． $\mathbf{0}_{JK}$ は全ての要素が 0 であるような JK 次元列ベクトルである．

同様に，時点 i に境界 $j = 0$ で成立すべき問題 [GLCP-B] および偏微分方程式 [PDE-C] は，それぞれ，以下のように離散表現される．

[GLCP-Bⁱ] Find V_0^i such that

$$\begin{cases} G^q(V_0^i, V_0^{i+1}) \cdot G^\mu(V_0^i, V_0^{i+1}) = 0, \\ G^q(\cdot) \geq \mathbf{0}_K, G^\mu(\cdot) \geq \mathbf{0}_K. \end{cases}$$

[PDE-Cⁱ] Find V_0^i such that

$$L_0^{i,0} V^{i,0} + M_0^{i,0} V^{i+1,0} = \mathbf{0}_K.$$

ここで，

$$\begin{aligned} G^q(V_0^i, V_0^{i+1}) &\equiv L_{q-\mu}^{i,0} V^{i,0} + M_{q-\mu}^{i,0} V^{i+1,0}, \\ G^\mu(V_0^i, V_0^{i+1}) &\equiv L_0^{i,0} V^{i,0} + M_0^{i,0} V^{i+1,0} + (q^i - \mu) m_K \end{aligned}$$

である． $m_K \equiv \{m^1, \dots, m^K\}'$ であり， $\mathbf{0}_K$ は全ての要素が 0 であるような K 次元列ベクトルである．

この離散的枠組の下での終端条件および境界条件は，それぞれ，以下のように表現される．まず，終端条件式 (15) は，

$$V^I = \mathbf{0}_{JK} \quad (22)$$

と表現される．次に， $x \rightarrow 0$ における境界条件は問題 [GLCP-Bⁱ] および [PDE-Cⁱ] で表わされる． $x \rightarrow \infty$ で成立する Feynman-Kac 公式 (16) は，以下の線形方程式として記述し直される．

$$L_0^{i,J+1} V^{i,J+1} + M_0^{i,J+1} V^{i+1,J+1} + q^i m_K = \mathbf{0}_K. \quad (23)$$

ここで， $L_0^{i,J+1}, M_0^{i,J+1}$ は， $K \times K$ 行列であり，状態遷移方程式より決定される．最後に， $m \rightarrow 0$ および $m \rightarrow \infty$ における境界条件 (18), (19) は，それぞれ，

$$\begin{aligned} V^{i,j,0} = 0, V^{i,j,K+1} &= \psi(t^i, x^j), \\ i = 0, 1, \dots, I-1, j &= 0, 1, \dots, J, J+1, \end{aligned} \quad (24)$$

と離散表現される．ここで， $\psi(\cdot)$ は，式 (19) で定義される．

時点 i で成立すべき問題 [GLCP-Aⁱ], [GLCP-Bⁱ] は，いずれも，時点 $i+1$ における最適値関数 V^{i+1} が与件である場合， V^i のみを未知変数とする他の時点から独立した問題となることに注意されたい．これより，問題 [SDSO] の数値解を求める手続きは，以下のようにまとめられる．

[Algo-SDSO]

Step 0 終端条件 $V^I := \mathbf{0}$. $i := I-1$.

Step 1 境界条件式 (23), (24) より，時点 i における $x=0$ 以外の境界での最適値関数 $V^{i,K+1}, \{(V^{i,0,k}, V^{i,J+1,k}) | k = 1, \dots, K\}$ を求める．

Step 2 時点 $i+1$ での最適値関数 V^{i+1} および $x=0$ 以外の境界での最適値関数を与件とし， $x=0$ での最適値関数 $V^{i,0}$ を計算： $q^i \geq \mu$ ならば問題 [GLCP-Bⁱ] を， $q^i < \mu$ ならば問題 [PDE-Cⁱ] を $V^{i,0}$ を，それぞれ解く．

Step 3 時点 $i+1$ での最適値関数 V^{i+1} および，Step 1, Step 2 で求めた境界での最適値関数を与件とし，問題 [GLCP-Aⁱ] を解いて V^i を求める．

Step 4 $i=0$ ならば終了．そうでなければ， $i := i-1$ として Step 1 へ．

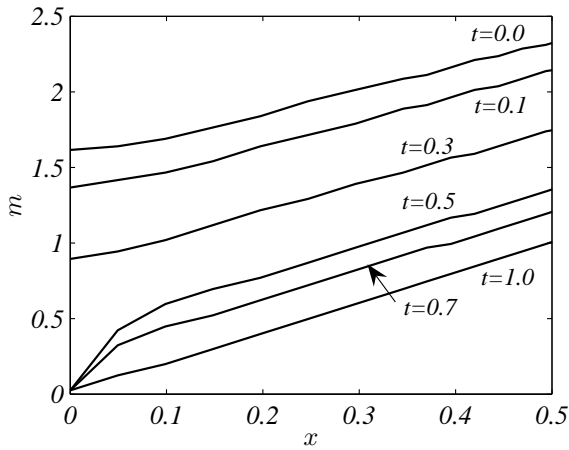


図-7 高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$

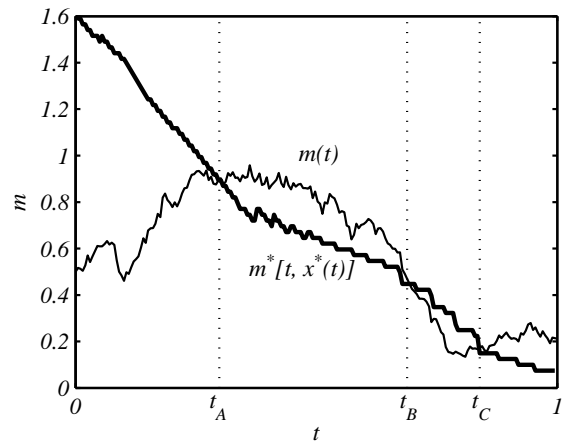


図-8 一般道旅行時間 $m(t)$ と高速道限界費用 $m^*[t, x^*(t)]$

[Algo-SDSO] で解くべきサブ問題 [GLCP-Aⁱ] および [GLCP-Bⁱ] のような有限次元一般化相補性問題に対しては、近年、数理計画の分野において様々な効率的解法が開発されている (例えば, Ferris and Pang⁸⁾, Peng and Lin⁹⁾, Jiang et al.¹⁰⁾). 本稿では、この内、自然な仮定の下で大局的収束と局所二次収束 (local Q-quadratic) が保証されている Peng and Lin⁹⁾ の解法を採用した。その詳細については、付録 II を参照されたい。

4. 数値計算例: 最適ランプ制御ルール

本章では、提案枠組の判り易い適用および図 4 に示した高速道路の限界費用 m^* と最適制御ルールの利用方法を示すために、前章で述べた解法を用いた数値計算結果の例を示す。

以下では、まず、モデルの特性を判り易く示すため、交通需要 $q(t)$ を以下の階段関数として特定化する：

$$q(t) \equiv \begin{cases} q_1 & \text{if } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ q_2 & \text{if } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad (25)$$

ここで、 q_1, q_2 は所与の定数で、 $0 < q_2 < \mu < q_1 < T$ なる関係を満たす。次に、一般道旅行時間の状態遷移方程式 (2) を、以下の幾何 Brown 運動として記述する。

$$dm(t) = \alpha m(t) dt + \sigma m(t) dW(t), \quad m(0) = m_0. \quad (26)$$

ここで、 α, σ は所与の定数である。本稿では、数値計算のベース・ケース・パラメータとして以下を用いる。

$$\begin{aligned} T &= 1, & \mu &= 0.5, & q_1 &= 1.2, & q_2 &= 0.4, \\ \alpha &= 0, & \sigma &= 0.4, & m_0 &= 0.5, & x_0 &= 0.1. \end{aligned}$$

図 7 に時刻 $t = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ における最適制御ルールを表す。この図は、最適制御が切り替わる境界、すなわち、高速道路の限界費用 $m^*(t, x)$ を、横軸に高速道路の待ち行列長 x をとってプロットしたもので

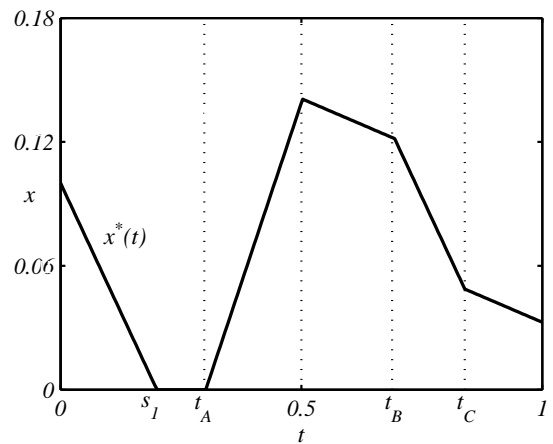


図-9 最適制御下での待ち行列 $x^*(t)$

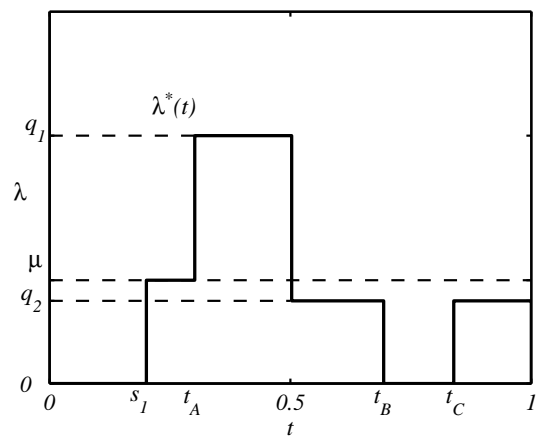


図-10 最適誘導交通流率 $\lambda(t)^*$

ある。図 7 より、以下の 2 つが判る：まず、待ち行列が十分に大きいとき、高速道限界費用 $m^*(t, x)$ は待ち行列長 x に対して傾き $1/\mu$ の線形関数となる。これは、待ち行列が大きい場合には、 $\partial_x V$ が待ち行列長 x についてゼロ次同次となることを示唆している。次に、高速道限界費用 $m^*(t, x)$ は時間と共に減少する。これは、残

存制御期間が短いほど、待ち行列の時間外部性 $\partial_x V$ が小さくなることを反映している。

この最適制御ルールを用いた制御方法を図 8,9 および 10 に示す。これらの図の横軸はいずれも時刻を、縦軸は、それぞれ、一般道旅行時間 m 、高速道路の待ち行列長 x 、および交通流率を表わす。まず、図 8 において、 $m(t)$ は、初期値を $m_0 = 0.5$ とした一般道旅行時間の一つの標本過程を表わし、 $m^*[t, x^*(t)]$ はこの標本過程の下での高速道限界費用を表わす。 $x^*(t)$ は、初期値 $x_0 = 0.1$ の下で標本過程 $\{m(t)\}$ に対して最適制御を行なった結果として得られる時刻 t での待ち行列の長さである。図 9 は、この最適待ち行列 $x^*(t)$ を、横軸に時間を取ってプロットしたものである。

この 2 つの図 8, 9 を用いて、最適誘導交通流率 $\lambda^*(t)$ は以下のように求められる。まず、一般道旅行時間 $m(t)$ が高速道限界費用 $m^*[t, x^*(t)]$ を上回っている場合、全ての交通需要を高速道路に誘導することが最適となる (i.e. $\lambda^*(t) = q(t)$)。一方、 $m(t) < m^*[t, x^*(t)]$ である場合、最適制御はさらに以下の 2 つに場合分けされる——高速道路に待ち行列が存在しなければ (i.e. $x^*(t) = 0$)、容量 μ に等しいだけの交通量を高速道路に誘導することが最適 (i.e. $\lambda^*(t) = \mu$) となり、正の待ち行列が存在するならば (i.e. $x^*(t) > 0$)、高速道路に一切誘導しないことが最適 (i.e. $\lambda^*(t) = 0$) となる。

こうして求められた最適誘導交通流率 $\lambda^*(t)$ を図 10 に示す。この図において、 q_1 および q_2 は、それぞれ、時刻 $\frac{T}{2}$ 前後で切り替わる交通需要の 2 つのレベルを表わし、 μ は、高速道路の容量を表わす。この図より、まず、 $m(t) > m^*(t)$ となる 2 つの時間帯—— $[t_A, t_B]$ および $[t_C, T]$ ——では、 $\lambda^*(t) = q(t)$ となることが判る。次に、 $m(t) < m^*(t)$ となる時間帯、 $[0, t_A]$ および $[t_B, t_C]$ の内、 $x^*(t) = 0$ となる時間帯 $[s_1, t_A]$ では $\lambda^*(t) = \mu$ となる一方、 $x^*(t) > 0$ となる時間帯 (i.e. $[0, s_1]$ および $[t_B, t_C]$) では $\lambda^*(t) = 0$ となることが判る。次章では、このリアルタイム制御の特性およびパフォーマンスを評価する。

5. 提案ランプ制御則のパフォーマンス評価

本章では、リアルタイム観測情報を用いたフィードバック制御の特性を明らかにし、その効率性を評価する。具体的には、まず、(1) において、従来の動的システム最適 (DSO: *Dynamic System Optimal*) 配分問題と、本研究における確率的 DSO 配分との間で用いられる情報、およびそのランプ制御戦略の違いを述べる。次に、(2) において、管理者がランプ制御を行なわない場合を考える。この時、そこで実現し得る交通配分パターンは、利用者が経路選択に活用できる情報に応じて変化すると考えるのが自然である。そこで、(2) では、利用

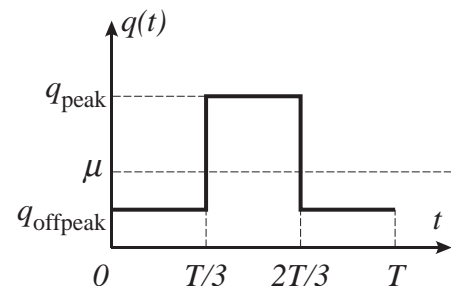


図-11 交通需要 $q(t)$

者がリアルタイム観測情報を取得・活用できる場合と、そうでない場合について、それぞれ、想定する配分パターンを述べる。ここで、配分パターンとは、高速道路への流入フローの時間経路 $\{\lambda(t)\}$ として定義される。最後に、(3) および (4) において、本研究で提案する動的ランプ制御の効率性およびリアルタイム観測情報の“価値”を明らかにする：(3) においては、それぞれの配分パターンの期待総旅行時間を求め、感度分析を用いてフィードバック制御の効率性を示す。(4) では、ランプ制御におけるリアルタイム観測情報の価値を示す。

本章では、以下の状況を想定する：まず、計画期間を、ピーク時間帯を中心とした 3 時間 (i.e. $T = 3$) とする。次に、ネットワーク全体への交通需要 $q(t)$ を、 $t \in [\frac{1}{3}T, \frac{2}{3}T]$ においてのみ交通量がピーク $q(t) = q_{\text{peak}}$ となり、それ以外でオフピーク $q(t) = q_{\text{offpeak}}$ となる図 11 のような階段関数として定義する。高速道路の容量を $\mu = 2.5$ (千台/時) とし、ピークおよびオフピーク時の交通量を、それぞれ、 $q_{\text{peak}} = 2\mu = 5$ および $q_{\text{offpeak}} = \mu/2 = 1.25$ (千台/時) とする。この時、計画期間全体での総交通需要は $Q \equiv \int_0^T q(t) dt = 7.5$ (千台) となる。最後に、一般道路の旅行時間を式 (26) の幾何 Brown 運動で表わし、 $\alpha = 0, \mu = 0.4$ および $m_0 = 0.25$ (時間) とする。

(1) フィードバック制御とオープンループ制御

まず、本研究における確率的 DSO 配分問題と従来型の DSO 配分問題の違いを明確するため、これらの動的ランプ制御に用いられる観測情報を、“リアルタイム・データ”と“ヒストリカル・データ”とに明示的に区別しよう：ある日付 d の時刻 t における一般道旅行時間を $m^d(t)$ で表す。ここで、制御を行う日付を D とするとき、制御日 D の時刻 t における“ヒストリカル・データ”とは、制御日以前に観測された時刻 t における一般道旅行時間の集合として定義できる。以下では、これを $M^D(t) \equiv \{m^d(t) | d < D\}$ と記述する。これに対し、制御日 D の時刻 t における“リアルタイム・データ”とは、制御日当日の時刻 t に実現している一般道旅行時間であり⁶、単に $m(t) \equiv m^D(t)$ と記述する。

⁶ 正確には、時刻 t に一般道路に進入した車両が終点に到着するまでに必要とする真の旅行時間 $m^{\text{real}}(t)$ は、当該日の時刻 $t + m(t)$

このとき、従来型の DSO 配分問題とは、ヒストリカル・データ $\{M^D(t)\}$ のみを用いて誘導交通流率の時間経路 $\{\lambda(t)\}$ を事前に決定する確定的なランプ制御問題と見なせる。すなわち、DSO ランプ制御では、(制御日 D 以前に) ヒストリカル・データ $M^D(t)$ から一般道旅行時間の期待値 $\bar{m}(t) \equiv \mathbb{E}[m^D(t)|M^D(t)]$ を、各時刻について予め求めておく。そして、ただ一つの時間経路 $\{\bar{m}(t)\}$ について総旅行時間を最小化する以下の問題：

$$[\text{DSO}] \quad \min_{\{\lambda(t)|t \in [0, T]\}} \int_0^T \left\{ \lambda(t) \frac{x(t)}{\mu} + (q(t) - \lambda(t)) \bar{m}(t) \right\} dt$$

を解くことで、最適誘導交通流率を時間のみの関数 $\lambda(t)$ として求める。そのため、従来のランプ制御では、事前に求めた期待値 $\bar{m}(t)$ が大きく外れた旅行時間が実際に観測されたとしても、実際に観測される旅行時間 $m(t)$ からどれだけ乖離しようとも、誘導交通流率は変わらない。

これに対し、本研究で提案するランプ制御は、ヒストリカル・データに加えてリアルタイム観測情報をも活用したものと位置付けられる。具体的には、まず、(制御日 D 以前の) ヒストリカル・データ $\{M^D(t)\}$ から $m(t)$ が従うべき確率微分方程式 (2) のドリフト関数 $\alpha[t, m(t)]$ とボラティリティ関数 $\sigma[t, m(t)]$ を特定化する。そして、これらを与件として問題 [SDSO] を解くことで、最適誘導交通流率を時間と状態の関数 $\lambda(t, x, m)$ として求める。

以下では、リアルタイム観測情報 $\{m(t)\}$ を時々刻々反映させた動的ランプ制御を、フィードバック制御 (FC: Feedback Control) と呼び、そこで実現する配分パターンを、問題 [SDSO] の解 $\lambda_{FC} \equiv \{\lambda(t, x, m)\}$ で表わす。これに対し、一般道旅行時間の期待値 $\{\bar{m}(t)\}$ のみに基づいた従来型の動的ランプ制御を、オープンループ制御 (OC: Open-loop Control) と呼び、そこで実現する配分パターンを、問題 [DSO] の解 $\lambda_{OC} \equiv \{\lambda(t)\}$ で表現する。

(2) レッセ・フェール (自由放任) 下での交通量配分

本稿では、管理者がランプ制御を行なわない、レッセ・フェール (laissez-faire: 自由放任) の場合についても、その効率性を比較対象として評価する。一般に、ランプ制御が行なわれない場合、個々の利用者は、(システム全体の効率性とは無関係に) 自らの効用のみを最大化するリンクを選択する。そのため、レッセ・フェールの下で実現する交通量配分 (i.e. 高速道路への流入) パターンは、利用者に与えられる情報の違いに応じて異なると考えるのが自然であろう。本稿では、管理者が利用者にリアルタイム観測情報を公開する場合と、そ

までは明らかにならない。そのため、ここでは、(当該日の) 時刻 t までに観測された情報から何らかの手法 (e.g. 同時刻法, time-slice 法) で求めた $m^{\text{real}}(t)$ の最良の予測値を $m(t)$ とする。こうした旅行時間予測の詳細については本研究の範囲を超えるので省略するが、その予測・推計に時刻 t までの最新の情報を用いる限り、 $m(t)$ は“リアルタイム観測情報”と見なせる。

うでない場合について、以下の 3 つの配分パターンを想定する。

まず、利用者が時々刻々リアルタイム観測情報 $[x(t), m(t)]$ を受け取れる場合、全ての利用者が、各時刻 t において高速道路の旅行時間 $x(t)/\mu$ と一般道路の旅行時間 $m(t)$ を比較し、より旅行時間の小さいリンクに流入する。これは動的利用者均衡 (UE: User Equilibrium) 状態に相当し、時刻 t における高速道路への流入率は、時刻と状態の関数：

$$\lambda_{UE}(t, x, m) = \begin{cases} q(t) & \text{if } x/\mu < m \\ 0 & \text{if } x/\mu \geq m \end{cases} \quad (27)$$

で表わされる。以下では、この流入パターンを UE 配分と呼び、 $\lambda_{UE} \equiv \{\lambda_{UE}(t, x, m)\}$ と記述する。

一方、利用者がリアルタイム観測情報を受け取れない場合、時刻 t に当該ネットワーク起点に到着した利用者は、以下のリンク選択行動を取ると考えられる：時刻 t での交通状況 $[x(t), m(t)]$ を、自らの経験 (e.g. 個々の利用者が個別に持つヒストリカル・データ) に基づいて推測し、当該時刻での旅行時間がより短いと予想されるリンクを選択する。本章では、その極端なケースとして、利用者が各時刻での交通状況に関する情報を一切持たない場合を仮定する。この場合、利用者は、高速道路と一般道路のどちらがより旅行時間が短いのかを一切知ることがないため、全時間帯を通じて高速道路か一般道路のいずれか一方しか利用しない (all-or-nothing) 配分が実現する。以下では、全ての利用者が高速道路を利用する流入パターンを AF (all-or-nothing to freeway) 配分と呼び、 $\lambda_{AF} \equiv \{\lambda(t)|\lambda(t) = q(t)\}$ と記述する。逆に、全ての利用者が一般道路を利用する流入パターンを AA (all-or-nothing to arterial road) 配分と呼び、 $\lambda_{AA} \equiv \{\lambda(t)|\lambda(t) = 0\}$ と表記する。

上述した 5 つの交通量配分パターンは、表 1 のようにまとめられる。ある配分パターン $p \in \{FC, OC, UE, AF, AA\}$ の効率性は、以下の式で定義される期待総旅行時間：

$$V_p \equiv \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\{ \lambda_p(t) \frac{x(t)}{\mu} + (q(t) - \lambda(t)) m(t) \right\} dt \right] \quad (28)$$

表-1 比較対象とする交通量配分パターン

	b1) リアルタイム情報活用する	b2) リアルタイム情報活用しない
a1) 制御する	① feedback 制御 (FC)	② openloop 制御 (OC)
a2) 制御しない	③ 利用者均衡 (UE)	④a) 高速道路のみ利用 (AF) ④b) 一般道路のみ利用 (AA)

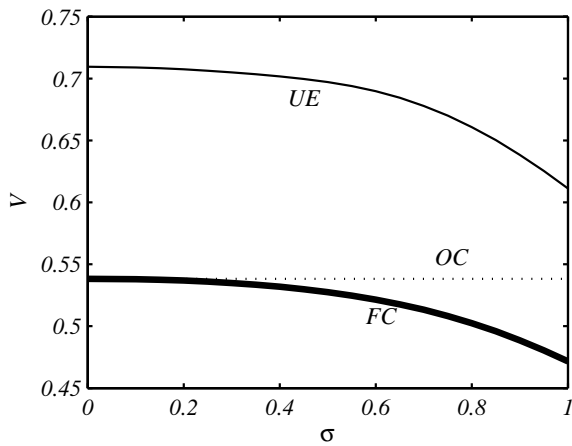


図-12 不確実性の大きさ σ と各配分パターンの効率性

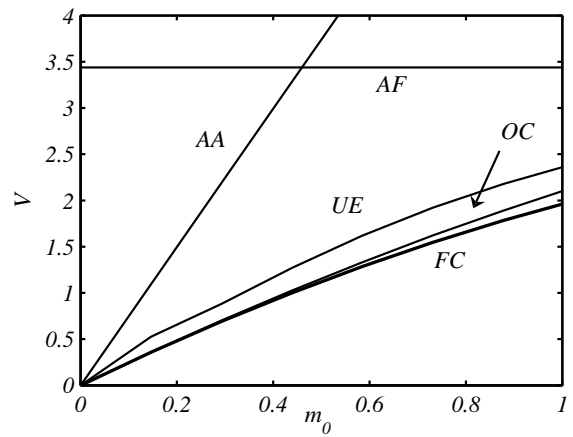


図-13 初期旅行時間 m_0 と各配分パターンの効率性

によって評価できる．続く (3), (4) では，これらの期待総走行時間を比較することで，動的ランプ制御の効率性およびリアルタイム観測情報の価値を分析しよう．なお，各配分パターン下での期待総旅行時間 (28) の詳細な評価方法については，付録 III を参照されたい．

(3) フィードバック型ランプ制御の効率性

まず，不確実性の大きさによる各配分パターンの効率性の違いを，図 12 に示す．この図は，横軸に $m(t)$ のボラティリティ σ をとり，縦軸に，FC 配分，OC 配分および UE 配分の下での期待総旅行時間を，それぞれ，太い実線 (FC)，点線 (OC) および細い実線 (UE) でプロットしたものである．なお，これらの値に比べて AF および AA 配分の下での期待旅行時間 V_{AF}, V_{AA} は極めて大きいので，この図では省略している．図 12 より，以下の 3 つが判る．まず，任意の大きさの σ について， $V_{FC} \leq V_{OC} \leq V_{UE}$ なる関係が常に成立しており，本稿で構築したフィードバック型ランプ制御が最も効率的であることが判る．次に，フィードバック制御およびオープンループ制御下での期待総旅行時間 V_{FC}, V_{OC} は，制御を行わない場合の期待総旅行時間 V_{UE} を大きく下回る．このことは，リアルタイム観測情報を活用する・しないに関わらず，動的ランプ制御によって，レッセ・フェールよりも期待総旅行時間を大幅に減少させられることを示唆している．最後に，リアルタイム観測情報を活用する FC 配分および UE 配分の下では，いずれも， σ が増加するにつれ，期待総旅行時間が減少する．これは，不確実性が大きいほど制御におけるリアルタイム観測情報の価値が高まることを意味している．その詳細は (5) 節で後述する．

次に，一般道旅行時間の初期値 m_0 に対する各制御の効率性を図 13 に示す．この図は，横軸に m_0 をとり，縦軸に 5 つの配分パターン (FC, OC, UE, AF, AA) の期待

総旅行時間をそれぞれ，プロットしたものである．本章では，一般道旅行時間 $m(t)$ の動学として式 (26) の幾何 Brown 運動を想定しているため，この図は，以下の 2 点の特徴を持つ：まず， $m_0 = 0$ の場合，任意の時刻において $m(t) = 0$ となる．このため，AF 配分を除く全ての配分パターンにおいて，期待総旅行時間は原点を通過する．次に，幾何 Brown 運動は任意の時刻 t において $\bar{m}(t) = m_0$ なる性質を持つ．これより，AA 配分の下での期待総旅行時間は， $V_{AA} \equiv \mathbb{E}\left[\int_0^T m_0 q(t) dt\right] = m_0 Q$ であり， m_0 に関して線形となる (ここで， Q は計画期間全体での総交通需要であり，本章の例では $Q = 0.75$ (千台) である)．一方，AF 配分下での旅行時間 V_{AF} は， m_0 によらない水平な直線で表わされる．

図 13 より，以下の 3 点が判る．第 1 に，図 12 と同様，FC 配分下での期待総旅行時間 V_{FC} は他の配分下でのそれよりも常に小さい．これは，フィードバック制御は，一般道旅行時間の初期値 m_0 によらず，最も効率的であることを意味する．第 2 に，制御戦略下での期待総旅行時間は V_{FC}, V_{OC} は，レッセ・フェールでの旅行時間 V_{UE}, V_{AA}, V_{AF} に比べて小さい．このことは，リアルタイム観測情報の活用いかんに関わらず，動的ランプ制御が常に有効であることを示唆している．最後に，UE 配分下での期待総旅行時間 V_{UE} は，動的ランプ制御下での V_{FC}, V_{OC} よりも大きいものの，リアルタイム制御情報を公開しない場合の期待総旅行時間 V_{AA}, V_{AF} に比べ，極めて小さい．これは，的確なランプ制御が行えない場合であっても，リアルタイム観測情報を利用者に公開するだけで，ネットワーク全体の効率性を改善できることを示唆している．

なお，リアルタイム観測情報が公開されず，各利用者が自らの経験に基づいて各時刻での交通状態 $[m(t), x(t)]$ を予想するような現実的な状況においては，その期待総旅行時間は，3 つの曲線 V_{AA}, V_{AF} および V_{UE} で囲ま

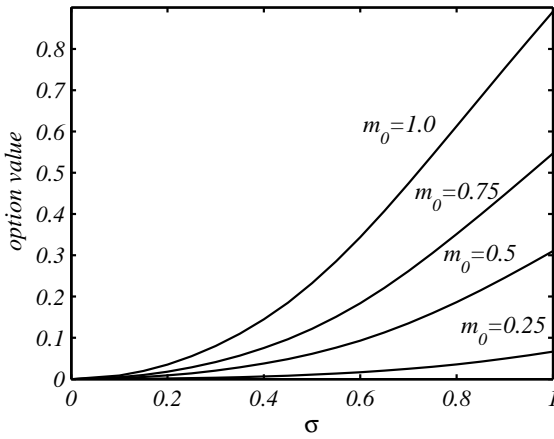


図-14 動的ランプ制御におけるオプション価値

れた領域内に描かれる (i.e. AF および AA 配分よりは効率的だが UE 配分よりは非効率である) ことが予想される。このことは、上述した動的ランプ制御の有効性や、リアルタイム観測情報の活用による効率性が、AA 配分や AF 配分のような極端なケースに限らず成立する、一般的な性質であることを示唆している。

(4) 動的ランプ制御におけるリアルタイム情報の価値

前節では、リアルタイム観測情報を活用したフィードバック制御 (FC) の方が、従来型のオープンループ制御 (OC) よりも効率的である (i.e. $V_{FC} < V_{OC}$) ことが示された。この理由は以下のように説明される：まず、一般道旅行時間 $m(t)$ は確率的に変動するため、その期待値 $\bar{m}(t)$ よりも小さな (あるいは大きな) 値を取る機会が存在する。そして、FC では、この機会をリアルタイムに観測し、即座に誘導交通量に反映させることでネットワーク全体の効率性を改善できる。これに対し、OC では $m(t)$ がその期待値から乖離する機会を活用できない。

換言すれば、FC において、管理者は、“リアルタイムに観測される $m(t)$ に対して状況依存的に制御を切り替えられるオプション (権利)” を有していると思える。そして、FC 配分と OC 配分の期待総旅行時間の差 $\Delta V_{OC-FC} \equiv V_{OC} - V_{FC}$ は、このオプション価値を、期待総旅行時間で測ったものと解釈できる。図 14 は、横軸に不確実性の大きさ σ をとり、異なる一般道旅行時間の初期値 $m_0 = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ について、それぞれ、オプション価値 ΔV_{OC-FC} をプロットしたものである。この図より、以下の 2 点が判る。まず、一般道旅行時間の不確実性 σ が大きいほど、オプション価値が増加する。これは、 σ が大きいほど $m(t)$ が小さな値を取る確率が高くなり、それをフィードバック制御によって活かすことでネットワーク全体の効率性を高められることを反映している。次に、オプション価値は m_0 について

単調に増加する。これは、式 (26) の幾何 Brown 運動の性質より、 $m(t)$ が大きいほど不確実性が大きくなるためである。これらの結果は、いずれも、不確実性下での投資意思決定問題を扱うリアル・オプション分野における知見と整合的である。

6. おわりに

本研究では、2 リンク・ネットワークを対象とした動的システム最適配分問題を旅行時間の動的な不確実性を考慮した枠組へ一般化し、その最適制御ルールの特性およびメカニズムを明らかにした。具体的には、まず、高速道路と一般道路の 2 リンクで構成されるネットワークを考え、従来の動的システム (DSO: *Dynamic System Optimization*) 配分問題を一般道路の旅行時間が確率動的に変動する枠組へと一般化した；そして、この確率的 DSO 配分問題を確率制御問題として定式化した。次に、こうして定式化された問題の最適性条件が一般化相補性問題 (GLCP: *Generalized Linear Complementarity Problem*) として記述できることを明らかにした。この分析結果に基づき、確率的 DSO 配分問題の数値解を効率的に求めるアルゴリズムを開発した。最後に、この解法を用いた数値解析によって、最適制御ルールおよびリアルタイム観測情報による動的ランプ制御のオプション価値の性質およびメカニズムを明らかにした。本枠組および提案アルゴリズムは、一般道路旅行時間 $m(t)$ のみならずネットワーク全体の交通需要 $q(t)$ の動的な不確実性を考慮した場合へも容易に拡張可能である。その詳細は山崎・赤松¹¹⁾で報告されている。

本枠組の拡張方向の一つとして、道路管理者のリスク回避性向を考慮したモデルの分析が挙げられる。本研究では、総旅行時間の期待値のみを効率性の評価基準とした。しかし、一般に、2 つの動的ランプ制御ルールを考えたとき、両者の期待総旅行時間が大きく違わなければより分散の小さな (i.e. ロバストな) 制御の方が好まれることは容易に想像できる。こうした問題を扱うためには、管理者がリスク回避的不効用関数を持つと仮定し、その期待不効用最小化問題として動的ランプ制御問題を記述・分析する必要がある。こうした拡張の詳細やその分析結果については、Akamatsu and Nagae¹²⁾を参照されたい。

付録 I Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (6) の導出

本章では、確率的 DSO 問題 [SDSO] の最適性条件である HJB (*Hamilton-Jacobi-Bellman*) 方程式 (6) の導出方法を解説する。本研究で用いる確率過程・確率制御

の理論体系は、連続時間-連続状態の枠組の下で構築・洗練されてきたものであるが、その基本的発想は、工学系分野でもよく知られる離散時間の枠組においても、ほぼ同じである。そこで、本章では、まず、離散的枠組の下で問題 [SDSO] を再定式化し、HJB 方程式の離散時間版を求める。そして、離散間隔の極限をとることで、連続時間での HJB 方程式 (6) を導く。なお、本章の目的は、確率制御分野の基礎的な用語・理論に馴染みのない読者にも本モデルの基本的概念を理解してもらうことである。そのため、以下の解説には、直感的理解を容易にするために数学的厳密性を犠牲にした表現が含まれることに注意されたい。

まず、計画期間 $[0, T]$ を、 $\{t_0, t_1, \dots, t_I\}$ なる I 個の等間隔な離散時点に分割し、初期時点 $t_0 = 0$ 、終了時点 $t_I = T$ 、時点間の間隔を $\Delta t \equiv t_{i+1} - t_i$ とする。時点 t_i における高速道路上の待ち行列長を x_i 、一般道路の旅行時間を m_i で表わし、時点 t_i で高速道路に誘導される単位時間あたりの交通量を λ_i で表そう。このとき、待ち行列進展条件 (1) は、

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i = \eta(x, \lambda_i) \Delta t \quad (1')$$

と書き直せる。ここで、 $\eta(x, \lambda)$ は、以下の式で定義される不連続関数である。

$$\eta(x, \lambda) \equiv \begin{cases} \lambda - \mu & \text{if } x > 0 \\ \lambda - \mu & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda \geq \mu \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ and } \lambda < \mu \end{cases} \quad (I.1)$$

同様に、一般道旅行時間が従う確率微分方程式 (2) は、以下のように表現し直せる。

$$\Delta m_i \equiv m_{i+1} - m_i = \alpha(t_i, m_i) \Delta t + \sigma(t_i, m_i) \Delta \tilde{W}_i. \quad (2')$$

ここで、 $\Delta \tilde{W}_i$ は、互いに独立で同一な標準正規分布に従う確率変数列 $\tilde{\epsilon}_0, \tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_{I-1}$ を用いて、

$$\Delta \tilde{W}_i \equiv \tilde{\epsilon}_i \sqrt{\Delta t} \quad (I.2)$$

と定義される。これは、 $\{\Delta \tilde{W}_i | i = 0, 1, \dots, I-1\}$ が、互いに独立で同一な以下の正規分布：

$$\mathbb{E}[\Delta \tilde{W}_i] = 0, \quad \text{Var}[\Delta \tilde{W}_i] = \Delta t \quad (I.3)$$

に従う確率変数列となることを意味している。

この枠組の下で、問題 [SDSO] は、以下のように表現し直される。

$$[\text{SDSO-d}] \quad \min_{\lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{I-1} f_i(x_i, m_i, \lambda_i) \Delta t \middle| (0, 0, m_0) \right],$$

ここで、 $f_i(x_i, m_i, \lambda_i)$ は、状態 (t_i, x_i, m_i) において誘導交通フローを λ_i としたときの総旅行時間の時間増加率であり、以下の式で定義される。

$$f_i(x_i, m_i, \lambda_i) \equiv \lambda_i \frac{x_i}{\mu} + (q_i - \lambda_i) m_i \quad (I.4)$$

この式の右辺第 1 項および第 2 項は、それぞれ、高速道路および一般道路上で発生する総旅行時間である。

$\mathbb{E}[\cdot | (t_i, x, m)]$ は、状態 $(t_i, x_i = x, m_i = m)$ の下での条件付期待演算を表わす。

問題 [SDSO-d] の、状態 (t_i, x, m) における最適値関数を、以下の式で定義する：

$$V_i(x, m) \equiv \min_{\lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{j=i}^{I-1} f_j(x_j, m_j, \lambda_j) \Delta t \middle| (t_i, x, m) \right]. \quad (5')$$

式 (5') の和記号は、以下のように、時点 $j = i$ と、時点 $j = i + 1$ 以降とに分解できる。

$$V_i(x, m) = \min_{\lambda} \mathbb{E} \left[f_i(x, m, \lambda_i) \Delta t + \sum_{j=i+1}^{I-1} f_j(x_j, m_j, \lambda_j) \Delta t \middle| (t_i, x, m) \right]$$

ここで、右辺の期待値演算内の第 2 項を、条件付期待演算のネスト構造：

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E}[\cdot | (t_{i+1}, x_{i+1}, m_{i+1})] \middle| (t_i, x_i, m_i) \right] = \mathbb{E}[\cdot | (t_i, x_i, m_i)] \quad (I.5)$$

を用いて書き直せば、以下を得る：

$$V_i(x, m) = \min_{\lambda_i} f_i(x, m, \lambda_i) \Delta t + \mathbb{E} \left[\min_{\lambda} \mathbb{E} \left[\sum_{j=i+1}^{I-1} f_j(x_j, m_j, \lambda_j) \Delta t \middle| (t_{i+1}, x_{i+1}, m_{i+1}) \right] \middle| (t_i, x, m) \right]$$

を得る。この式の右辺第 2 項に、最適値関数の定義式 (5') を代入すれば、離散時間の枠組下で $V_i(x, m)$ が従う以下の HJB 方程式を得る。

$$V_i(x, m) = \min_{\lambda_i} f_i(x, m, \lambda_i) \Delta t + \mathbb{E} \left[V_{i+1}(x_{i+1}, m_{i+1}) \middle| (t_i, x, m) \right] \quad (6')$$

最後に、離散時間での HJB 方程式 (6') の極限として、連続時間での HJB 方程式 (6) が導出できることを示そう。最適値関数を状態 (t_i, x, m) のまわりで Taylor 展開すれば、

$$\begin{aligned} V_{i+1}(x_{i+1}, m_{i+1}) &= V_i(x, m) \\ &+ \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial m} \Delta m_i \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i(x, m)}{\partial x^2} (\Delta x_i)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i(x, m)}{\partial m^2} (\Delta m_i)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 V_i(x, m)}{\partial x \partial m} (\Delta x_i) (\Delta m_i) + \dots \end{aligned}$$

を得る。 Δx_i および Δm_i に定義式 (1'), (2') を代入し、 $\Delta \tilde{W}_i$ の確率的性質 (I.3) を用いれば、

$$\begin{aligned} V_{i+1}(x_{i+1}, m_{i+1}) &= \\ &V_i(x, m) + \left\{ \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial t} + \eta(x, \lambda_i) \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial x} \right. \\ &+ \alpha(t_i, m) \frac{\partial V_i(x, m)}{\partial m} + \frac{1}{2} \{ \sigma(t_i, m) \}^2 \frac{\partial^2 V_i(x, m)}{\partial m^2} \left. \right\} \Delta t \\ &+ o(\Delta t). \quad (I.6) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\eta(\cdot)$ は式 (I.1) で定義される、 x および λ についての既知関数である。式 (I.6) の右辺最終項の $o(\Delta t)$ は、 Δt の 2 次以上の項、すなわち、 Δt を 0 に近づけると、 $o(\Delta t)$ の項は Δt よりも早く 0 に近づき項である (i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} o(\Delta t) / (\Delta t) = 0$)。式 (I.6) を離散時間

版 HJB 方程式 (6') に代入し, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとれば, 連続時間での HJB 方程式 (6) が得られる.

付録 II 数値解法

(1) 偏微分作用素の離散近似

本節では, 問題 [GLCP-A], [GLCP-B], [PDE-C] に現われる偏微分作用素:

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(t, m) \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2} \{\sigma(t, m)\}^2 \frac{\partial^2}{\partial m^2} \quad (\text{II.1})$$

$$\mathcal{L}_{q-\mu} \equiv \mathcal{L}_0 + (q - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{II.2})$$

$$\mathcal{L}_{-\mu} \equiv \mathcal{L}_0 - \mu \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{II.3})$$

の具体的な離散近似の例を示す.

偏微分方程式の差分解法で一般的に用いられる Crank-Nicolson 法を差分スキームとして採用すれば, 最適値関数の t, x, m についての導関数は, それぞれ, 以下のように近似される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t^i, x^j, m^k)}{\partial t} &\approx \frac{V^{i+1, j, k} - V^{i, j, k}}{\Delta t} \\ \frac{\partial V(t^i, x^j, m^k)}{\partial x} &\approx \frac{V^{i+1, j+1, k} - V^{i+1, j-1, k} + V^{i, j+1, k} - V^{i, j-1, k}}{4\Delta x} \\ \frac{\partial V(t^i, x^j, m^k)}{\partial m} &\approx \frac{V^{i+1, j, k+1} - V^{i+1, j, k-1} + V^{i, j, k+1} - V^{i, j, k-1}}{4\Delta m} \\ \frac{\partial^2 V(t^i, x^j, m^k)}{\partial m^2} &\approx \frac{V^{i+1, j, k+1} - 2V^{i+1, j, k} + V^{i+1, j, k-1}}{2(\Delta m)^2} \\ &\quad + \frac{V^{i, j, k+1} - 2V^{i, j, k} + V^{i, j, k-1}}{2(\Delta m)^2} \end{aligned}$$

これらの離散近似式を式 (II.1) に代入すれば,

$$\mathcal{L}_0 V(t^i, x, m) \approx \mathcal{L}_0^i V^{i, j} + \mathcal{M}_0^i V^{i+1, j}, \quad \forall i, \forall j,$$

を得る. ここで, $\mathcal{L}_0^i, \mathcal{M}_0^i$ は, それぞれ, JK × JK ブロック対角行列で, その対角ブロック要素が, それぞれ, 以下の J × J 三項帯行列 $L_0^{i,0}, M_0^{i,0}$ で表わされる.

$$\mathcal{L}_0^{i,0} \equiv \begin{bmatrix} L_b^{i,1} & L_c^{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ L_a^{i,2} & L_b^{i,2} & L_c^{i,2} & \cdots & 0 \\ 0 & L_a^{i,3} & L_b^{i,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_b^{i,K} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_0^{i,0} \equiv \begin{bmatrix} M_b^{i,1} & M_c^{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ M_a^{i,2} & M_b^{i,2} & M_c^{i,2} & \cdots & 0 \\ 0 & M_a^{i,3} & M_b^{i,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_b^{i,K} \end{bmatrix}$$

各行列の要素は, $\mathcal{A}^{i,k} \equiv \frac{1}{2} \frac{\alpha(t^i, m^k)}{\Delta m}$, $\mathcal{B}^{i,k} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma(t^i, m^k)}{\Delta m} \right)^2$ とすれば, 以下のように表現される.

$$\begin{aligned} L_a^{i,k} &\equiv -\mathcal{A}^{i,k} + \mathcal{B}^{i,k}, & L_b^{i,k} &\equiv -2\mathcal{B}^{i,k} - \frac{1}{\Delta t}, & L_c^{i,k} &\equiv \mathcal{A}^{i,k} + \mathcal{B}^{i,k}, \\ M_a^{i,k} &\equiv -\mathcal{A}^{i,k} + \mathcal{B}^{i,k}, & M_b^{i,k} &\equiv -2\mathcal{B}^{i,k} + \frac{1}{\Delta t}, & M_c^{i,k} &\equiv \mathcal{A}^{i,k} + \mathcal{B}^{i,k}. \end{aligned}$$

同様に, 式 (II.2) および (II.3) は, 以下のように差分近似できる.

$$\mathcal{L}_{q-\mu} V(t^i, x, m) \approx L_{q-\mu}^i V^i + M_{q-\mu}^i V^{i+1}, \quad \forall i, \quad (\text{II.4})$$

$$\mathcal{L}_{-\mu} V(t^i, x, m) \approx L_{-\mu}^i V^i + M_{-\mu}^i V^{i+1}, \quad \forall i, \quad (\text{II.5})$$

ここで, $L_{q-\mu}^i, M_{q-\mu}^i, L_{-\mu}^i$ および $M_{-\mu}^i$ は, いずれも, JK × JK 三項ブロック帯行列で,

$$\begin{aligned} L_{q-\mu}^i &\equiv L_0^i + (q - \mu)E, & M_{q-\mu}^i &\equiv M_0^i + (q - \mu)E, & \forall i, \\ L_{-\mu}^i &\equiv L_0^i - \mu E, & M_{-\mu}^i &\equiv M_0^i - \mu E, & \forall i, \end{aligned}$$

と定義される. ただし, E は JK × JK ブロック行列で, J 次元単位行列 I_J と, 全ての要素が 0 なる J × J 行列 $\mathbf{0}_J$ を用いた, 以下の式で定義される.

$$E \equiv \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_J & I_J & \mathbf{0}_J & \cdots & \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J \\ -I_J & \mathbf{0}_J & I_J & \cdots & \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J & \cdots & \mathbf{0}_J & I_J \\ \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J & \mathbf{0}_J & \cdots & -I_J & \mathbf{0}_J \end{bmatrix}. \quad (\text{II.6})$$

(2) サブ問題の解法: smoothing function アプローチ

サブ問題 [GLCP-Aⁱ] および [GLCP-Bⁱ] は, 以下の一般化線形相補性問題 (GLCP: *Generalized Linear Complementarity Problem*) として一般的に記述できる.

[GLCP] Find $X \in \mathcal{R}^N$ such that

$$F(X) \cdot G(X) = 0, \quad F(X) \geq \mathbf{0}, \quad G(X) \geq \mathbf{0}.$$

ただし, N は未知変数次元で, $F, G: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}^N$ は X についての既知関数である. この問題 [GLCP] に対する Peng and Lin⁹⁾ の求解法は, 以下のようにまとめられる.

[Algo-GLCP]

Step 0. Given constant numbers $\epsilon_0 \geq 0$, $\omega \in (0, 1)$, $\delta_1 \in (0, 1)$, $\delta_2 \in (0, 1)$, $\delta_3 \in (0, 1 - \delta_2)$.

Choose any $\theta^{(0)} > 0$, $X^{(0)} \in \mathcal{R}^N$ and $\gamma \geq \frac{\|H(X^{(0)}, \theta^{(0)})\|}{\min\{\theta^{(0)}, 1\}}$.

Step 1. The Newton step of $H(X, \theta^{(k)})$:

If $\nabla_X H(X^{(k)}, \theta^{(k)})$ is singular, STOP. (the algorithm fails);

else if $\|H(X^{(k)})\| \leq \epsilon_0$, STOP. ($X^{(k)}$ is an appropriate solution of [GLCP]);

Otherwise, compute a Newton step $d^{(k)}$ satisfying

$$\nabla H(X^{(k)}, \theta^{(k)}) d^{(k)} + H(X^{(k)}, \theta^{(k)}) = \mathbf{0}.$$

Step 2. Compute $X^{(k+1)}$:

Let $h^{(k)}$ be the maximum value of $\{1, \delta_1, \delta_1^2, \dots\}$ such that

$$\|H(X^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}, \theta^{(k)})\| \leq (1 - \omega h^{(k)}) \min\{\theta^{(k)}, 1\} \gamma,$$

and $X^{(k+1)} := X^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}$.

Step 3. Compute $\theta^{(k+1)}$:

If $(X^{(k+1)}, \min\{\delta_3, \theta^{(k)}\} \theta^{(k)}) \in \mathcal{N}(\gamma, \min\{\delta_3, \theta^{(k)}\} \theta^{(k)})$ then set $v^{(k)} := 1 - \min\{\delta_3, \theta^{(k)}\}$;

Otherwise $v^{(k)}$ be the maximum value of $\{\delta_2, \delta_2^2, \dots\}$ such that

$$(X^{(k+1)}, (1 - v^{(k)}) \theta^{(k)}) \in \mathcal{N}(\gamma, (1 - v^{(k)}) \theta^{(k)}).$$

Set $\theta^{(k+1)} := (1 - v^{(k)}) \theta^{(k)}$.

Step 4. $k := k + 1$, return to Step 1.

ここで,

$$N(\beta, \theta) \equiv \{(X, \theta) \in \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}_+ \mid \|H(X, \theta)\| \leq \beta \min\{\theta, 1\}\}.$$

$H: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}^N$ および $\mathcal{H}: \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}_{++} \rightarrow \mathcal{R}^N$ はベクトル演算子で, その n 番目要素が, それぞれ, 以下の式で定義される.

$$[H(X)]_n \equiv \min\{F_n(X), G_n(X)\},$$

$$[\mathcal{H}(X, \theta)]_n \equiv -\theta \ln \left(\exp \left[-\frac{F_n(X)}{\theta} \right] + \exp \left[-\frac{G_n(X)}{\theta} \right] \right).$$

付録 III 各配分パターンの効率性の評価方法

本章では, FC 配分以外の配分パターン $p \in \{\text{OC, UE, AF, AA}\}$ の下での効率性の評価方法を示す. ある配分パターン $\lambda_p \equiv \{\lambda_p(t, x, m)\}$ が与えられた時の期待総旅行時間は以下の式で定義される.

$$V_p(x_0, m_0) \equiv \mathbb{E} \left[\int_0^T f_p(t, x, m) dt \mid (0, x_0, m_0) \right], \quad (\text{III.1})$$

ここで, f_p は, 配分パターン λ_p の下での状態 (t, x, m) における旅行時間の時間増加率であり,

$$f_p(t, x, m) \equiv \lambda_p(t, x, m) \frac{x}{\mu} + [q(t) - \lambda_p(t, x, m)] m \quad (\text{III.2})$$

と定義される.

まず, 式 (III.1) は, 配分パターン λ_p を与件とすれば, 以下のように時間ごとに分解できる:

$$V_p(x_0, m_0) = \int_0^T \mathbb{E} [f_p(t, x, m) \mid (0, x_0, m_0)] dt. \quad (\text{III.3})$$

そして, f_p の期待値は, 以下のように書き下せる:

$$\mathbb{E} [f_p(t, x, m) \mid (0, x_0, m_0)] = \int_0^\infty \int_0^\infty f_p(t, x, m) \phi_p(t, x, m \mid x_0, m_0) dx dm, \quad (\text{III.4})$$

ただし, $\phi_p(t, x, m \mid 0, x_0, m_0)$ は, 配分パターン λ_p の下で初期状態 $(0, x_0, m_0)$ が与えられたときの, 時刻 t における交通状態 (x, m) の条件付確率密度関数である.

そして, 式 (III.3) は, 離散的枠組の下では,

$$V_p(x^{j_0}, m^{k_0}) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{r=1}^J \sum_{s=1}^K f_p^{i,j,k} \phi_p^{i,j,k}(j_0, k_0) \Delta t \quad (\text{III.5})$$

と書き直せる. ここで, $f_p^{i,j,k}$ および $\phi_p^{i,j,k}(j_0, k_0)$ は,

$$f_p^{i,j,k} \equiv f_p(t^i, x^j, m^k),$$

$$\phi_p^{i,j,k}(j_0, k_0) \equiv \int_{x^j}^{x^{j+\Delta x}} \int_{m^k}^{m^{k+\Delta m}} \phi_p(t^i, x^j, m^k \mid 0, x^{j_0}, m^{k_0}) dx dm$$

と定義される. 従って, 式 (III.1) の期待総旅行時間を計算することは, $\phi_p^{i,j,k}(j_0, k_0)$ を求めることに帰着する.

時刻 t^i での条件付確率関数を JK 次元列ベクトル $\phi_p^i(\cdot) \equiv [\phi_p^{i,1,1}(\cdot), \dots, \phi_p^{i,J,1}(\cdot), \dots, \phi_p^{i,1,K}(\cdot), \dots, \phi_p^{i,J,K}(\cdot)]'$ で表現しよう. ただし, 初期条件 (j_0, k_0) に関する表現を

(\cdot) と省略している. このとき, 確率関数 $\phi_p^i(\cdot)$ は, 以下の線形方程式に従う⁷:

$$\phi_p^{i+1}(\cdot) = Q_p^i \phi_p^i(\cdot) \quad (\text{III.7})$$

ここで, Q_p^i は, JK \times JK 行列であり, 配分パターン λ_p の下での x および m の遷移方程式 (1) および (2) から一意に決定される.

式 (III.7) は, 確率関数列 $\{\phi_p^0(\cdot), \phi_p^1(\cdot), \dots, \phi_p^{I-1}(\cdot)\}$ が非定常離散 Markov モデルとして表現でき, その遷移行列 Q_p^i が, 配分パターン λ_p の下での交通状態 (x, m) の遷移方程式 (1), (2) が決定できることを意味している. ここで, 初期状態が (j_0, m_0) であるとき,

$$\phi_p^{0,j,k}(j_0, k_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = j_0 \text{ and } k = k_0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

となることが明らかであるから, これを初期条件として逐次的に式 (III.7) を評価することで, 配分パターン λ_p の下での任意の時刻における交通状態の確率関数 $\phi_p \equiv \{\phi_p^i\}$ を求められる. そして, この ϕ_p を式 (III.5) に代入すれば, 任意の配分パターン λ_p の下での期待総旅行時間を求められる.

参考文献

- 1) Friesz, T., Luque, J., Tobin, R. and Wie, B.: Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem, *Operations Research*, Vol. 37, pp. 893–901, 1989.
- 2) Ziliaskopoulos, A.: A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem, *Transportation Science*, Vol. 34, pp. 1–12, 2000.
- 3) Daganzo, C. F.: The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research B*, Vol. 4, No. 269–287, 1994.
- 4) Lovell, D. J. and Daganzo, C. F.: Access control on networks with unique origin-destination paths, *Transportation Research B*, Vol. 34, pp. 185–202, 2000.
- 5) Erera, A., Daganzo, C. and Lovell, D.: Access control problem on capacitated FIFO networks with unique origin-destination paths is hard, *Operations Research*, Vol. 50, pp. 736–743, 2002.
- 6) 桑原雅夫, 吉井稔雄, 熊谷香太郎: 動的システム最適配分とランプ流入制御に関する研究—簡略ネットワークにおける基礎的分析—, 土木学会論文集, No. 667/IV, pp. 59–71, 2001.
- 7) Muñoz, J. C. and Laval, J. A.: System optimum dynamic traffic assignment graphical solution method for a congested freeway and one destination, *Transportation Research B*, Vol. 40, pp. 1–15, 2006.

⁷ 式 (III.7) は, 2 時点 t^i, t^{i+1} の確率関数間を関係を表わす以下の方程式:

$$L_p^i \phi_p^i + M_p^i \phi_p^{i+1} = 0 \quad (\text{III.6})$$

を ϕ^i について解くことで求められる. ここで, L_p^i および M_p^i は, それぞれ, JK \times JK のブロック三項帯行列であり, x および m の遷移方程式 (1) および (2) から一意に決定される. この式 (III.6) は, 連続時間-連続状態の枠組における確率密度関数の時間進展を表わす Fokker-Planck 方程式 (Kolmogorov の前進方程式) に対応する.

- 8) Ferris, M. C. and Pang, J.-S.: Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 669–713, 1997.
- 9) Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533–563, 1999.
- 10) Jiang, H., Fukushima, M., Qi, L. and Sun, D.: A trust region method for solving generalized complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 8, No. 1, pp. 140–157, 1998.
- 11) 山崎周一, 赤松隆: 不確実性に対するリスク回避度を考慮した動的な交通システム最適配分, 土木計画学論文集, Vol. 23, No. 4, pp. 963–972, 2006.
- 12) Akamatsu, T. and Nagae, T.: Dynamic ramp metering strategies for risk averse system optimal assignment, 2007, 17th International Symposium of Transportation and Traffic Theory (in press).

(2006.10.10 受付)

Dynamic System Optimal Traffic Control based on Realtime Observation of Stochastic Travel Time

Takeshi NAGAE and Takashi AKAMATSU

This study reveals basic properties of dynamic system optimal (DSO) assignment problem in a 2-link network, which consists of a freeway with a single bottleneck and an arterial road with stochastic travel time. We first formulate a DSO problem under travel time uncertainty as a stochastic control problem, in which the manager controls the freeway inflow rate at the ramp according to the rule based on the realtime observation of the traffic condition (i.e. the queue length and the travel time). Our analysis uncover that the optimality condition of the problem reduces to a dynamical system of GLCP (generalized linear complementarity problem). This enables us to develop an efficient solution algorithm for the stochastic DSO assignment problem. Numerical analysis obtain an improvement in expected total travel time by proposed feedback dynamic ramp metering, which can be interpreted as an option value of the realtime observation.