一般ネットワークにおける ボトルネック通行権取引制度

赤松 隆[1]

[1]正会員 東北大学大学院教授 情報科学研究科 （〒980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6）

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

本研究は，一般構造の交通ネットワークに対する “ボトルネック通行権取引制度 (TBP)” を考察する．TBP は，渋滞解消のための新たなスキームとして赤松・佐藤・Nguyen (2006) によって提案されたが，その理論的特性は，単一ボトルネックを対象とした場合しか明らかにされていない．本稿では，まず，単一ODペアを持つ任意構造のネットワークにおいて，TBP 導入下の均衡状態が最も効率的な資源配分を達成できることを明らかにする．そして，この結果は，多起点・多終点の場合，OD需要が弾性的な場合，利用者の希望到着時刻が分布する場合等のより一般的な状況でも成立することが示される．さらに，混雑料金制とTBP との理論的関係を示した上で，TBP が混雑料金制に対して持つ優位性を明らかにする．

Key Words : *bottleneck congestion*, *dynamic traffic assignment*, *time-space network*, *tradable permit*, *ITS*

1. はじめに

近年の情報通信技術 (ICT) の発展と普及は，従来，コスト・技術的側面から不可能と思われていた様々な経済取引（財・サービス・知識の交換）を可能とした．そして，いまや，インターネット等の “仮想社会” 内のみならず，現実の社会・経済システムに様々な質的変革をもたらす力となりつつある [1]．交通システムへの影響も，その例外ではない．ICT を本格的に活用した広義の *Intelligent Transportation Systems* (ITS) は，新しい適切な制度とセットで導入されれば，道路交通システムの運用効率を飛躍的に向上させるポテンシャルを持っている．

そのような ICT/ITS を活用した近未来型の交通制度として，赤松・佐藤・Nguyen [2] は，“ボトルネック通行権取引制度” を提案した．これは，渋滞が頻発している特定の道路地点（ボトルネック）を対象として，*a)* その地点を特定の時刻のみ通行できる権利（“ボトルネック通行権”）を道路管理者が設定・発行し，*b)* その時刻別の通行権を自由に売買取引できる市場を創設する，という制度である．

この制度の *a)* は，“道路利用の予約制／割当制” [3),4),5),6)] に相当するものである．この制度下では，時刻別通行権の（単位時間当り）発行枚数が，当該ボトルネックへの到着交通流率となる．従って，その発行枚数をボトルネック容量以下に設定すれば，渋滞の発生を完全に抑制できる．ただし，この通行権が道路利用者へ何らかの機械的なルールで配布された（*eg.* “単純割当制”）とすると，利用者は自分の望む時間帯を選択できない．そのような利用者選択の阻害は，必然的に経済的損失を生み，社会的にも望ましいものではない．その様な *a)* のみでは発生する問題点を解決するには，各利用者が通行権を選択できる仕組みを追加すればよい．利用者自身による通行権選択を「市場取引（売買/交換）」によって担保する仕組が，この制度の *b)* である．

これらの仕組み *a)* と *b)* の組合せは，近未来の ICT/ITS を活用すれば技術的には実現可能であり，道路容量という限られた資源の最も効率的な利用スキームであると期待される．実際，赤松等 [2)]，Akamatsu[7)] は，単一のボトルネックを通過する通勤者の出発時刻均衡問題を対象として，この提案制度が以下の様な望ましい特性を持つことを示した：(1) 制度の導入前後を比較すると，道路管理者および全ての道路利用者に対するパレート改善が実現する，(2) 制度導入後の均衡状態は，社会的に最も効率的な資源配分（*ie.* パレート最適な資源配分）を達成できる，(3) 制度導入後の均衡状態では，*self-financing* 原則が成立する（*ie.* 通行権販売総額は，社会的に最適な容量増強に必要な投資費用額と一致する）．

ボトルネック通行権取引制度がもつ上記の特性は，あくまでも単一ボトルネック条件下に限定して証明されたものである．また，ボトルネック通行権取引制度の特性

に関する研究は，従来，赤松 等[2]の他には存在しない．従って，多数のボトルネックを持つ一般的な（任意の構造をもつ）ネットワークでもこのような望ましい特性が成立するのか否かは，未解明である．また，一般ネットワークでは，多数のボトルネックの通行権を，どのように設定すべきか（*ie.* 通行権設定箇所，発行枚数の決定法）についても自明ではない課題である．

本稿では，一般ネットワークを対象としたボトルネック通行権取引制度（以下では，“ネットワーク通行権取引制度” と呼ぶ）を考える．そして，その制度の理論的特性を明らかにすることが本研究の目的である．より具体的には，まず，一般ネットワークで通行権取引制度を導入した場合の均衡状態を表現するモデルを提示する．そして，全てのボトルネックに容量と等しい枚数の通行権を発行すれば，“社会的交通費用” が最小化された望ましい状態が実現することを証明する．さらに，従来から代表的な渋滞解消策と考えられてきた混雑料金制とネットワーク通行権取引制の理論的関係を示す．そして，各制度実行に必要な情報量および効率性を比較し，後者が前者に対して持つ優位性を明らかにする．

本論文の構成は，以下の通りである．まず，続く第 2 章では，ネットワーク通行権取引制度の概要及び以降の解析の前提条件を述べる．第 3 章では，提案制度導入下で実現する均衡状態をモデル化し，第 4 章では，それをより扱いやすい *arc-node* 形式の表現に変換する．第 5 章では，提案制度で実現する均衡状態の効率性を調べる．そのために，まず，社会的最適配分問題を定式化し，その最適状態と均衡状態が一致することを明らかにする．さらに，“時空間ネットワーク” を構築すれば，その最適状態の *feasibility* の確認および最適解の計算が容易に実行できることを示す．第 6 章では，提案制度と最適混雑料金制度との関係を議論する．ここでは，完全情報下での両制度の等価性および不完全情報下での提案制度の優位性を示す．第 7 章では，いくつかの拡張分析を示す．より具体的には，多起点・多終点問題への拡張，及び，最適容量と最適配分の同時決定問題（*ie. Self-financing* 問題）を検討する．最後に，第 8 章では，本研究のまとめと今後の課題を示す．

2. ネットワーク通行権取引制度

(1) 分析対象とする交通空間条件

本稿では，一般的な（*ie.* 任意のリンク・ノード接続構造を持つ）ネットワーク上の動的な交通流を考える．そのネットワークのノードの集合を N, 有向リンクの集合を L と書く．ノード集合 N は，その部分集合として，交通流（利用者のトリップ）が発生する起点 (Origin)の集合 O，利用者がトリップを終了する終点 (Destination) の集合 D を含む．N の各要素（ノード）は，整数の連番 i で区別され， L の各要素（リンク）は，その上流側ノード i と下流側ノード j の組 (i, j) で区別される．交通トリップの起点・終点ペア (OD ペア) の集合を W と書く．第 3〜6 章では，記号の煩雑さを避け，理論内容を判りやすく提示するために，OD ペアが単一（起点，終点ともに 1 個）の場合を扱う．第 7 章では，その結果が，多起点・多終点の一般的な OD パターンを持つネットワークにも拡張できることを示す．

ネットワークの各リンクは，“自由走行区間” と一つの “ボトルネック区間” から構成されていると仮定する．リンク (i, j) の自由走行区間の旅行時間は定数（交通量や時刻に依存しない一定値）t_{ij} とし，ボトルネック区間は交通容量 μ_{ij} を持つ *point queue* モデルで表現されると仮定する．なお，ボトルネックが無い道路区間を想定したい場合は，ボトルネックの交通容量を無限大と考えればよい．また，複数ボトルネックの道路区間を想定したい場合は，各ボトルネックに対応したリンクを設定すればよい．従って，リンク毎に 1 つのボトルネックを仮定することは，分析結果の一般性を損なうものではない．

動的な交通流の配分を想定する時間 $[0, T]$ は，十分に長い時間帯が与えられているものとし，その時間帯を I と書く．また，時間帯 I を通じてネットワークを利用する OD 交通需要 Q_{od} は与件とする．

(2) 行動主体

本稿で解析するモデルに表れる主体は，道路ネットワークの管理者と利用者である．道路管理者は，ネットワークで発生しうる交通渋滞を抑制し，社会的な交通費用の最小化を目指す主体である．そのために，道路管理者は，ネットワーク上の全ボトルネック（*ie.* リンク）に対して，“時刻別ボトルネック通行権” を設定・発行する．通行権の定義及びその発行法については，以下の(3)でより詳しく述べる．

利用者は，起点（*eg.* 住宅地）から終点（*eg.* CBD）へ，このネットワークを通過して，毎日 1 回のトリップを行なう主体である．利用者は，自分の不効用（一般化交通費用）が最小となるように，終点到着時刻および経路を選択する．なお，利用者がネットワークを通行するためには，自分の選択する経路上にあるリンクに対応した通行権を “通行権取引市場” で購入する必要がある．従って，終点到着時刻および経路の選択は，時刻別通行権の購入と連動することとなる．通行権取引市場と通行権の購入法については，以下の(3)，(4)で詳述する．また，利用者の不効用の定義は，第 3 章で与えられる．

(3) ボトルネック通行権の設定と発行条件

"時刻別ボトルネック通行権"とは，予め指定されたボトルネック地点を，予め指定された時刻にのみ通行できる権利である．本稿では，道路管理者が，ネットワーク上の全てのボトルネック（*ie.* リンク）に対して，この時刻別ボトルネック通行権を設定できる状況を想定する．すなわち，時刻 t にリンク (i, j) に流入する交通流は，リンク (i, j) の時刻 t 通行権を持っている利用者のみである（*ie.* この通行権を持たない利用者は，このリンクを通行できないと仮定する）．

道路管理者は，各リンク (i,j) の時刻別通行権を，当該リンクの交通容量 μ_{ij} に等しい枚数（単位時間当り）まで発行できるものとする．時刻別通行権の定義により，各リンク (i,j) で利用される時刻別通行権枚数は，そのリンクの流入率となる．従って，この発行条件下では，常に，各リンクの流入率がその交通容量以下となり，渋滞は原理的に発生しない．

(4) ボトルネック通行権の配布と取引市場

道路管理者が発行したボトルネック通行権の利用者への配分法としては，"通行権販売型スキーム" と "通行権配布型スキーム" という 2 つの代表的な方法が考えられる [2)]．前者は，道路管理者が，全てのボトルネック通行権を利用者に市場販売するスキームである．このスキームでは，ボトルネック通行権の販売収入は全て道路管理者に帰着する．後者は，道路管理者が，（利用者間の公平性を考慮した何らかのスキームで）全ての通行権を利用者に無料で配布するスキームである．このスキームでは，配布された通行権の時刻と各利用者の希望到着時刻が一致するとは限らない．そのようなミスマッチが起こった場合には，各利用者が通行権市場で彼らの通行権を取引することができる．その結果，市場メカニズムを通じて，適切な価格体系で，通行権が再配分される．このスキームでは，ボトルネック通行権の取引による所得移転は全て利用者間で行われる．

本稿では，議論の展開を煩雑にしないために，前者の"通行権販売型スキーム"のみを想定する．そして，道路管理者は，リンク（ボトルネック）毎に独立に設けられた "通行権取引市場" で，発行した通行権を販売する．利用者は，これらの取引市場において，自分の希望する到着時刻・経路に応じて必要となるリンクの時刻別通行権を購入する．各リンクの取引市場では，時刻別の通行権に対して，"つけ値競争"（オークション）によって価格と購入者が決定される．この市場は，独占・寡占等の生じない完全競争的市場であり，時刻別通行権の需要量が供給量と一致するように価格が調整されると仮定する．

3．制度導入下での均衡状態

本章では，ネットワーク通行権取引制度の導入後に実現すると考えられる均衡状態をモデル化する．以下では，まず，動的な交通費用に関する条件を整理し，利用者の選択行動モデルを示す．そして，制度導入後に実現する均衡状態を定式化する．なお，本章から第 6 章までは，記号の煩雑さを避けるために，OD ペアが単一のネットワークを解析の対象とする（多起点・多終点の一般的なケースについては，第 7 章で議論する）．

(1) 動的な交通費用に関する関係式

ネットワーク利用者が 1 回のトリップで費やす交通費用は，以下の *a*) ～*c*) の費用から構成される：*a*) 終点への希望到着時刻 s と実際の到着時刻 t との 差異（ズレ）に応じて決まる "スケジュール費用"，*b*) 起点から終点までの旅行時間を金銭換算した "旅行費用"，*c*) 起点から終点までの経路上で支払う必要のある "ボトルネック通行権の購入費用"．

a) の "スケジュール費用" は，終点到着時刻 t のみの関数 $w(t)$ によって与えられる．利用者の希望到着時刻は，皆同じ時刻 s である（*ie.* $w(t)$ は利用者によらず共通）とし，$w(t)$ は $t = s$ で最小値をとる凸関数と仮定する．

b) の "旅行費用" は，経路によって異なる．起終点間の各経路の旅行時間は，その経路上に含まれるリンクの旅行時間の総和である．ただし，各リンク (i,j) の旅行時間は，通行権導入後の 渋滞が発生しない均衡状態では，一定値 t_{ij} である．従って，起終点間の任意の経路 r の旅行時間 T_r も，到着時刻によらず一定である：

$$T_r = \sum_{ij \in L} t_{ij} \delta_{ij,r(o,d)} \tag{3.1}$$

ここで $\delta_{ij,r(o,d)}$ は起終点間経路・リンク接続行列であり，リンク (i,j) が OD ペア (o, d) を結ぶ経路 r に含まれるなら 1，そうでないなら 0 をとる．

c) の "通行権購入費用" は，各リンクの通行権価格が時刻毎に異なるため，経路および利用時刻に依存して変化する．起終点間の経路 r を通行した時の通行権費用は，その経路上に含まれるリンクの通行権価格の総和である．この費用をより正確に表現するために，経路 r を通行し，時刻 t に終点に到着する利用者を考えよう．この利用者が，ノード i からリンク (i, j) を通って終点までに要する旅行時間 $T_{ij,r}$ は，

$$T_{ij,r} = \sum_{k\ell \in L} t_{k\ell} \delta_{k\ell,r(i,d)} \tag{3.2}$$

によって与えられる．ここで，$\delta_{kl,r(i,d)}$ はリンク (k, l) が

ノード i から終点 d への経路 r に含まれるなら 1，そうでないなら 0 をとる経路・リンク接続行列の典型要素である．この利用者がリンク (i,j) に流入する時刻は $t-T_{ij,r}$ であるから，リンク (i,j) を通行するために購入する時刻別通行権の価格は $p_{ij}(t-T_{ij,r})$ である．ここで，$p_{ij}(t)$ は，リンク (i, j) の時刻 t 通行権の価格を表わす．従って，起終点間の経路 r を通行し終点に時刻 t に到着する利用者が支払う通行権購入費用は，

$$P_r(t) = \sum_{ij \in L} p_{ij}(t - T_{ij,r})\, \delta_{ij,r(o,d)} \tag{3.3}$$

である．

$b)$ の旅行時間を金銭換算した旅行費用と $c)$ の通行権費用の和を（経路）交通費用と呼ぶ．経路 r を通行し，終点に時刻 t に到着する利用者の交通費用 $C_r(t)$ は，

$$C_r(t) = P_r(t) + \alpha\, T_r \tag{3.4}$$

で与えられる．ここで，α は旅行時間を金銭費用に換算する時間価値係数である．

（2） 利用者の選択行動

ネットワーク利用者（通勤者）は，スケジュール費用と交通費用の和で定義される “一般化費用” が最小となるような到着時刻および経路を選択する．すなわち，自分の選択が交通費用（通行権価格を含む）に及ぼす影響を無視した *price-taker* として，以下の問題を解く：

$$\min_{t,r}.\ w(t) + C_r(t)\cdot \tag{3.5}$$

この最適化問題は，終点到着時刻 t と経路 r を階層的に選択する 2 段階選択問題とみなすことができる．従って，最適な同時選択 (t^*, r^*) は，下位階層の経路選択問題から上位階層の到着時刻選択問題へ “後向き推論” で解いてゆくことができる．すなわち，まず，仮に上位階層の選択における到着時刻 t を与件とした上で，下位階層の経路選択問題を解く．そして，その（到着時刻別の）経路選択結果：

$$\pi(t) = \min_r.\ C_r(t) \tag{3.6a}$$

$$r^*(t) = \arg.\min_r.\ C_r(t) \tag{3.6b}$$

を用いれば，最適な到着時刻は，上位階層の選択問題のみの解：

$$t^* = \arg.\min_t.\ w(t) + \pi(t) \tag{3.7}$$

として求められる．

（3） 均衡条件

各利用者が，終点到着時刻および経路の選択について毎日，試行錯誤を行った結果，ネットワーク全体の交通流パターンは，均衡状態に達すると仮定する．また，各ボトルネックの通行権市場においても，均衡状態では，時刻別通行権の需要と供給量が一致するように価格が調整される．その均衡状態では，上で示した費用変数間の関係式 (3.1)～(3.4) に加え，以下に示す 6 つの条件が同時に成立する．

1) 経路交通流率と OD 交通流率の間のフロー保存則:

時刻 t に終点に到着する利用者の OD 交通流率 $q(t)$ は，経路別交通流率の和に一致しなければならない：

$$\sum_{r \in R} f_r(t) = q(t) \qquad \forall t \in I \tag{3.8}$$

ここで，$f_r(t)$ は起終点間の経路 r を通って時刻 t に終点に到着する利用者の交通流率，R は起終点間の経路の集合である．

2) 経路選択に関する均衡条件:

上の(2)で述べたように，利用者の最適選択行動は，到着時刻を仮に与件とした経路選択問題から到着時刻選択問題へと “後向き推論”で分解して記述できる．そこで，まず，終点に時刻 t に到着する利用者を考えよう．均衡状態では，これらの利用者の誰もが，自分だけが経路を変更しても交通費用を改善できない（*ie.* 自分の選択を変更するインセンティブを持たない）．すなわち，均衡状態で利用されている経路 r の交通費用 $C_r(t)$ は，経路によらない均衡交通費用 $\pi(t)$ に等しく，選択されない経路では $\pi(t)$ 以上である：

$$\begin{cases} \pi(t) = C_r(t) & if\ f_r(t) > 0 \\ \pi(t) \le C_r(t) & if\ f_r(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I, \forall r \in R \tag{3.9}$$

3) OD 交通流率と OD 利用者数の間のフロー保存則:

全時間帯を通じた OD 交通需要 Q は，各時刻 t に終点に到着する OD 交通流率の（時間帯 $[0, T]$ に関する）総和である：

$$\int_0^T q(u)\, du = Q \tag{3.10}$$

4) 終点到着時刻選択に関する均衡条件:

均衡状態では，どの利用者も，自分だけが終点到着時刻を変更しても自分の一般化費用を改善できない．ここで，到着時刻 t の一般化費用は，2) の経路選択均衡条件下では，$w(t) + \pi(t)$ である．これは，均衡状態で選択されている到着時刻では，時刻によらない均衡効用 ρ に等しく，選択されない到着時刻では ρ 以上である：

$$\begin{cases} \rho = \pi(t) + w(t) & if\ q(t) > 0 \\ \rho \le \pi(t) + w(t) & if\ q(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I \tag{3.11}$$

ここで，$w(t)$ は終点に時刻 t に到着する利用者のスケジュール費用，$\pi(t)$ は起点から終点までの最小経路費用.

5) 各リンク通行権市場での需給均衡条件:

通行権市場は，リンク（ボトルネック）毎に独立した売買取引が行なわれているものとする．この市場は独占・寡占等の生じない完全競争的市場であり，時刻別通行権の需要量が供給量と一致するように価格が調整される．そして，その均衡状態では，正の価格がついている時刻の通行権は需要量と供給量が一致し，価格がゼロなら供給過剰である．ここで，リンク(i, j)の時刻t通行権の需要量は，時刻別リンク流入率 $y_{ij}(t)$ によって与えられる．また，この通行権の供給量は，渋滞が発生しない最大限の枚数，すなわち，当該リンクの交通容量μ_{ij}である．従って，通行権市場の需給均衡条件は,

$$\begin{cases} y_{ij}(t) = \mu_{ij} & if\ \ p_{ij}(t) > 0 \\ y_{ij}(t) \le \mu_{ij} & if\ \ p_{ij}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in I, \forall ij \in L \quad (3.12)$$

と表現される．

6) リンク交通流率と経路交通流率の間のフロー保存則:

時刻別リンク流入率は，利用者の経路選択の結果決まる終点到着時刻別の経路交通流率と整合的でなければならない．経路rを通行し，時刻tにリンク(i, j)に流入する利用者は， 終点に時刻$t + T_{ij,r}$に到着する．従って，時刻tにリンク(i,j)に流入する交通流率$y_{ij}(t)$は，終点到着時刻別の経路交通流率を用いて,

$$y_{ij}(t) = \sum_{r \in R} f_r(t + T_{ij,r})\delta_{ij,r(o,d)} \quad \forall t \in I, \forall ij \in L \quad (3.13)$$

と表現される．

4. 通行権取引均衡状態の arc-node 表現

前章で示したモデルの定式化は，利用者の経路選択行動を直接的に記述でき，概念的には理解しやすい．しかし，その一方で，時間に依存したリンク交通流率と経路交通流率の関係が複雑で，その結果，各リンクでの通行権の需給均衡条件の構造を調べにくい．そこで，本章では，前節で定式化されたモデルをリンク・ノード変数のみを用いた等価な表現に変換する（この作業は，第5章で考察する配分の効率性（システム最適状態との比較）および *feasibility* を議論する際に必須である）．これは，以下の 1)～5) の条件にまとめられる：

1a) 各ノードでのフロー保存条件:

交通ネットワークにおけるフロー保存条件は，任意のノードiにおける流入交通量と流出交通量が等しいこととして表現できる．この条件を記述するために，時刻tにリンク(i, j)に流入する交通流率を$y_{ij}(t)$, 時刻tにリンク(i,j)から流出する交通流率を$z_{ij}(t)$と書く．このとき，フロー保存則は，任意の時刻，任意のノードにおいて,

$$\sum_{k \in NO(i)} y_{ik}(t) - \sum_{k \in NI(i)} z_{ki}(t) = -q(t)\delta_{id} \quad \forall t \in I, \forall i \in N \quad (4.1)$$

が成立することである．ここで， δ_{id}は$i = d$なら1，そうでないなら0となる Kronecker のデルタ．また，$NO(i)$はノードiから流出するリンクの下流側ノードの集合，$NI(i)$はノードiに流入するリンクの上流側ノードの集合である．なお，起点oでのフロー保存則は，他の全ノードでの保存則から導くことができる（*ie.* 冗長である）ため省略できる．

1b) 各リンクでの First-In-First-Out 条件:

動的な交通流では，各リンクで追越がないとすれば，First-In-First-Out (FIFO) 条件が成立する必要がある．これは，リンク(i,j)の時刻tにおける累積流入台数，累積流出台数を，各々，$A_{ij}(t)$, $D_{ij}(t)$と書くと，

$$A_{ij}(t) = D_{ij}(t + t_{ij}(t)) \quad (4.2)$$

あるいは，交通流率を用いた表現では,

$$y_{ij}(t) = z_{ij}(t + t_{ij}(t)) \cdot (1 + dt_{ij}(t)/dt) \quad (4.3)$$

と書ける [8), 9), 10)]．ここで，$t_{ij}(t)$は時刻tにリンクijに流入した車両が流出するまでに要する時間である．ただし，渋滞が発生していないなら，$t_{ij}(t)$は時刻によらない一定値 t_{ij} である．従って，通行権導入後の（*ie.* 渋滞が発生しない）均衡状態では，より簡単な以下の表現：

$$y_{ij}(t) = z_{ij}(t + t_{ij}) \quad \forall t \in I, \forall ij \in L \quad (4.4)$$

に帰着する．

2) 経路選択に関する均衡条件:

時刻tにノードiに到着する利用者がリンク(i, j)を選択すれば，その利用者はノードj に時刻$t + t_{ij}$に到着する．従って，均衡状態では，時刻tにリンク(i,j)への流入交通流が存在するなら，リンク(i,j)は，時刻$t + t_{ij}$にノードjに到着する利用者の最小費用経路上になければならない．この条件は，時刻tにノードiに到着する利用者が起点からiまでに費やす最小経路費用を$\pi_i(t)$と書くと，以下の様に表現できる：

$$\begin{cases} \pi_j(t + t_{ij}) = c_{ij}(t) + \pi_i(t) & if\ \ y_{ij}(t) > 0 \\ \pi_j(t + t_{ij}) \le c_{ij}(t) + \pi_i(t) & if\ \ y_{ij}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in I, \forall ij \in L \quad (4.5)$$

ここで，$c_{ij}(t)$はリンク(i, j)に時刻tに流入した利用者が，そのリンクを通行するのに必要な交通費用である：

$$c_{ij}(t) \equiv p_{ij}(t) + \alpha\, t_{ij} \quad (4.6)$$

この条件(4.5) は，最小費用経路選択条件を DP (*Dynamic Programmming*) 原理を用いて分解表現したものであり，経路変数を用いた条件 (3.9) と整合的であることは言うまでも無い．

3) 利用者数の保存則:

前章の path-arc 変数による定式化と全く同様，全時間帯を通じた OD 交通需要 Q は，各時刻 t に終点に到着する OD 交通流率の総和である：

$$\int_0^T q(u)\,du = Q \tag{4.7}$$

4) 終点到着時刻選択に関する均衡条件:

前章の path-arc 変数による定式化で用いた最小経路費用 $\pi(t)$ は，上の (4.5) で定義された $\pi_d(t)$ に他ならない．従って，前章と全く同様に，終点到着時刻選択に関する均衡条件は,

$$\begin{cases} \rho = \pi_d(t) + w(t) & if\ q(t) > 0 \\ \rho \le \pi_d(t) + w(t) & if\ q(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I \tag{4.8}$$

と表現される．

5) 各リンク通行権市場での需給均衡条件:

前章の path-arc 変数による定式化と全く同様，通行権市場の需給均衡条件は,

$$\begin{cases} y_{ij}(t) = \mu_{ij} & if\ p_{ij}(t) > 0 \\ y_{ij}(t) \le \mu_{ij} & if\ p_{ij}(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I, \forall ij \in L \tag{4.9}$$

と表現される．

5. 通行権取引制度の効率性:最適配分の実現

（1） システム最適配分問題と均衡配分

前章の (4.1)～(4.9) で定式化された均衡状態の（配分の）効率性を調べるために，以下の最適化問題 [P-1] を考えてみよう：

$$\min_{(\mathbf{q},\mathbf{y})\ge \mathbf{0}} \; F_P(\mathbf{q},\mathbf{y}) \equiv \int_0^T q(t)\,w(t)\,dt + \alpha \sum_{ij\in L} \int_0^T y_{ij}(t)\, t_{ij}\, dt \tag{5.1}$$

subject to

$$\int_0^T q(u)\,du = Q \tag{5.2}$$

$$y_{ij}(t) \le \mu_{ij} \qquad \forall t \in I, \forall ij \in L \tag{5.3}$$

$$\sum_{k\in NO(i)} y_{ik}(t) - \sum_{k \in NI(i)} y_{ki}(t - t_{ki}) = -q(t)\,\delta_{id} \qquad \forall t \in I,\ \forall i \in N \tag{5.4}$$

これは，ネットワーク性能から決まる交通流の物理的制約条件下で，利用者が費やす一般化費用の総和（“社会的交通費用”）を最小化する動的交通流配分パターンを求める問題である．より具体的には，目的関数 F_P の第一項は，利用者が費やすスケジュール費用の総和，第二項は，利用者が費やす旅行時間を金銭費用換算した旅行費用の総和である．制約条件 (5.2) は，OD交通流率に関するフロー保存則であり，(5.3) は，各リンクでの容量制約である．最後の，(5.4) は各リンクでの FIFO条件と各ノードでの動的なフロー保存則を組合せた条件である．

この問題は，各リンクに容量制約があるため，制約条件 (5.2)～(5.4) を満たす許容解が存在しない場合もありえる．その判り易い極端な例は，到着が許される配分時刻帯 I が非常に短い時間長 Δt に限定されている場合である．この場合，OD交通需要 Q を時間的に分散することができず，空間的（経路）分散のみによって，リンク容量制約を満たさねばならない．すなわち，非常に大きな値をとりうるOD 交通率 $Q/\Delta t$ がネットワークの最大容量を超えれば，許容解が存在しないこととなる．

一般に，問題 [P-1] が許容解を持つか否かは，任意のネットワーク・OD需要条件に対して，多項式オーダーの効率的なアルゴリズムによって確認できる（この点については，(2)で具体的に説明する）．また，配分時間帯 I の長さが十分に大きく，ネットワークの最大容量が到着時刻別OD交通流率よりも大きければ，問題 [P-1] は許容解を持ち（*ie.* 各リンクでの渋滞は全く発生せず），最適解が存在する．そこで，以下では，この問題の最適解が存在する場合について，最適配分と均衡配分との関係を議論する．また，以降で述べる “最適配分”（あるいは，“ファースト・ベスト状態”）は，渋滞が全く発生しない状況に限定した上で，社会的交通費用 (SC) を最小化した状態である．言いかえると，「渋滞を全く発生させない最適配分の SC は，渋滞リンクを残す任意の配分の SC よりも小さい」との仮説下での “最適状態” を議論する．この仮説は，多くの常識的条件下で成立すると思われるが，従来研究では，その成立のための一般的条件までは特定化されていない．その条件の理論的解明は，今後の研究に残された課題である．

さて，通行権制度導入後の均衡配分を特徴付ける最も重要な性質は，問題 [P-1] が，均衡条件 (4.1)～(4.9) と等価な最適化問題となることである．すなわち,

命題１： 最適配分問題 [P-1] に許容解が存在する単一ODペアのネットワークを考える．このとき，リンク到着時刻別の通行権取引制度により実現する均衡状態は，式(5.1) で定義された “社会的交通費用” を最小化する最適配分状態と一致する．

（証明：付録１参照）

この命題は，直接的には，問題 [P-1] の最適交通流パターンが，均衡状態での交通流パターンと一致することを述べている．しかし，問題 [P-1] は，均衡状態での交通流パターンのみならず，通行権価格に関する情報も与えている．上記命題の証明から明らかなように，問題 [P-1] の制約条件 (5.3) に対応した最適 Lagrange 乗数 $\mathbf{p}^*(t)$ は，通行権導入後の均衡状態での通行権価格に一致する．また，(5.2) に対応した最適 Lagrange 乗数 ρ^* と(5.4) に対応した最適 Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$ は，各々，均衡状態で利用者が費やす不効用（一般化交通費用），起点から各ノードへの最小経路費用に一致する．

この $(\rho^*, \boldsymbol{\pi}^*(t), \mathbf{p}^*(t))$ が通行権取引制度下での均衡価格を表していることを，より直接的に理解するために，最適配分問題 [P-1] の双対問題 [D-1]：

$$\max_{(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p})\geq\mathbf{0}} F_D(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p}) \equiv \rho\, Q - \sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\,\mu_{ij}\,dt \tag{5.5}$$

subject to

$$\rho \leq w(t) + \pi_d(t) \qquad \forall t \in I \tag{5.6}$$

$$\pi_j(t+t_{ij}) \leq \pi_i(t) + (\alpha\, t_{ij} + p_{ij}(t)) \qquad \forall t \in I,\ ij \in L \tag{5.7}$$

を考えてみよう．双対定理により，[D-1] の最適解での目的関数値 F_D^* は，[P-1] の最適解での目的関数値 F_P^* と一致する：

$$\int_0^T q^*(t)\,w(t)\,dt\ +\ \alpha\sum_{ij\in L}\int_0^T y_{ij}^*(t)\,t_{ij}\,dt$$
$$= \rho^*\, Q - \sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}^*(t)\,\mu_{ij}\,dt \tag{5.8}$$

この等式の左辺 F_P^* は，通行権取引制度下の均衡状態における "社会的交通費用"：

［総スケジュール費用］＋［総旅行時間費用］ (5.9a)

の値を意味している．一方，これは，第 3 章(1)で示した交通費用の恒等的関係式から，均衡状態での

［利用者の総一般化費用］－［通行権購入総額］(5.9b)

の値と一致するはずである．従って，式 (5.8) の右辺 F_D^* は，均衡状態での (5.9b) を意味していなければならない．実際，問題 [D-1] の最適解 $(\rho^*, \boldsymbol{\pi}^*(t), \mathbf{p}^*(t))$ が，通行権取引制度下での均衡価格であると解釈すれば，F_D^* は，(5.9b) の形式で表現された均衡状態での社会的交通費用を意味していることが容易に確認できる．より具体的には，式 (5.8) 右辺 F_D^* の第一項は，均衡一般化交通費用×利用者総数であるから，利用者が支払う一般化交通費用の総和である．ただし，この "費用" は，利用者が通行権購入のために道路管理者へ支払った金額を含んでいる．利用者の通行権支払いは，道路管理者への金銭の移転に過ぎず，社会的には費用ではない．この金銭移転総額は，発行された通行権の市場価値総額（通行権枚数×価格）である．そこで，F_D^* では，これを意味する第二項を利用者支払総額から差し引いて，社会的費用を求めている，すなわち，(5.9b) の形式で表現された均衡状態での社会的交通費用を意味していることが判る．

（2） 最適状態の feasibility 確認法

最適化問題 [P-1] が許容解を持つか否かは，"時空間ネットワーク" を構築すれば，容易に確認できる．これは，鉄道列車ダイアグラムのように，空間的移動にともなう時間の進行を，移動空間を表現するネットワークに時間次元の広がりを加えた仮想ネットワークによって，直接的に表現する方法である．この考え方は，リンク旅行時間が交通状態（交通量や渋滞待ち行列）によって変化する問題（*eg.* 渋滞を考慮した交通量配分問題）では，一般に，適用が困難である．しかし，リンク旅行時間が一定のネットワークでは，強力な方法であり，従来から，公共交通機関ネットワークにおける動学的な交通流分析に用いられている [12), 13), 14)]．本稿で考察したい問題 [P-1]では，渋滞が発生せず，リンク旅行時間は定数であるので，この方法が有効に活用できる．

"時空間ネットワーク" を構築する準備として，まず，時間を離散化する．すなわち，時刻は微小時間刻み Δt ずつ増加する離散的変数（*ie.* $t = m\,\Delta t,\ m = 0,1,2,\ldots,\mathrm{M}$）と考える．そして，各リンクの旅行時間 t_{ij} は，Δt の整数倍で表現されている（*ie.* $t_{ij} = n_{ij}\,\Delta t$ となる整数 n_{ij} が与えられている）ものとする．この準備のもとで，"時空間ネットワーク" は，以下の手順で構築される：

Step 1-a. 元のネットワーク $G(N, L)$ の各ノードを，時間の進行に対応して "垂直方向" に M 個コピーする．

Step 1-b. この M 倍に個数が増えたノード集合に対して，G の起点に対応した新たなダミー・ノードおよび終点に対応した新たなダミー・ノードを追加する．上記の*Step 1-a* と*1-b* で新たに作成されたノードの集合が，時空間ネットワークのノード集合 N^* となる．このN^* の各ノードを識別するために，元のノード i の時刻 $m\,\Delta t$ に対応する N^* のノードを $i(m)$ と書く．また，起点 o に対応したダミー・ノードを o^*，終点 d に対応したダミー・ノードを d^* と書く．

Step 2-a. 元のネットワーク $G(N, L)$ に旅行時間 $t_{ij} = n_{ij}\,\Delta t$ のリンクがあれば，全時刻 m について，N^* のノード $i(m)$ からノード $j(m+n_{ij})$ へ向かうリンクを設定する．この新

たに設定されたリンクの属性（*ie.* 旅行費用と容量）は，全ての m について，元のリンク $(i, j) \in L$ と同一に設定する．この手続きをGの全リンクについて実行する．

Step 2-b. N^* のダミー・ノードo^* からN^* の各時刻mに対応する起点コピー・ノード $o\,(m)$ に向かうリンクを全ての m について設定する．これらの新たなリンクの旅行時間はゼロ，容量は無限大とする．また，N^* の各時刻 m に対応する終点コピー・ノード $d\,(m)$ からダミー・ノードd^*に向かうリンクを全ての m について設定する．これらの新たなリンクの旅行費用は $w\,(m\Delta t)$, 容量は無限大とする．*Step 2-a* と*2-b* で新たに作成されたリンクの集合が，時空間ネットワークのリンク集合L^*となる．

動的な最適交通流配分問題 [P-1]（あるいは，それと等価な均衡問題 (4.1)〜(4.9)）は，上記手順で構築される時空間ネットワーク $G^*(N^*, L^*)$ の上での "静的な" 最小費用流問題に帰着する．より具体的には，起点をダミー・ノードo^*，終点をダミー・ノードd^*，OD 交通需要 をQとする G^* 上での静的な最小費用流問題を考える．ここで，G^*上のリンク $(i\,(m),\ j\,(m+n_{ij}))$ の交通量は，元のネットワークG 上での動的なリンク流入率 $y_{ij}(m\Delta t)$ を表し，G^* 上のリンク $(d\,(m), d^*)$ の交通量は， G 上での動的な OD 交通流率 $q(m\Delta t)$ を表している．そして，この最小費用流問題の解として得られる G^* 上のリンク交通量パターンは，問題 [P-1] の最適解と一致する．

この事実を理解するには，問題 [P-1] の全ての条件が，G^* 上の最小費用流問題の条件として表現されていることを確認すればよい．まず，動的なフロー保存条件 (5.4) は，G^*上での各ノード $i\,(m)$ での静的なフロー保存条件として "自動的に" 表現されている．動的なOD 交通流率の保存則 (5.2) も，G^* 構築手順の *Step 1-b* で設定されたダミー・ノード d^* での静的なフロー保存条件として表現されている．また，各時刻・各リンクでの容量制約 (5.3) は，G^* 上の各リンクの容量制約として表現されている．次に，問題 [P-1] の目的関数についても，G^*上での静的な総走行費用として整合的に表現されていることが容易に確認できる：目的関数の第一項は，G^* 構築手順の *Step 2-b* で設定されたリンク $(d\,(m), d^*)$ の総走行費用，第二項は，*Step 2-a* で設定されたリンクの総走行費用として表現されている．

以上の議論から，最適配分問題 [P-1] は，静的な最小費用流問題を解くことに帰着することが判った．最小費用流問題は，計算理論の分野で膨大な研究蓄積があり，非常に効率的な（強多項式オーダーの）アルゴリズムが開発されている[14), 15), 16)]．従って，それらを活用すれば，問題 [P-1] の *feasibility* の確認および求解も容易に実行可能である．

6. 混雑料金制度と通行権取引制度の比較

（1）ファースト・ベスト状態の比較

前章までで得られた均衡通行権価格は，"動的な最適混雑料金" と解釈することもできる．いま，ネットワークの各リンクで時刻によって課金額の変動する "動的な混雑料金制度" を導入した状況を考えてみよう．このとき，リンク (i, j) に時刻 t に到着した利用者への課金額（混雑料金）を $p_{ij}(t)$ と書くと，利用者がトリップに際して負担する交通費用は，第3, 4 章で示した交通費用と全く同型の式で表現される．従って，各リンクでの課金パターンを$\{\mathbf{p}(t)\}$ とした動的な混雑料金制度下で実現する均衡状態は，明らかに，(4.1)〜(4.8) を満たす．換言すれば，(4.1)〜(4.8) は，道路管理者の課金パターン $\{\mathbf{p}(t)\}$ を与件として利用者が行動したときに実現する均衡交通流パターン$\{\mathbf{y}(t)\}$を与えていると解釈できる．そこで，道路管理者が，利用者の行動を完全に予見した上で，各リンクの流入率 $y_{ij}(t)$ が容量 μ_{ij}を超えない（*ie.* 渋滞が発生しない）ような料金パターン $\{\mathbf{p}^*(t)\}$ を設定できたとしよう．すると，その条件は，(4.9) と同型の表現で与えられる．つまり，通行権取引制度下では市場の需給均衡条件（による価格調整）を意味していた (4.9) は，混雑料金制度下では道路管理者の料金レベル設定条件となる．

このように，(4.1)〜(4.9) は，混雑料金制度下で渋滞を発生させない（最適）料金および均衡交通流パターンを求めるための条件と読みかえることができる．**命題１**で見たように，方程式系 (4.1)〜(4.9) は，最適配分問題 [P-1] と等価であり，[P-1] が許容解を持てば，解 $\{\mathbf{p}^*(t), \mathbf{y}^*(t)\}$ が存在する．従って，動的な混雑料金制度に関する次の命題が成立する：

命題２：　最適配分問題 [P-1] に許容解が存在するネットワークを考え，道路管理者が利用者行動に関する完全な情報を持っていると仮定する．このとき，リンク到着時刻別の通行権取引制度により実現する均衡状態は，リンク到着時刻別の動的混雑料金制度により実現する均衡状態と一致し，いずれの制度でも，渋滞の全く発生しないファースト・ベスト状態を達成できる．

（2）混雑料金制度で生じうる経済的損失

上の命題は，理想的な状況では，通行権取引制と動的な混雑料金制が，全く同じ理想的な均衡状態を与えることを述べている．しかし，この理想的状態が実現（*ie.* 制度が想定どおりに機能）するために要求される条件は，各制度で大きく異なることに注意が必要である．その異

なる想定条件とは，制度を実行する主体（*ie.* 道路管理者）が把握しておくべき情報の量と正確さである．前者では，道路管理者は，各リンクの交通容量のみを正確に把握していれば良い（そして，その容量に等しい枚数の時刻別通行権を発行するだけで渋滞が解消する）．一方，後者では，道路管理者に要求されることは，交通容量の把握だけではない．先の(1)での議論から明らかなように，道路管理者は，利用者行動についても完全に把握していなければ，適切な（*ie.* 各リンクで渋滞を発生させない）料金パターンを計算することができない．

この様な条件の違いを考慮すると，両制度のどちらが望ましいと言えるだろうか？ これは，一般的に言えば，"数量規制" と "価格規制" の比較問題である．静学的な経済均衡の枠組での両規制の比較については，経済学分野で Weizman[17], Laffont[18] に代表される多くの知見が得られている．それによれば，規制当局が，供給側の条件（生産関数）は正確に把握しているが，需要側（需要関数）に関しては不確実な情報しかもっていない場合，数量規制の方が価格規制よりも効率的な結果をもたらす．本稿の交通問題では，対象とする状況の枠組みは異なるが，これと同様の理論的帰結が得られる．

以下では，このことをより具体的に示そう．我々の問題では，供給側条件に相当するのは，ネットワーク性能（各リンクの交通容量）であり，比較的容易かつ正確に情報を得ることができる．それに対して，需要側条件に相当するのは，OD交通量，利用者の到着時刻選択に関わるスケジュール費用関数 $w(t)$，経路選択に関わる交通費用 $\boldsymbol{t}$，および時間価値 α である．これらの需要側情報を道路管理者が正確に把握することは容易ではない．

そこで，これらの需要側情報が不完全である場合に，混雑料金制で何が起こるかを考えてみよう．その簡単な例として，道路管理者が，利用者の時間価値を β であると推定し，それは，実際の時間価値 α とは異なっていると仮定しよう．この前提で，道路管理者が (4.1)〜(4.9) を解いて得られる課金パターン $\{\mathbf{p}'(t)\}$ は，真の最適な課金パターン $\{\mathbf{p}^*(t)\}$ とは異なったものとなる．従って，$\{\mathbf{p}'(t)\}$ に対応して実際に生じる交通流パターン $\{\mathbf{y}'(t)\}$ では，社会的交通費用（スケジュール費用と旅行費用の総和）は最小化されない．さらに悪いことに，この交通流パターン $\{\mathbf{y}'(t)\}$ では，各リンクでの容量制約も満たされる保証はなく，各リンクで渋滞が発生しうる．なぜなら，課金パターン $\{\mathbf{p}'(t)\}$ は，利用者の時間価値が β の場合に生じる交通流パターン $\{\mathbf{y}''(t)\}$ が容量制約 (4.9) を満たすように計算されているだけである；利用者の時間価値が α の場合に生じる交通流パターン$\{\mathbf{y}'(t)\}$ が (4.9) を満たす必然性は何も無いのである．ここで，我々の最適配分問題 [P-1] では，渋滞は生じないとの前提で社会的交通費用を定義していたことに注意しよう．結局，誤った課金パターン $\{\mathbf{p}'(t)\}$ では，スケジュール費用と旅行費用の総和が最小化されないだけではなく，渋滞待ち時間による追加的な社会的費用までもが発生することが判る．

一方，通行権取引制では，道路管理者が容量さえ正確に把握していれば，理論上は，上のような経済的損失は発生しない．もちろん，現実には，通行権取引市場で（理論的想定と一致する）適切な価格がつかない可能性もある．これは，混雑料金制で誤った料金パターン $\{\mathbf{p}'(t)\}$ を設定することに対応するが，両制度での "価格の歪み" の影響の仕方には大きな違いがある．すなわち，通行権取引制では，"価格の歪み" は，通行権市場のみでの経済的損失に留まり，道路ネットワーク上での渋滞発生とは無関係である．なぜなら，通行権制のもとでは，どんなデタラメな価格がつけられたとしても，その制度の定義から，通行権発行枚数以上の交通流は流れないからである．従って，この制度では，混雑料金制で見たような "渋滞待ち時間による追加的な社会的費用" は発生しない．なお，現実には，通行権取引制でも，利用者のリンクへの到着時刻が正確でない（*ie.* 通行権の指定時刻通りに到着できない）なら，渋滞発生の可能性はある．しかし，そのような現象が起きる可能性およびそれによる経済損失は，動的な混雑料金制でも全く同様であるから，両制度の相対的な比較の観点からは，無視できる．以上の議論は，以下の命題にまとめられる：

命題３： 最適配分問題 [P-1] に許容解が存在するネットワークを考え，道路管理者が利用者行動に関して持っている情報が必ずしも完全ではないとする．このとき，動的混雑料金制度によって実現する均衡状態では，通行権取引制度により実現する均衡状態と比べて，大きな社会的交通費用が発生する．

7. 基本理論の拡張

(1) 多起点･多終点の場合

第3〜6章の結果は，全変数をODペア毎に区別した変数に置き換えるだけで，多起点・多終点ネットワークの場合に容易に拡張できる．より正確には，*a*) 各リンクの流入交通流率と流出率を，各々，起点別に区別した変数 $y_{ij}^{o}(t)$, $z_{ij}^{o}(t)$ に置き換え，*b*) 起点 o から各ノードまでの最小交通費用を起点別に区別した変数に置き換え，*c*) ODペアに関する変数を起点別に区別した変数に置き換えればよい．以下では，この拡張をより具体的に示す．

まず，通行権取引制度導入後の均衡状態は，以下の条件1)〜5)が同時に成立した状態である：

1a) 各ノードでのフロー保存条件：

起点別のリンク流入・流出率に関して，各ノードで，

$$\sum_{k\in NO(i)} y_{ik}^{o}(t) - \sum_{k\in NI(i)} z_{ki}^{o}(t) = -q_{od}(t)\,\delta_{id}$$

$$\forall t\in I, \forall o\in O, \forall i\in N \quad (7.1)$$

が成立する．ここで，$q_{od}(t)$ は終点 d に時刻 t に到着する OD ペア (o, d) の交通流率である．単一 OD ペアの場合と同様，起点 o でのフロー保存条件は，他の全ての保存則が成立していれば冗長であるので，省略できる．

1b) 各リンクでの First-In-First-Out 条件：

起点別のリンク流入・流出率に関して，各リンクで，

$$y_{ij}^{o}(t) = z_{ij}^{o}(t+t_{ij}) \qquad \forall t\in I, \forall o\in O, \forall ij\in L \quad (7.2)$$

が成立する．

2) 経路選択に関する均衡条件：

時刻 t にノード i に到着する利用者が起点 o から i までに費やす最小経路費用を$\pi_i^o(t)$ と書く．このとき，利用者の経路選択均衡条件は，起点別に，各リンクで，

$$\begin{cases}\pi_j^o(t+t_{ij}) = c_{ij}(t) + \pi_i^o(t) & if\ y_{ij}^o(t) > 0\\ \pi_j^o(t+t_{ij}) \le c_{ij}(t) + \pi_i^o(t) & if\ y_{ij}^o(t) = 0\end{cases}$$

$$\forall t\in I, \forall o\in O, \forall ij\in L \quad (7.3)$$

が成立することである．ここで，$c_{ij}(t)$ は単一 OD ペアの場合と全く同じ定義のリンク交通費用である：

$$c_{ij}(t) \equiv p_{ij}(t) + \alpha\, t_{ij} \quad (7.4)$$

3) 利用者数の保存則：

OD ペア (o,d) の全時間帯を通じた交通需要を Q_{od} と書く．全 OD ペアの交通需要 $\{Q_{od}\}$ が与件であるので，各 OD ペアについて，以下の条件が成立する必要がある：

$$\int_0^T q_{od}(u)\,du = Q_{od} \qquad \forall od\in W \quad (7.5)$$

4) 終点到着時刻選択に関する均衡条件：

終点 d に時刻 t に到着する利用者のスケジュール費用を $w_d(t)$，OD ペア(o, d) の均衡費用をρ_{od} と書く．このとき，終点到着時刻選択の均衡条件は，OD ペア別に

$$\begin{cases}\rho_{od} = \pi_d^o(t) + w_d(t) & if\ q_{od}(t) > 0\\ \rho_{od} \le \pi_d^o(t) + w_d(t) & if\ q_{od}(t) = 0\end{cases}$$

$$\forall t\in I, \forall od\in W \quad (7.6)$$

が成立することである．

5) 各リンク通行権市場での需給均衡条件：

単一 OD ペアの場合と同様，通行権取引市場は，リンク（ボトルネック）毎に設定されているものとする．通行権は，時刻別に供給されるが，起点の区別はしない．従って，リンク(i,j) の単位時間当り通行権の需要は，起点の区別をしないリンク流入率：

$$y_{ij}(t) = \sum_{o\in O} y_{ij}^o(t) \qquad \forall t\in I, \forall ij\in L \quad (7.7)$$

によって与えられる．通行権発行枚数も起点等による区別をしないリンク交通容量によって与えられる．従って，通行権市場の需給均衡条件は，

$$\begin{cases}y_{ij}(t) = \mu_{ij} & if\ p_{ij}(t) > 0\\ y_{ij}(t) \le \mu_{ij} & if\ p_{ij}(t) = 0\end{cases}$$

$$\forall t\in I, \forall ij\in L \quad (7.8)$$

と表現できる．ここで，リンク通行権価格は，起点/OD ペアによる区別をする必要が無いことに注意されたい．

以上の条件 (7.1)～(7.8) によって表現された均衡状態の効率性を調べるために，単一ODペアの問題 [P-1]を拡張した以下の最適化問題[P-M] を考えてみよう． ：

$$\min_{(\mathbf{q},\mathbf{y})\ge\mathbf{0}} F_P^M(\mathbf{q},\mathbf{y}) \equiv \sum_{o\in O}\sum_{d\in D}\int_0^T q_{od}(t)\,w_d(t)\,dt + \alpha\sum_{ij\in L}\int_0^T y_{ij}(t)\,t_{ij}\,dt \quad (7.9)$$

subject to

$$\int_0^T q_{od}(u)\,du = Q_{od} \qquad \forall od\in W \quad (7.10)$$

$$y_{ij}(t) = \sum_{o\in O} y_{ij}^o(t) \qquad \forall t\in I, \forall ij\in L \quad (7.11)$$

$$y_{ij}(t) \le \mu_{ij} \qquad \forall t\in I, \forall ij\in L \quad (7.12)$$

$$\sum_{k\in NO(i)} y_{ik}^o(t) - \sum_{k\in NI(i)} y_{ki}^o(t-t_{ki}) = -q_{od}(t)\delta_{id}$$

$$\forall t\in I, \forall i\in N, \forall o\in O \quad (7.13)$$

この問題の目的関数は，[P-1] と全く同様，ネットワーク全体で費やされる一般化交通費用（スケジュール費用と旅行費用の和）の総和を意味している．また，制約条件は，[P-1] と同様，フロー保存則と各リンクでの容量制約である．[P-1] との違いは，フロー保存条件が多起点・多終点に対応している点のみである．このことから容易に想像できるように，この問題は，均衡条件 (7.1)～(7.8) の等価最適化問題となっている．すなわち，以下の命題が成立する．

命題４-A：最適配分問題 [P-M] に許容解が存在する多起点・多終点ネットワークを考える．このとき，リンク到着時刻別の通行権取引制度により実現する均衡状態は，式 (7.9) で定義された社会的交通費用を最小化する最適配分状態と一致する．

（証明：付録２参照）

均衡状態での通行権価格は，単一ODペアの場合と同様，[P-M] の双対問題 [D-M]：

$$\max_{(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p})\geq\mathbf{0}} \sum_{od\in W}\rho_{od}\, Q_{od} - \sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\,\mu_{ij}\,dt \tag{7.14}$$

subject to

$$\rho_{od} \leq w_d(t) + \pi_d^o(t) \qquad \forall t\in I,\ od\in W \tag{7.15}$$

$$\pi_j^o(t+t_{ij}) \leq \pi_i^o(t) + (\alpha\, t_{ij} + p_{ij}(t)) \qquad \forall t\in I,\ ij\in L,\ o\in O \tag{7.16}$$

の解 $\mathbf{p}^*(t)$ として求めることができる．また，この問題の目的関数が，[D-1] の場合と全く同様，［利用者の総一般化費用］－［通行権購入総額］として表現された社会的費用を意味していることは，言うまでも無い．

(2) トリップ需要が弾性的な場合

ここまででは，OD 交通需要 $\{Q_{od}\}$ がODペア間の不効用レベルによらず一定（定数）と仮定した場合に，通行権取引制度下での均衡状態が効率的であることを見てきた．この結果は，$\{Q_{od}\}$ が交通費用に関して弾性的な場合にも成立する．以下では，これを具体的に示そう．

OD交通需要が一般化費用 ρ_{od} の単調減少関数 $Q_{od}(\rho_{od})$ によって与えられるとしよう．このとき，通行権導入下の均衡状態は，前節の均衡条件のうち，式 (7.5) のみを

$$\int_0^T q_{od}(u)\,du = Q_{od}(\rho_{od}) \qquad \forall od\in W \tag{7.17}$$

に置き換えた方程式系の解である．あるいは，$Q_{od}(\rho_{od})$ の逆関数 $Q_{od}^{-1}(Q_{od})$（*ie.* 逆需要関数）が与件と考える場合であれば，

$$\int_0^T q_{od}(u)\,du = Q_{od} \qquad \forall od\in W \tag{7.5}$$

$$\begin{cases}\rho_{od} = Q_{od}^{-1}(Q_{od}) & if\ Q_{od} > 0\\ \rho_{od} \geq Q_{od}^{-1}(Q_{od}) & if\ Q_{od} = 0\end{cases} \qquad \forall od\in W \tag{7.18}$$

と書き換えれば良い．

この均衡条件系は，以下の最適化問題 [P-E]：

$$\max_{(\mathbf{Q},\mathbf{q},\mathbf{y})\geq\mathbf{0}} \sum_{od\in W}\int_0^{Q_{od}} Q_{od}^{-1}(\omega)\,d\omega \;-\; F_P^M(\mathbf{q},\mathbf{y}) \tag{7.19}$$

subject to (7.10), (7.11), (7.12) and (7.13).

あるいは，その双対問題 [D-E]：

$$\min_{(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p})\geq\mathbf{0}} \sum_{od\in W}\int_{\rho_{od}}^{+\infty} Q_{od}(\nu)\,d\nu + \sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\,\mu_{ij}\,dt \tag{7.20}$$

subject to (7.15) and (7.16).

と等価である（その証明は，問題 [P-E] の $\boldsymbol{Q}$（あるいは，問題 [D-E] の $\boldsymbol{\rho}$）に関する最適条件が式 (7.18)（あるいは，式(7.17)）に一致することを示すだけで，ほぼ自明ゆえ，省略する）．問題 (7.19) は，消費者余剰の最大化問題である．より具体的には，第一項は，利用者の交通トリップ行なうことに対する支払い意志額総計（*ie.* "粗消費者余剰"）であり，第二項は，一般化交通費用の総和である．従って，問題 [P-E] は，粗消費者余剰から総一般化交通費用を差し引いた消費者余剰を最大化するような動的交通流パターンを求めている．通行権取引制度下での均衡条件は，この問題と等価であるので，結局，以下の命題が成立する：

> **命題４-B**：最適配分問題 [P-E] に許容解が存在する多起点・多終点ネットワークを考える．また，OD 交通需要が一般化交通費用の単調減少関数で与えられるとする．このとき，リンク到着時刻別の通行権取引制度により実現する均衡状態は，式 (7.19) で定義された消費者余剰を最大化する最適配分状態と一致する．

(3) 希望到着時刻が分布している場合

ここまでの分析では，利用者の終点への希望到着時刻は唯一で共通と仮定し，均衡解の特性を議論した．この結果は，希望到着時刻が利用者によって異なる（分布している）場合にも同様に成立する．以下では，これを具体的に示そう．

終点への（離散的な）希望到着時刻が複数あるとし，その集合をS と書く．この場合，スケジュール費用および OD 需要を終点への希望到着時刻別に区別して考える必要がある．そこで，まず，スケジュール費用は，終点 $d\in D$および希望到着時刻$s\in S$別に定義された（終点到着時刻 t に関する）関数 $w_d(t, s)$ で与えられると仮定する．また，ODペア (o, d) で希望到着時刻が s の利用者数（希望到着時刻別のOD 需要）を $Q_{od}(s)$ と書き，その値は，任意の $(o,d)\in W$および$s\in S$について与件とする．

このとき，通行権取引制度導入下での均衡状態は，(1)で議論した多起点・多終点ネットワークでの均衡条件 (7.1)～(7.8) を以下の様に拡張した体系によって表現される．まず，最適な経路の選択は，終点 d および終点到着時刻 t が同一であれば（終点への希望到着時刻 s が異なっても）共通である．従って，条件 (7.1)～(7.4) は，変更する必要が無い．

次に，終点到着時刻 t の選択条件については，希望到着時刻 s ごとに区別して表現する必要がある．すなわち，終点到着時刻選択の均衡条件は，(7.6) でのODペアによる区別に，さらに，希望到着時刻による区別を加えた

$$\begin{cases} \rho_{od}(s) = \pi_d^o(t) + w_d(t,s) & if\ q_{od}(t,s) > 0 \\ \rho_{od}(s) \le \pi_d^o(t) + w_d(t,s) & if\ q_{od}(t,s) = 0 \end{cases}$$

$$\forall t \in I, \forall s \in S, \forall od \in W \quad (7.21)$$

と表現される．ここで，$q_{od}(t,s)$ は終点 d への希望到着時刻が s で，終点 d に時刻 t に到着する OD ペア (o, d) の交通流率である．また，OD ペア (o,d) の全時間帯を通じた希望到着時刻別の交通需要 $Q_{od}(s)$ が与件であるので，変数 $q_{od}(t,s)$ は（(7.5) に換えて）以下のフロー保存則：

$$\int_0^T q_{od}(u,s)\,du = Q_{od}(s) \quad \forall s \in S, \forall od \in W \quad (7.22)$$

を満たす必要がある．さらに，希望到着時刻の区別を必要としない各ノードでのフロー保存条件 (7.1) に現れる OD 交通流率 $q_{od}(t)$ が，$q_{od}(t,s)$ と整合的であるためには，

$$q_{od}(t) = \sum_{s \in S} q_{od}(t,s) \quad \forall t \in I, \forall od \in W \quad (7.23)$$

が成立する必要がある．

最後に，各リンクの通行権は，当該リンクへの到着時刻によってのみ区別すれば十分である．終点への希望到着時刻，起点，OD ペア等の利用者属性による区別をする必要は無いことに注意されたい．従って，通行権取引市場での需給均衡条件 (7.7)～(7.8) は，希望到着時刻の区別の影響を受けず，変更する必要は無い．

結局，希望到着時刻が利用者によって異なる場合の均衡状態は，(7.1)～(7.4), (7.21)～(7.23), (7.7)～(7.8) を連立した状態として表現できる．この均衡条件は，(1) での議論と同様，以下の最適化問題 [P-D] と等価であることが容易に示される．

$$\min_{(\mathbf{q},\mathbf{y}) \ge \mathbf{0}}.\ F_P^D(\mathbf{q},\mathbf{y}) \equiv \sum_{o \in O} \sum_{d \in D} \sum_{s \in S} \int_0^T q_{od}(t,s)\, w_d(t,s)\, dt + \alpha \sum_{ij \in L} \int_0^T y_{ij}(t)\, t_{ij}\, dt \quad (7.24)$$

subject to (7.22), (7.23), (7.11), (7.12) and (7.13).

この問題の目的関数は，ネットワーク全体で費やされるスケジュール費用と旅行費用の総和を意味している．[P-M] との違いは，スケジュール費用が，希望到着時刻別に詳細に記述されている点のみである，従って，以下の命題が成立する．

命題４-C：最適配分問題 [P-D] に許容解が存在する多起点・多終点ネットワークを考える．また，終点への希望到着時刻が利用者によって異なる状況を仮定する．このとき，リンク到着時刻別の通行権取引制度により実現する均衡状態は，式 (7.24) で定義された社会的交通費用を最小化する最適配分状態と一致する．

この拡張された均衡問題の等価最適化問題 [P-D] を解けば，均衡状態での最適交通流パターンおよび通行権価格を求めることができる．そして，この均衡通行権価格は，第6 章での単一ODペアの場合の議論と全く同様，混雑料金制度下での最適混雑料金と一致する．従って，理論上は，問題 [P-D] を解くことによって，渋滞を解消する最適な動的混雑料金を求めることもできるだろう．これは，言い換えると，混雑料金制度では，適切な料金設定のために，道路管理者が最適化問題 [P-D] を実際に解く必要があることを意味している．しかし，そのためには，問題 [P-D] に現れる膨大な個数の外生的変数（*eg.* 希望到着時刻別のOD交通需要 $Q_{od}(s)$ やスケジュール費用関数 $w_d(t,s)$）の値を正確に与える必要がある．これは，現実には，多額の調査費用を要する上に，その調査結果の正確性・頑健性を保証することも非常に難しい．従って，このような複雑な状況で最適な動的混雑料金を設定するためには，道路管理者に過大な能力が要求され，その実行は，ほとんど不可能であろう．

それに対して，通行権取引制度の場合，問題 [P-D] は，道路管理者が解かねばならない問題ではない．通行権取引制度では，この最適化問題を解くことと等価な作業が，通行権市場での多数の利用者間の売買取引（という間接的な情報交換）によって自動的に（分権的に）実行されることとなる．ここでの問題 [P-D]は，あくまでも，均衡状態が社会的最適状態となることを理論的に示すために用いられているだけである．実際，通行権取引制度では，このような複雑な状況であれ，第 3 章で示した単純な状況であれ，道路管理者が実行すべきことは全く変わらない．すなわち，道路管理者は，各ボトルネックの容量のみを把握し，それに対応した枚数の通行権を発行するだけである．そして，交通容量情報は，詳細なOD需要情報に比べれば，はるかに容易に正確な値を把握できることは，言うまでも無い（なお，交通容量に関する情報は，通行権取引制だけで必要となるのではなく，混雑料金制でも必要である）．このように，第 6 章の**命題３**で示した結論（通行権取引制が混雑料金制に対して持つ効率性面での優位）は，より一般的・複雑な状況になるほど，より強固になることが判る．

(4) 最適容量と最適配分の同時決定問題 - Self-financing 原理の成立 -

最後の拡張分析として，各リンクの最適な交通容量と最適フロー配分を同時に決定する問題 [P-K]：

$$\min_{(\mathbf{q},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu}) \ge \mathbf{0}}.\ K(\boldsymbol{\mu}) + F_P^M(\mathbf{q},\mathbf{y}) \quad (7.25)$$

subject to (7.10), (7.11), (7.12) and (7.13).

を考えてみよう．この問題では，[P-M] で外生的な定数であったリンク容量μが未知（内生的）変数となり，目的関数に容量追加に伴う投資費用を表す第三項が追加されている．この建設投資関数は，μに関して一次同次であるとする，すなわち，

$$K(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{ij \in L} \frac{\partial K(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{ij}} \mu_{ij} \tag{7.26}$$

この問題の最適条件は，[P-M] の最適条件に加え，リンク容量μの最適化に関する以下の条件：

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_{ij}} = \frac{\partial K(\mu)}{\partial \mu_{ij}} - \int_0^T p_{ij}(t)\, dt = 0 \tag{7.27}$$

が追加される．ここで，Lは問題 [P-K] の Lagrangean である．式(7.27) にμ_{ij}を掛けて全リンクについて和を取ると，式(7.26) より，最適な容量μ^*は,

$$K(\boldsymbol{\mu}^*) = \sum_{ij \in L} \mu_{ij}^* \int_0^T p_{ij}^*(t)\, dt \tag{7.28}$$

を満たす．この左辺は，最適な容量実現に必要な投資費用である．右辺は，通行権取引制度導入によって実現する均衡状態での通行権価値総額を表している．なぜなら，(1)で既に見たように，任意の交通容量パターンに対して，[P-M] の最適解は，通行権導入下での均衡状態に一致し，最適解でのLagrange 乗数 $\mathbf{p}^*(t)$ は均衡通行権価格と一致するからである．従って，式(7.28)は，“*self-financing* 原則” [19), 20), 21), 22), 23)] が成立することを意味している．この事実は，以下の命題にまとめられる：

命題５：　最適配分問題 [P-M] に許容解が存在するネットワークを考え，容量増強に必要な投資費用が容量μに関して一次同次な関数で与えられると仮定する．このとき，式 (7.25) で定義された社会的費用を最小化する容量増強投資に必要な費用は，道路管理者がボトルネック通行権を市場販売して得られる収入総額と一致する．すなわち，*self-financing* 原則が成立する．

8. おわりに

本稿では，一般的な（任意の構造を持つ）交通ネットワークを対象とした “ボトルネック通行権取引制度” を考察した．まず，単一 OD ペアのネットワークにおいて，この制度導入後，利用者の終点到着時刻・経路・通行権選択パターンがどの様な状態となるかを表す均衡モデルを提示した．そして，その均衡状態が，社会的交通費用を最小化する最適配分問題の解と一致する（*ie.* 制度導入後の均衡状態は社会的に効率的である）ことを明らかにした．また，従来から交通渋滞解消のための代表的な TDM スキームと考えられてきた混雑料金制と本稿の “ネットワーク通行権取引制” との理論的関係を示した．そして，各制度の実行に必要な情報量および効率性を比較し，後者が前者に対して持つ優位性を明らかにした．さらに，以上の結果が，1) 多起点・多終点の場合，2) OD 需要が弾性的な場合，3) 利用者の希望する到着時刻が分布する場合，といった一般的な状況でも成立することを示した．最後に，この制度では，一般に，*self-financing* 原則が成立する（*ie.* 通行権販売総額は，社会的に最適な容量増強に必要な投資費用額と一致する）ことが示された.

本稿ではネットワーク通行権取引制度の効率性を社会的費用最小化の観点から示した．しかし，そのことは，この制度導入によるパレート改善や制度のパレート最適性までは必ずしも意味していない．単一ボトルネックの問題では，制度導入前の渋滞待ち時間と制度導入後の通行権価格に 1 対 1 の対応関係があるため[2), 7)]，パレート改善の議論は容易である．しかし，多数のボトルネックがある状況では，ボトルネック間での遅れ時間の相互作用により，制度導入前の渋滞待ち時間パターンは，非常に複雑である[24), 25)]．そのため，パレート改善の議論は，より高度な考察を必要とし，今後に残された理論的課題である.

また，本稿ではネットワーク通行権取引制度を理論的観点のみから考察したが，実社会で具現化してゆくことまで考えれば，残された課題も数多い．特に，この制度が利用者に受容されるためには，通行権取得のための煩雑な取引・手続きの負担を軽減するシステムの設計が重要である．これは，システムの基本アーキテクチャに関わる課題であるが，長期的将来には，ICT/ITS の活用によって，利用者の手を煩わせないシステムを想定することもできるだろう．例えば，道路移動に際して必要とされる通行権の取得は，車載器に装備された “*agent software*” が利用者の代わりに実行するといったシステムである．その様なシステムでは，通行権市場は，各利用者の選好情報および適切な行動原則をプログラムされた *agent software* 同士が売買取引を行う電子市場である．そして，各利用者の車載 *agent software* が自動的に通行権の最適な選択・取引をすることとなる．このようなシステムの実現には，交通ネットワークの実時間利用状況と連動した電子通行権取引市場システムや *agent software* によるオークション取引ルールに関する研究が必要であろう．それは，今後の研究展開が期待される新たな課題である.

謝辞：本論文は，日本学術振興会・科学研究費補助金・萌芽研究（課題番号 18656142）および，社団法人システム科学研究所「米谷・佐佐木基金」奨学金（第1回「米谷・佐佐木賞」）の助成金を受けた研究の一部である．また，本論文の初稿に対して，京都大学の文世一氏，東京大学の桑原雅夫氏，東北大学の森杉壽芳氏，宮城俊彦氏，河野達仁氏，平野勝也氏，佐藤慎太郎君，菊地志郎君，神戸大学の長江剛志氏，そして，3名の査読者の方々から貴重な意見を頂いた．ここに記し，感謝の意を表します．

付録１：命題１の証明

最適化問題 [P-1] の最適性の必要十分条件が，均衡条件 (4.1)〜(4.9) と一致（1対1に対応）することを示せばよい．その最適条件を示すために，まず，問題 [P-1] の Lagrangean 関数 L を以下の様に定義する：

$$L(\mathbf{q},\mathbf{y},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p}) \equiv F_P(\mathbf{q},\mathbf{y}) \tag{A.1}$$

$$+\rho\{Q-\int_0^T q(t)\,dt\} + \sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\{y_{ij}(t)-\mu_{ij}\}\,dt$$

$$+\sum_{i\in N}\int_0^T \pi_i(t)\{q(t)\delta_{id}+\sum_k y_{ik}(t)-\sum_k y_{ki}(t-t_{ki})\}\,dt$$

ここで，関数 F_P は，式 (5.1) で定義された問題 [P-1] の目的関数である．また，ρ, $\{\mathbf{p}(t)\}$, $\{\boldsymbol{\pi}(t)\}$ は，各々，制約条件(5.2), (5.3), (5.4) に対応する Lagrange 乗数である．このとき，問題 [P-1] の最適性の必要十分条件は，以下の Kuhn-Tucker 条件で与えられる：

$$\begin{cases}\partial L/\partial q^*(t)=0 & \text{if}\ \ q^*(t)>0\\ \partial L/\partial q^*(t)\ge 0 & \text{if}\ \ q^*(t)=0\end{cases}\qquad \forall t\in I \tag{A.2}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial y_{ij}^*(t)=0 & \text{if}\ \ y_{ij}^*(t)>0\\ \partial L/\partial y_{ij}^*(t)\ge 0 & \text{if}\ \ y_{ij}^*(t)=0\end{cases}\qquad \forall t\in I,\forall ij\in L \tag{A.3}$$

$$\partial L/\partial \rho^*=0 \tag{A.4}$$

$$\begin{cases}\partial L/\partial p_{ij}^*(t)=0 & \text{if}\ \ p_{ij}^*(t)>0\\ \partial L/\partial p_{ij}^*(t)\le 0 & \text{if}\ \ p_{ij}^*(t)=0\end{cases}\qquad \forall t\in I,\forall ij\in L \tag{A.5}$$

$$\partial L/\partial \pi_i^*(t)=0 \qquad \forall t\in I,\forall i\in N \tag{A.6}$$

まず，条件 (A.4), (A.5), (A.6) は，各々，制約条件 (5.2), (5.3), (5.4) に帰着することが容易に確かめられる．そして，これは，均衡条件の (4.7), (4.9), (4.1) と同一である．次に，条件 (A.2), (A.3) を調べるために，Lagrangean の偏微分を具体的に計算すると，

$$\partial L/\partial y_{ij}^*(t)=(\alpha t_{ij}+p_{ij}(t))+\pi_i(t)-\pi_j(t+t_{ij}) \tag{A.7}$$

$$\partial L/\partial q^*(t)=w(t)+\pi_d(t)-\rho \tag{A.8}$$

である．これを (A.2), (A.3) に代入すれば，各々，均衡条件 (4.8), (4.5) と同一形式の条件に帰着する，すなわち，最適条件 (A.2)〜(A.6) における Lagrange 乗数 $\mathbf{p}^*(t)$, $\boldsymbol{\pi}^*(t)$, $\boldsymbol{\rho}^*$ は，各々，均衡条件 (4.1)〜(4.9) における均衡リンク通行権価格，均衡最小経路費用，均衡一般化費用に一致し，最適フロー・パターンは，均衡フロー・パターンと一致する■

付録２：命題４-A の証明

証明の手順は，命題１と同様であるため，概要のみ示す．問題 [P-M] の Lagrangean 関数 L を

$$L(\mathbf{q},\mathbf{y},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi},\mathbf{p}) \equiv F_p^M(\mathbf{q},\mathbf{y}) \tag{A.9}$$

$$+\sum_{od\in W}\rho_{od}\{Q_{od}-\int_0^T q_{od}(t)\,dt\}$$

$$+\sum_{ij\in L}\int_0^T p_{ij}(t)\{\sum_{o\in O}y_{ij}^o(t)-\mu_{ij}\}\,dt$$

$$+\sum_{o\in O}\sum_{i\in N}\int_0^T \pi_i^o(t)\{q_{od}(t)\delta_{id}+\sum_k y_{ik}^o(t)-\sum_k y_{ki}^o(t-t_{ki})\}\,dt$$

と定義する．ここで，制約条件式 (7.11) は目的関数および制約条件式 (7.11) に代入され，未知変数 $\{y_{ij}(t)\}$ は消去されている．また，ρ, $\{\mathbf{p}(t)\}$, $\{\boldsymbol{\pi}(t)\}$ は，各々，制約条件 (7.10), (7.12), (7.13) に対応する Lagrange 乗数である．このとき，[P-M] の Kuhn-Tucker 条件は，**付録１**の (A.2)〜(A.6) において，

$y_{ij}(t)\rightarrow y_{ij}^o(t)$, $q(t)\rightarrow q_{od}(t)$, $\pi_i(t)\rightarrow \pi_i^o(t)$, $\rho(t)\rightarrow \rho_{od}(t)$

と置き換えただけの条件である．そこで，Lagrangean の $y_{ij}^o(t)$, $q_{od}(t)$ に関する偏微分を具体的に計算すると，

$$\partial L/\partial y_{ij}^o(t)=(\alpha t_{ij}+p_{ij}(t))+\pi_i^o(t)-\pi_j^o(t+t_{ij}) \tag{A.10}$$

$$\partial L/\partial q_{od}(t)=w_d(t)+\pi_d^o(t)-\rho_{od} \tag{A.11}$$

である．これを Kuhn-Tucker 条件に代入すれば，それは，均衡条件 (7.1)〜(7.8) と一致する■

参考文献

1) Friedman, T.: *The world is flat – a brief history of the globalized world in the 21st century*, Allen-Lane, 2005.
2) 赤松隆，佐藤慎太郎，Nguyen Xuan Long：時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究, 土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.605-620, 2006.
3) Akahane,H. and Kuwahara, M.: A basic study on trip reservation

systems for recreational trips on motorways, In: *Proc. of the 3rd World Congress on Intelligent Trans-portation Systems*, pp.1-7, ITS America, Washington D.C., 1996.
4) Wong, J-T.: Basic concepts for a system for advance booking for highway use, *Transport Policy*, Vol.4, pp.109-114, 1997.
5) 赤羽弘和，桑原雅夫，佐藤拓也：高速道路の利用予約制に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.660 / IV-49, pp.79-87, 2000.
6) Teodorovic, D. and Edara, P.: Highway space inventory control system, *Transportation and Traffic Theory*, Vol.16, pp.43-62, 2005.
7) Akamatsu, T.: Tradable bottleneck permits: Optimal allocation of priority road services, *submitted to Journal of Urban Economics,* 2007.
8) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern, *Transportation and Traffic Theory*, Vol.12, pp.185-204, 1993.
9) 赤松隆，桑原雅夫：渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分, 土木学会論文集, No.488 / IV-23, pp.21-30, 1994.
10) Cascetta, E.: *Transportation systems engineering*: *theory and methods*, Kluwer Academic, 2001.
11) 井料隆雅，吉井稔雄，朝倉康夫：出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的分析, 土木学会論文集, No.779 / IV-66, pp.105-118, 2005.
12) 赤松隆，古川敦，家田仁：利用者便益からみた列車ダイヤ最適化に関する基礎的研究, 土木計画学研究・講演集, Vol. 11, pp.243-250, 1988.
13) 家田仁，赤松隆，高木純：利用者均衡配分による通勤列車運行計画の利用者便益評価, 土木計画学研究・論文集, Vol. 6, pp.177-184, 1988.
14) Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. and Orlin, J.B.: *Network flows: theory, algorithms and applications*, Prentice-Hall, 1993.
15) Kennington, J.L. and Helgason, R.V.: *Algorithms for network programming*, Wiley-Interscience, 1980.
16) 岩野和生：ネットワークフロー問題の最近の進展，離散構造とアルゴリズム, (編) 藤重悟, pp.79-154, 近代科学社, 1993.
17) Weitzman, M. L. : Prices vs. quantities, *The Review of Economic Studies*, Vol.41, pp.477-491, 1974.
18) Laffont, J.J. : More on prices vs. quantities, *The Review of Economic Studies*, Vol.44, pp.177-182, 1977.
19) Mohring, H. and Harvitz, M.: *Highway benefirs: An analytical framework*, Northwestern University Press, 1962.
20) Keeler, T.E. and Small, K.A.: Optimal peak-load pricing, investment and service levels on urban expressways, *Journal of Political Economy*, Vol.85, pp.1-25, 1977.
21) Arnott, R. and Kraus, M.: Financing capacity in the bottleneck model, *Journal of Urban Economics*, Vol.38, pp.272-290, 1995.
22) Arnott, R. and Kraus, M.: Self-financing of congestible facilities in a growing economy, In: *Topics in Public Econmics*, (eds.) Pines,D. et al., pp.161-184, 1998.
23) Yang, H. and Meng, Q.: A note on "highway pricing and capacity choice in a road network under build-operate-tranfer scheme", *Transportation Research A*, Vol.36, pp.659-663, 2002.
24) Akamatsu, T.: An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues, *Transportation Science*, Vol.35, pp.389-404, 2001.
25) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting capacity paradoxes in dynamic traffic assignment in saturated networks, *Transportation Science*, Vol.37, pp.123-138, 2003.

(2007. 1. 29 受付)

A SYSTEM OF TRADABLE BOTTLENECK PERMITS FOR GENERAL NETWORKS

Takashi AKAMATSU

This paper extends the theory of "*tradable bottleneck permits*" (TBP), which was proposed in Akmatsu et al.(2006), to cases where the TBP system is introduced for transportaion networks with general topology. We first explore the economic properties of the TBP system in general networks with a single OD pair. We then reveal that the equilibrium dynamic flow pattern under the TBP system achieves the most efficient use of network capacity. We further show that this result also holds for more general situations: (1) networks with many-to-many OD pairs, (2) users with elastic trip demands, (3) heterogeneous users with different schedule cost functions. Finally, some theoretical comparisons between the TBP system and congestion pricing schemes are given.